ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD MALGRANGE
JEAN-PIERRE RAMIS

Fonctions multisommables

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 1-2 (1992), p. 353-368
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_353_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42, 1-2 (1992), 353-368

FONCTIONS MULTISOMMABLES

par B. MALGRANGE et J.-P. RAMIS

Introduction.

La notion de multisommabilité, ou sommabilité à plusieurs niveaux, est une généralisation de la sommabilité de Borel [Bo]; elle a été introduite par Ecalle [E1], [E2] comme un cas particulier de procédés de sommation par "accélération", le cas qu'il appelle "accélération moyenne". Elle a été étudiée notamment par Martinet-Ramis [MR2], Balser [Ba1], [Ba2] et Jurkat [Ju].

Chez ces auteurs, cette notion est introduite principalement en vue de son application aux solutions d'équations différentielles ou à d'autres objets locaux, au voisinage de points singuliers. Mentionnons aussi qu'elle a été retrouvée indépendamment par Tougeron [Tou] à propos de problèmes tout à fait différents, de nature géométrique.

Ce bref article a pour objet de donner une présentation de cette notion qui est, à notre avis, particulièrement simple et adaptée aux applications; signalons en passant que nous prenons une définition légèrement plus générale que les auteurs cités (les intervalles emboités qui interviennent ne sont pas supposés ici avoir une bissectrice commune).

L'un et l'autre, nous avions eu ces dernières années de nombreuses conversations avec J. Martinet sur le sujet traité ici et des questions connexes. Tout ceci est proche de ses derniers travaux mathématiques,

---

Mots-clés : Sommabilité - Equations différentielles.
Classification A.M.S. : 34E05 - 40G99.

cf. [Mar]. Il nous est difficile de traiter de ces problèmes sans penser au mathématicien si enthousiaste et à l'ami qu'il était. Et il est naturel de présenter ce travail dans ce colloque, en hommage à sa mémoire et à celle de C. Godbillon.

1. Sommabilité et k-sommabilité : rappels.

Nous rappelons ici sans démonstration un certain nombre de résultats sur la sommabilité de Borel et sa généralisation, la k-sommabilité, due à Ramis [Ra1], [Ra2]. Pour les démonstrations, nous renvoyons à ces articles; on pourra aussi voir, pour $k = 1$, l'exposition donnée dans [Ma1] (le cas général est analogue); *cf.* aussi [Si2], Appendices.

1.1. **Notations.** — Pour $s > 0$, $\mathbf{C}[\![x]\!]_s$ désigne l'espace –en fait l'anneau– des séries formelles $\hat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ qui sont telles que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n!)^s} t^n$ converge au voisinage de l'origine; par Stirling, il revient au même de demander que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{\Gamma(ns)} t^n$ converge au voisinage de l'origine. Soit d'autre part $\widetilde{\mathbf{C}} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ l'ensemble obtenu en faisant un "éclatement réel" de $\mathbf{C}$ en 0; explicitement $\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{R}_+ \times (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$, $p(r,\theta) = re^{i\theta}$; on pose $S = p^{-1}(0)$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ et on identifie par p $\widetilde{\mathbf{C}} - S$ à $\mathbf{C}^*$; pour $\theta \in S$, on désigne par $\mathcal{V}_\theta$ l'ensemble des ouverts U de $\mathbf{C}^*$ qui sont traces sur $\mathbf{C}^*$ d'un voisinage ouvert de θ dans $\widetilde{\mathbf{C}}$; une base de $\mathcal{V}_\theta$ est formée, par exemple, des ouverts $\{|\arg x - \theta| < \varepsilon \ ; \ |x| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

1.2. On introduit sur S un certain nombre de faisceaux.

i) On désigne par $\mathcal{A}$ le faisceau suivant : pour $\theta \in S$, $\mathcal{A}_\theta$ est l'ensemble des f holomorphes dans un $U \in \mathcal{V}_\theta$ et admettant à l'origine un développement asymptotique $\widehat{f} = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; ce développement est pris au sens usuel de Poincaré, c'est-à-dire qu'on a, pour tout n, dans U

$$|f(x) - \sum_{0}^{n-1} a_m x^m| \leq c_n |x|^n .$$

On désigne aussi par $\mathcal{A}^{<0}$ le sous-faisceau de $\mathcal{A}$ formé des f vérifiant $\hat{f} = 0$.

ii) Pour $s > 0$, $\mathcal{A}_{(s)}$ est le sous-faisceau de $\mathcal{A}$ suivant : $\mathcal{A}_{(s),\theta}$ est l'ensemble des f définies dans un $U \in \mathcal{V}_\theta$ comme ci-dessus, et telles qu'on ait, pour $x \in U$ et $c > 0$ indépendant de $n \geq 1$

$$|f(x) - \sum_0^{n-1} a_m x^m| \leq c^n (n!)^s |x|^n \ .$$

iii) Pour $k > 0$, $\mathcal{A}^{\leq -k}$ désigne le sous-faisceau de $\mathcal{A}^{<0}$ suivant : $\mathcal{A}_\theta^{\leq -k}$ est l'ensemble des f holomorphes dans un $U \in \mathcal{V}_\theta$ et y vérifiant pour $A > 0$ et $B > 0$ convenables $|f(x)| \leq Ae^{-B/|x|^k}$.

Cela posé, le premier résultat, qui se déduit facilement de la formule de Stirling, est le suivant

1.3. *Pour $s > 0$, on a $\mathcal{A}_{(s)} \cap \mathcal{A}^{<0} = \mathcal{A}^{\leq -k}$, avec $k = 1/s$.*

Soit maintenant I un intervalle fermé de S, dont la longueur sera notée $|I|$; notons T_I (ou plus simplement T) l'application "série de Taylor" $f \mapsto \hat{f}$ de $\Gamma(I, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{C}[\![x]\!]$. Il est clair que T envoie $\Gamma(I, \mathcal{A}_{(s)})$ dans $\mathbb{C}[\![x]\!]_s$ ($s > 0$); on a le résultat suivant, toujours avec $k = 1/s$.

1.4. *Pour $|I| < \dfrac{\pi}{k}$, T est surjectif; pour $|I| \geq \dfrac{\pi}{k}$, il est injectif.*

La première assertion se voit classiquement par "transformation de Laplace incomplète", tout au moins lorsque $k = 1$; le cas général s'obtient par une généralisation du même procédé. Compte-tenu de 1.3, la seconde est équivalente au lemme suivant, dû à Watson [Wat] : pour $|I| \geq \dfrac{\pi}{k}$, on a $\Gamma(I, \mathcal{A}^{\leq -k}) = 0$.

1.5. DÉFINITION. — *Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_s$, avec $s > 0$ et $k = 1/s$; si I est un intervalle fermé de S de longueur $\geq \dfrac{\pi}{k}$, on dit que $\hat{f}$ est k-sommable sur I s'il existe $f \in \Gamma(I, \mathcal{A}_{(s)})$ vérifiant $Tf = \hat{f}$.*

D'après 1.4, f est nécessairement unique. On l'appelle *somme* de $\hat{f}$ sur I.

Pour $k = 1$, un résultat classique [Wat], [Ne] montre que la notion précédente coïncide avec la sommabilité de Borel, définie au moyen de la transformation de Laplace; cette caractérisation se généralise à $k > 0$ quelconque [Ra2].

Nous allons voir que, dans la définition précédente, il est possible d'éliminer la référence aux espaces $\mathcal{A}_{(s)}$; pour cela, on s'appuie sur le résultat suivant, dû à Ramis [Ra2] (Sibuya [Si1], [Si2] a obtenu indépendamment un résultat voisin).

1.6. THÉORÈME . — *Soit* $\{U_i\}$ *un recouvrement ouvert de* S*; supposons donné, pour chaque* i*, un* $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A})$ *et supposons qu'on ait,* $\forall (i,j) : f_i - f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{A}^{\leq -k})$*. Alors,* $\forall i$*, on a* $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A}_{(s)})$, $s = 1/k$.

Esquissons le principe de la démonstration : tout d'abord, on peut supposer, en raffinant le recouvrement, que les intersections 3 à 3 des U_i sont vides et que les $U_i \cap U_j$ sont des intervalles de S; on démontre alors le résultat suivant :

1.7. *Soient* $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{A}^{\leq -k})$ *donnés, avec* $g_{ij} = -g_{ji}$*; il existe des* $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A}_{(s)})$ *tels qu'on ait* $g_{ij} = g_i - g_j$.

[Principe : par linéarité, on peut supposer que les g_{ij} sont nuls sauf pour une paire (i,j); il s'agit alors de trouver un $g \in \Gamma(V, \mathcal{A}_{(s)})$, V le secteur ramifié qui recouvre deux fois $U_i \cap U_j$, la différence des déterminations de g dans $U_i \cap U_j$ étant égale à g_{ij}; ceci se fabrique facilement par intégrale de Cauchy].

Pour démontrer 1.6, on applique alors 1.7 à $g_{ij} = f_i - f_j$; on a $g_i - g_j = f_i - f_j$, d'où $f_i - g_i = f_j - g_j$; les $f_i - g_i$ se recollent en un $h \in \Gamma(S, \mathcal{A})$; donc h est convergent à l'origine. Alors f_i, qui diffère de g_i par h, est dans $\Gamma(U_i, \mathcal{A}_{(s)})$.

Le théorème 1.6 a le corollaire important suivant (*cf.* [De]).

1.8 COROLLAIRE. — *L'application* $T : \Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k}) \longrightarrow \mathbb{C}[\![x]\!]$ *est un isomorphisme* $\Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k}) \simeq \mathbb{C}[\![x]\!]_s$ $(k > 0,\ s = 1/k)$.

En effet, on déduit facilement de 1.3 et 1.4 que l'application T : $\Gamma(S, \mathcal{A}_{(s)}/\mathcal{A}^{\leq -k}) \longrightarrow \mathbb{C}[\![x]\!]_s$ est bijective; d'autre part le théorème 1.6 montre que l'application naturelle $\Gamma(S, \mathcal{A}_{(s)}/\mathcal{A}^{\leq -k}) \longrightarrow \Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k})$ est surjective; enfin l'injectivité de cette application est évidente.

Dans la suite, nous noterons T_s l'isomorphisme 1.8. Voici maintenant la caractérisation de la k-sommabilité que nous avions en vue.

1.9. THÉORÈME. — *Soit* $\hat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_s$*; posons* $f = T_s^{-1}\hat{f} \in \Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k})$*; soit* I *un intervalle fermé de* S*, de longueur* $\geq \dfrac{\pi}{k}$*. Pour que* $\hat{f}$ *soit sommable sur* I*, de somme* $g \in \Gamma(I, \mathcal{A})$*, il faut et il suffit que la classe de* g *modulo* $\mathcal{A}^{\leq -k}$ *soit égale à* $f|I$.

Cela résulte immédiatement de ce qui précède, car on a en fait $f \in \Gamma(S, \mathcal{A}_{(s)}/\mathcal{A}^{\leq -k})$. A noter qu'on a automatiquement $g \in \Gamma(I, \mathcal{A}_{(s)})$.

Cette caractérisation peut être commode dans les applications; nous n'en parlerons pas ici mais un peu plus loin, dans le cas plus général des fonctions multisommables.

1.10. *Remarque.* — Lorsqu'on a $k \leq 1/2$, avec les définitions précédentes, la notion de k-sommabilité est sans intérêt. Pour s'en sortir, on peut faire une ramification $x = y^p$, avec $p > 1/2k$ (nous laissons le lecteur vérifier que les résultats ne dépendront pas de p); un autre procédé consiste à travailler avec des intervalles I du revêtement universel $\widetilde{S}$ de S; nous laissons aussi le lecteur vérifier que ce procédé est encore équivalent aux précédents.

2. Multisommabilité.

Le lemme de Watson dont il a été question en 1.4 se généralise de la manière suivante :

2.1. PROPOSITION ("lemme de Watson relatif"). — *Pour $0 < k < \ell$, soit I un intervalle fermé de S (ou plus généralement de son revêtement universel $\widetilde{S}$), de longueur $\geq \dfrac{\pi}{k}$; on a $\Gamma(I, \mathcal{A}^{\leq -k}/\mathcal{A}^{\leq -\ell}) = 0$.*

Pour ne pas rompre le fil de l'exposé, nous renvoyons au §3 la démonstration de cette proposition. Soient maintenant $k_1, \ldots, k_n$ des réels donnés, avec $0 < k_1 < \cdots < k_n$; dans la suite, on se limite pour simplifier l'exposé au cas $k_1 > 1/2$ (sinon, raisonner comme en 1.10). Soient donnés $I_1 \supset \cdots \supset I_n$ des intervalles fermés de S emboîtés, avec $|I_j| \geq \dfrac{\pi}{k_j}$.

Soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{s_1}$, avec $s_1 = 1/k_1$; posons $f_0 = T_{k_1}^{-1}\hat{f} \in \Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k_1})$, et soient $f_1, \ldots, f_n$ donnés, avec $f_j \in \Gamma(I_j, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k_{j+1}})$ pour $j = 1, \ldots, n-1$, $f_n \in \Gamma(I_n, \mathcal{A})$.

2.2. DÉFINITION. — *On dit que $\hat{f}$ est $(k_1, \ldots, k_n)$ sommable sur $(I_1, \ldots, I_n)$, de somme $(f_1, \ldots, f_n)$ si, pour $j = 1, \ldots, n$, on a $f_j(\text{mod.}\,\mathcal{A}^{\leq -k_j})$
$= f_{j-1}|I_j$.*

La proposition 2.1 montre, par récurrence sur n, que la somme $(f_1, \ldots, f_n)$ est unique. La définition précédente s'exprime de façon commode au moyen de la construction suivante, variante d'une construction suggérée dans une lettre de Deligne à Ramis (ce type de constructions sera développé plus systématiquement, sous le nom de "Cauchy sauvage", dans un ouvrage en cours de rédaction de J.-P. Ramis; voir aussi [Mar]). Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disque fermé de rayon $r > k_n$; on le munit du faisceau $\widetilde{\mathcal{A}}$ suivant; pour fibre en 0, on prend $\mathbb{C}[\![x]\!]$; en (ρ, θ), $0 < \rho \leq r$, on prend la fibre suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{C}[\![x]\!] = \mathcal{A}_\theta / \mathcal{A}_\theta^{\leq 0}\ , & \text{si } \rho < k_1 \\ \mathcal{A}_\theta / \mathcal{A}_\theta^{\leq -k_j}\ , & \text{si } k_j \leq \rho < k_{j+1} \text{ (on pose } r = k_{n+1}) \\ \mathcal{A}_\theta & \text{si } \rho = r \end{cases}$$

Soit alors $\widetilde{I}_j$ le fermé de Δ : $\{\rho \leq k_{j+1},\ \theta \in I_j\}$ et soit $\widetilde{I} = \{|x| \leq k_1\} \cup \widetilde{I}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{I}_n$. La définition 2.2 signifie que $F = (f_0, \ldots, f_n)$ est une section de $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur $\widetilde{I}$ (en fait, sur un ensemble un peu plus grand car $\widetilde{\mathcal{A}}$ est constant sur les segments $k_j \leq \rho < k_{j+1}$, mais peu importe).

La définition et la construction qui précèdent permettent de voir immédiatement "par localisation sur les rayons" certaines propriétés des fonctions multisommables. Donnons à titre d'exemple la propriété suivante, signalée par Tougeron [Tou].

2.3. PROPOSITION. — *Soit $\Phi(x, y_1, \ldots, y_p)$ holomorphe à l'origine dans $\mathbb{C}^{p+1}$, et soient $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p$ des séries $(k_1, \ldots, k_n)$ sommables sur $(I_1, \ldots, I_n)$, avec $\hat{f}_i(0) = 0$. Alors $\Phi(x, \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$ a la même propriété.*

Il suffit de voir ceci : soient $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{A}_\theta / \mathcal{A}_\theta^{\leq -k}$ ($k =$ un k_j), les f_i étant nulles à l'origine; alors $\Phi(x, f_1, \ldots, f_p)$ est bien défini dans le même espace : or ceci est évident : on prend des représentants $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p$; par la formule de Taylor à l'ordre 1, $\Phi(x, y_i) - \Phi(x, z_i) = \Sigma(y_i - z_i)\Psi(x, y_i, z_i)$, on voit que modulo $\mathcal{A}^{\leq -k}$, $\Phi(x, \tilde{f}_i)$ ne dépend pas des représentants choisis.

Plus généralement le même résultat se voit, avec la même démonstration, si l'on suppose seulement que $\Phi(x, y_1, \ldots, y_p)$ est holomorphe en $y_1, \ldots, y_p$ au voisinage de 0, à valeurs $(k_1, \ldots, k_n)$ sommable en x sur $(I_1, \ldots, I_n)$ (la définition évidente qu'il faut prendre est laissée au lecteur).

Dans le cas où les secteurs $I_1, \ldots, I_n$ ont même bissectrice, la notion de multisommabilité introduite ici coïncide avec celle des auteurs cités dans l'introduction; pour le voir, compte-tenu des théorèmes de décomposition établis dans [Bal] et [Tou], il suffit d'établir le résultat suivant :

2.4. THÉORÈME. — *Si $\hat{f}$ est $(k_1, \dots, k_n)$-sommable sur $(I_1, \dots, I_n)$, on peut écrire $\hat{f} = \Sigma \hat{f}_j$, avec $\hat{f}_j$ k_j-sommable sur I_j, et réciproquement.*

La réciproque est triviale, et il suffit donc d'établir l'assertion directe. Par récurrence, il suffit d'établir qu'on a $\hat{f} = \hat{f}' + \hat{f}''$, avec $\hat{f}'$ $(k_1, \dots, k_{n-1})$-sommable sur $(I_1, \dots, I_{n-1})$ et $\hat{f}''$ k_n-sommable sur I_n. Soit $\widetilde{I}'$ l'ensemble analogue à $\widetilde{I}$ construit avec $(k_1, \dots, k_{n-1})$ et $(I_1, \dots, I_{n-1})$. [Attention! Ici k_n ne joue aucun rôle, et il faut le remplacer par r]; posons $\widetilde{I}'' = \{|x| \leq k_n\} \cup \widetilde{I}_n$; on a $\widetilde{I} = \widetilde{I}' \cap \widetilde{I}''$, et il faut démontrer qu'on peut écrire $F = F' + F''$, avec $F' \in \Gamma(\widetilde{I}', \widetilde{\mathcal{A}})$, $F'' \in \Gamma(\widetilde{I}'', \widetilde{\mathcal{A}})$. On voit facilement qu'il suffit a fortiori de démontrer le lemme suivant :

2.5. LEMME. — *Soit $h \in \Gamma(I_{n-1}, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k_n})$; on peut écrire $h = h' + h''$, avec $h' \in \Gamma(I_{n-1}, \mathcal{A})$, $h'' \in \Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k_n})$.*

Ecrivons pour simplifier I pour I_{n-1} et k pour k_n; soit δ l'homomorphisme de connexion dans la suite exacte $\Gamma(I, \mathcal{A}) \longrightarrow \Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k}) \xrightarrow{\delta} H^1(I, \mathcal{A}^{\leq -k})$; comme S est de dimension un, en représentant la 1-cohomologie par des recouvrements sans intersections 3 à 3, on montre immédiatement l'existence d'un $g \in H^1(S, \mathcal{A}^{\leq -k})$ tel qu'on ait $g|I = \delta(h)$. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de S et soient $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{A}^{\leq -k})$ représentant g; en appliquant (1.7), et en prenant pour $\bar{g}$ la classe commune des $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A})$ modulo $\mathcal{A}^{\leq -k}$, on trouve un $\bar{g} \in \Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k})$ tel qu'on ait $\delta(\bar{g}) = g$. On prend alors $h'' = \bar{g}$; sur I, on a $\delta(h - h'') = 0$ donc (suite exacte ci-dessus) $h - h''$ se relève en un $h' \in \Gamma(I, \mathcal{A})$; d'où le lemme.

On remarquera que dans ces raisonnements seuls interviennent 1.7 et le fait que S est de dimension 1.

3. Démonstration de 2.1.

Reprenons les notations de 2.1; pour démontrer cette assertion, il revient au même d'établir que l'application $\Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -\ell}) \longrightarrow \Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k})$ est injective.

i) Une première manière d'y arriver est donnée dans [Ma2], proposition (IX.4.4). Le principe de cette démonstration est le suivant; par une ramification, on se ramène au cas $k = 1$; on peut supposer qu'on a $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; alors après inversion $y = \frac{1}{x}$, la transformation de Laplace établit un isomorphisme de $\Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -1})'$ avec l'espace des germes $\mathcal{A}_\theta$ en $\theta = 0$ (le symbole $'$ signifie qu'on se restreint aux classes de fonctions nulles à l'origine). D'autre part, on voit que la même transformation donne un isomorphisme $\Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -\ell})'$ ($\ell > 1$) avec l'espace des germes $f \in \mathcal{A}_0$ qui se prolongent dans un secteur $|\arg z| < \varepsilon$ en une fonction d'ordre ℓ', avec $\dfrac{1}{\ell} + \dfrac{1}{\ell'} = 1$; alors, l'injectivité cherchée résulte du principe du prolongement analytique.

ii) Voici une autre manière de faire, due à Martinet-Ramis : on s'appuie sur le théorème "taubérien" suivant [MR1]

3.1. THÉORÈME. — *Soient $0 < k < \ell$, et soit I un intervalle fermé de S (ou $\widetilde{S}$), de longueur $\geq \dfrac{\pi}{k}$; soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_t$, $t = 1/\ell$; a fortiori, on a donc $\hat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_s$, $s = 1/k$. Si $\hat{f}$ est k-sommable sur I, il est ℓ-sommable sur I, de même somme.*

2.1 entraîne immédiatement (3.1) ; soit en effet $g = T_t^{-1}\hat{f} \in \Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -\ell})$, et soit $f \in \Gamma(I, \mathcal{A})$ tel qu'on ait $f = g(\text{mod.}\,\mathcal{A}^{\leq -k})$; l'injectivité de l'application $\Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -\ell}) \longrightarrow \Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k})$ montre qu'on a $f = g(\text{mod.}\,\mathcal{A}^{\leq -\ell})$, ce qui est le résultat cherché.

Inversement, 3.1 entraîne l'injectivité précédente. Supposons d'abord $k > \dfrac{1}{2}$; soit $g \in \Gamma(I, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -\ell})$ et supposons qu'on ait $g = 0(\text{mod.}\,\mathcal{A}^{\leq -k})$; d'après le lemme (2.5), on peut écrire $g = g' - g''$, $g' \in \Gamma(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -\ell})$, $g'' \in \Gamma(I, \mathcal{A})$; alors $\hat{g}'$ est k-sommable sur I, de somme g'' ; d'après 3.1, il est donc ℓ-sommable sur I, de somme g'' ; ceci entraîne le résultat cherché. Le cas $k \leq \dfrac{1}{2}$ se ramène au précédent par ramification.

iii) Nous avons indiqué les deux démonstrations précédentes à cause de leur intérêt propre. En voici une troisième qui a l'avantage d'être rapide (en fait elle ne diffère pas essentiellement de i)) ; comme ci-dessus, il suffit de traiter le cas $k = 1$, $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$; posant encore $y = 1/x$, on est ramené à la situation suivante :

Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \alpha_3 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_{n-1} < \beta_n$ des réels, avec $\alpha_1 < -\dfrac{\pi}{2} < \alpha_2$, $\beta_{n-1} < \dfrac{\pi}{2} < \beta_n$, et soit $r > 0$; pour $j = 1, \ldots, n$, soit U_j l'ouvert $\{|y| > r\,; \alpha_j < \arg y < \beta_j\}$, et soit f_j une fonction holomorphe dans U_j ; on suppose

a) que les f_j sont à décroissance d'ordre 1, *i.e.* qu'on a

$$|f_j(y)| \leq Ae^{-B|y|}, \quad y \in U_i, \quad (A > 0,\ B > 0)\ .$$

b) que, dans $U_j \cap U_{j+1}$, $f_{j+1} - f_j$ est à décroissance d'ordre ℓ, *i.e.*

$$|f_{j+1}(y) - f_j(y)| \leq Ce^{-D|y|^{\ell}}, \quad (1 \leq j \leq n-1)\ .$$

Pour démontrer 2.1, il suffit alors de démontrer que, pour tout j, f_j est à décroissance d'ordre ℓ dans un secteur $U'_j \subset U_j$, U'_j étant de même ouverture que U_j (en fait, en précisant la démonstration, on pourrait même prendre $U'_j = U_j$, mais peu importe). Choisissons pour U'_j un secteur $\arg(y - a_j) \in]\alpha_j, \beta_j[$, avec $a_j \in U_j$, et soit g_j la transformée de Laplace $g_j(\eta) = \int_{\delta_j} f_j(y)e^{-y\eta}dy$, avec δ_j une demi-droite d'origine a_j et d'argument variant dans $]\alpha_j, \beta_j[$; alors g_j est holomorphe dans l'ouvert $V_j = \bigcup_{\theta \in]\alpha_j, \beta_j[} \{\mathrm{Re}(\eta e^{i\theta}) > -B\}$; de plus, g_j est à croissance exponentielle d'ordre 1 à l'infini dans V_j. La transformation de Laplace inverse redonne f_j dans U'_j par la formule $f_j(y) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_j} g_j(\eta)e^{y\eta}d\eta$, γ_j un chemin dans V_j, partant de l'infini dans une direction d'argument $< -\dfrac{\pi}{2} - \arg(y - a_j)$ et aboutissant à l'infini dans une direction d'argument $> \dfrac{\pi}{2} - \arg(y - a_j)$. Pour démontrer que f_j est à décroissance d'ordre ℓ dans U'_j, un argument classique de déformation du contour γ_j que nous laissons au lecteur montre qu'il suffit d'établir le résultat suivant :

3.2. LEMME. — *Pour $j = 1, \ldots, n$, g_j se prolonge dans $\mathbf{C}$ en une fonction entière d'ordre ℓ' ($\dfrac{1}{\ell} + \dfrac{1}{\ell'} = 1$), i.e. vérifiant, avec A' et B' convenables $|g_j(\eta)| \leq A'e^{B'|\eta|^{\ell'}}$.*

Ce lemme se voit ainsi; on démontre d'abord le résultat suivant : pour $j = 1, \ldots, n-1$, $g_j - g_{j+1}$ (qui est défini a priori dans $V_j \cap V_{j+1}$) se prolonge en une fonction entière d'ordre $\leq \ell'$; pour voir ce résultat, on choisit δ_j et δ_{j+1} de même argument $\in]\alpha_{j+1}, \beta_j[$ et on remplace ces demi-droites par une demi-droite qui leur est parallèle et continue dans $U_j \cap U_{j+1}$ (ceci change les contours d'intégrations par des chemins compacts, donc modifie g_j et g_{j+1} par des fonctions entières de type exponentiel); le résultat découle alors facilement de la décroissance de $f_{j+1} - f_j$ dans $U_j \cap U_{j+1}$ (propriété b)). On en déduit, par récurrence sur j le résultat suivant : $g_j - g_1$ est une fonction entière d'ordre $\leq \ell'$ (noter que les V_j contiennent tous un voisinage de l'origine, ce qui donne un sens à l'assertion précédente); par suite, il suffit de démontrer le lemme pour g_1.

Mais cela résulte de ce que $g_n - g_1$ est entière d'ordre $\leq \ell'$, et de ce que $V_1 \cup V_n$ recouvre $\mathbb{C}$ (c'est ici que l'hypothèse sur la longueur de I intervient!). Cela démontre le lemme et la proposition.

3.3. *Remarque.* — Au §1, nous avons donné une version assez grossière de la sommabilité de Borel; il est connu (voir p. ex. [Ne]) que les propriétés d'unicité de la somme persistent sous des conditions plus faibles, ne faisant intervenir que le comportement des fonctions dans des ouverts du type $\{|y| > r,\ \alpha < \arg y \leq \pi + \alpha\}$, avec $y = 1/x$; le même résultat subsiste pour la k-sommabilité. Il conviendrait donc d'étudier les raffinements analogues de la notion de multisommabilité. Cela pourrait être utile pour certaines applications; toutefois, la version donné ici est suffisante pour les équations différentielles.

3.4. *Remarque.* — Comme la sommabilité de Borel, la multisommabilité est susceptible de définition par transformation de Laplace; il faut prendre des transformations de Laplace itérées, *cf.* [Ba2] et [Tou]. Nous laissons le lecteur vérifier que ces définitions, comme les définitions par accélération [E1], [MR2] s'étendent à la situation considérée ici, où les secteurs n'ont pas nécessairement même bissectrice.

4. Equations différentielles linéaires.

Montrons comment le point de vue exposé ici permet de trouver rapidement les propriétés de multisommabilité des solutions des équations linéaires au voisinage d'un point singulier. Des résultats analogues sont démontrés dans [BBRS] et [Br1]. Signalons par ailleurs que, au cours du colloque, nous avons eu connaissance d'un manuscrit de B.L.J. Braaksma qui étend ces résultats aux équations non-linéaires [Br2].

Il nous faut pour cela rappeler rapidement les résultats de base de la théorie des équations à coefficients méromorphes; pour les démonstrations, nous renvoyons à la littérature, notamment à [Was], [Ra1], [RS], [Ma2] et aux articles qui y sont cités.

Soit $D = \dfrac{d}{dx} - M$ un système différentiel au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, avec M une $m \times m$ matrice méromorphe en 0. On a les résultats suivants

i) Soient $k_1 < \cdots < k_n$ les pentes > 0 du polygone de Newton de D (on omet la pente éventuelle 0). Quitte à faire une ramification, on peut supposer, ce que nous ferons, que les k_i sont entiers, et qu'il existe une transformation méromorphe formelle $\widehat{S} \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}])$ telle que $D' = \widehat{S}^{-1} D \widehat{S}$ ait la forme suivante :

D' est une somme directe de systèmes de la forme $e^p(\frac{d}{dx} - \frac{C}{x})e^{-p} = \frac{d}{dx} - \frac{dp}{dx} - \frac{C}{x}$, avec C une matrice constante, et $p = \sum_1^{\ell} \frac{a_r}{x^r}$, les divers p étant de degré ℓ égal à $k_1, \ldots, k_n$ ou 0 (dans ce dernier cas, on peut prendre $p = 1$).

ii) Soit V le noyau de $D : \mathcal{A}^m \to \mathcal{A}^m[x^{-1}]$; on pose de même $V^{<0} = V \cap (\mathcal{A}^{<0})^m$, $V^{\leq -k} = V \cap (\mathcal{A}^{\leq -k})^m$ $(k > 0)$; ces derniers espaces sont respectivement les noyaux de l'action de D sur $(\mathcal{A}^{<0})^m$ et sur $(\mathcal{A}^{\leq -k})^n$; rappelons que ces actions sont *surjectives* ("théorème des développements asymptotiques" le premier énoncé est dû à Hukuhara-Turrittin; le second est un cas particulier simple de résultats de Ramis-Sibuya). Soit en particulier $\widehat{F} \in \mathbb{C}[\![x]\!]^m$ vérifiant $D\widehat{F} = 0$; pour tout $\theta \in S$, il existe (Borel-Ritt) un $F' \in \mathcal{A}_\theta^m$ de série de Taylor en 0 TF' égale à $\widehat{F}$; on a $DF' \in (\mathcal{A}_\theta^{<0})^m$, donc il existe $G \in (\mathcal{A}_\theta^{<0})^m$ tel qu'on ait $DF' = DG$; alors $F = F' - G$ est un prolongement de $\widehat{F}$ à $\mathcal{A}_\theta^m$ qui vérifie $DF = 0$.

iii) Appliquons ce qui précède à la situation considérée en i); posant $D' = \frac{d}{dx} - N$, la relation $D' = \widehat{S}^{-1} D \widehat{S}$ s'écrit $\frac{d\widehat{S}}{dx} = M\widehat{S} - \widehat{S}N$; donc, pour tout $\theta \in S$, $\widehat{S}$ peut être représenté par un $S \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{A}_\theta)$ qui vérifie la même équation.

Désignons en particulier par V', $V'^{<0}$, *etc.* , les espaces analogues à V, $V^{<0}$ *etc.* , avec D remplacé par D'; l'application $F \to SF$ est un isomorphisme $V_\theta^{<0} \xrightarrow{\sim} V_\theta'^{<0}$ et $V_\theta^{\leq -k} \xrightarrow{\sim} V_\theta'^{\leq -k}$ $(k > 0)$; la structure des $V_\theta^{\leq -k}$ se déduit donc de celle des $V_\theta'^{\leq -k}$; cette dernière résulte immédiatement de la forme de D'; pour que cet espace contienne une composante en $e^p \times$ (croissance modérée), il faut et il suffit qu'on ait, en posant $\ell = d^\circ p$

$$\begin{cases} \text{a)} & \ell \geq k \\ \text{b)} & \mathrm{Re}\, a_\ell e^{-i\theta\ell} < 0 \,. \end{cases}$$

Dans la suite, on appellera "direction de Stokes de p" les θ tels qu'on ait $\mathrm{Re}\, a_\ell e^{-i\theta\ell} = 0$; on appellera "direction de Stokes de D, de hauteur k_j"

les directions de Stokes des p qui interviennent dans D', et dont le degré ℓ est égal à k_j.

iv) Soit $F \in \mathbb{C}[\![x]\!]^m$ tel que DF converge, *i.e.* soit égal à $G \in \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]^m$ (on aurait pu partir plus généralement d'un $F \in \mathbb{C}[\![x]\!][x^{-1}]^m$, mais ce cas se ramène immédiatement au précédent en ôtant les termes polaires). En raisonnant comme ci-dessus, on trouve un recouvrement U_i de S et des $F_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A}^m)$ vérifiant $TF_i = \widehat{F}$, $DF_i = G$; dans $U_i \cap U_j$, on a $F_i - F_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, V^{<0})$; donc il existe ℓ tel qu'on ait, $\forall (i,j)$ $F_i - F_j \in (U_i \cap U_j, V^{\leq -k_\ell})$. Par conséquent, en appliquant (1.6), on trouve qu'on a $\widehat{F} \in \mathbb{C}[\![x]\!]^m_{s_\ell}$, avec $s_\ell = 1/k_\ell$ [Ra1]; de plus ce résultat est précis (même référence); supposons en effet qu'on ait $\widehat{F} \in \mathbb{C}[\![x]\!]^m_s$, et posons $s = 1/t$; si $k_\ell < k < k_{\ell+1}$, en utilisant (1.4) au lieu de Borel-Ritt et Ramis-Sibuya au lieu de Hukuhara-Turrittin, on trouve une représentation de $\widehat{F}$ par des F_i telle qu'on ait $F_j - F_i \in \Gamma(U_i \cap U_j, V^{\leq -k})$; mais, comme $V^{\leq -k} = V^{\leq -k_{\ell+1}}$, on trouve qu'on a $\widehat{F} \in \mathbb{C}[\![x]\!]^m_{s_{\ell+1}}$. De même, si $k > k_n$, on a $V^{\leq -k} = 0$, donc $F_j - F_i = 0$, et F converge.

Nous pouvons maintenant en venir à la multisommabilité. Restons dans la situation précédente, et supposons que s_ℓ est la meilleure valeur pour laquelle on a $F \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{s_\ell}$. Soient $I_\ell \supset \cdots \supset I_n$ des intervalles fermés emboités de S, de longueur respective $\dfrac{\pi}{k_\ell}, \ldots, \dfrac{\pi}{k_n}$; *on suppose que les extrémités de I_j $(j = \ell, \ldots, n)$ ne sont pas des directions de Stokes de D de hauteur k_j*. Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant :

4.1. THÉORÈME. — *$\widehat{F}$ est $(k_\ell, \ldots, k_n)$-sommable sur $(I_\ell, \ldots, I_n)$. Plus précisément, on a une décomposition $\widehat{F} = \widehat{F}_\ell + \cdots \widehat{F}_n$ avec $\widehat{F}_j$ k_j-sommable sur I_j les $D\widehat{F}_j$ étant convergentes $(j = \ell, \ldots, n)$.*

Quoique ce ne soit pas indispensable nous commencerons pour la clarté de l'exposé par prouver la première assertion; par récurrence sur j $(j = \ell, \ldots, n)$, il suffit de prouver le résultat suivant :

4.2. *Soit $F \in \Gamma(I_j, (\mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k_j})^m)$ vérifiant $DF = G$, avec G convergent; alors F se prolonge en $F' \in \Gamma(I_j, (\mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k_{j+1}})^m)$ vérifiant $DF' = G$ (pour $j = n$, on convient que $\mathcal{A}^{\leq -k_{j+1}} = 0$).*

En utilisant Ramis-Sibuya, on trouve un recouvrement ouvert $\{U_p\}$ de I_j et des $F'_p \in \Gamma(U_p, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k_{j+1}})$ qui prolongent F et vérifient $DF'_p = G$; sur $U_p \cap U_q$, on a $D(F'_q - F'_q) = 0$, donc $F'_p - F'_q \in \Gamma(U_p \cap U_q, V^{\leq -k_j}/V^{\leq -k_{j+1}})$; le résultat est donc conséquence du lemme purement combinatoire (ou "géométrique") suivant :

4.3. LEMME. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$H^1(I_j, V^{\leq -k_j}/V^{\leq -k_{j+1}}) = 0 \, .$$

Ce lemme est évident pour V remplacé par V': en effet $V'^{\leq -k_j}/V'^{\leq -k_{j+1}}$ est somme directe de faisceaux $i_!\mathbf{C}_J$, J un intervalle ouvert de S de longueur $\frac{\pi}{k_j}$, d'extrémités des directions de Stokes, $i_!$ désignant le prolongement par 0. Tout revient donc à montrer que, si I est fermé de longueur $\frac{\pi}{k_j}$, et *distinct de* $\bar{J}$, on a $H^1(I, i_!\mathbf{C}_J) = 0$, ce qui est évident.

Pour voir que le même raisonnement s'applique à V, on utilise le fait qu'on a un isomorphisme $V^{\leq -k_j}/V^{\leq -k_{j+1}} \sim V'^{\leq -k_j}/V'^{\leq -k_{j+1}}$ (*cf.* [Ma2], théorème (VIII.2.2); d'une façon imagée, "le phénomène de Stokes disparaît" lorsqu'on se restreint à $V^{\leq -k_j}/V^{\leq -k_{j+1}}$); d'où le lemme.

Montrons que le même lemme permet d'établir aussi la propriété de décomposition annoncée; il faut ici raisonner de façon un peu plus sophistiquée et s'appuyer sur les faits suivants :

4.4. *On a un isomorphisme* $H^1(S, \mathcal{A}^{\leq -k}) \simeq \mathbf{C}[\![x]\!]_s/\mathbf{C}\{x\}$ $(k > 0,$ $s = 1/k)$.

Ceci se voit en utilisant la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to H^0(S,\mathcal{A}^{\leq -k}) & \to & H^0(S,\mathcal{A}) & \to & H^0(S,\mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k}) & \to & H^1(S,\mathcal{A}^{\leq -k}) & \to & H^1(S,\mathcal{A}) \\
\| & & \| & & \| & & & \searrow \quad \nearrow & \\
0 & & \mathbf{C}\{x\} & & \mathbf{C}[\![x]\!]_s & & & 0 &
\end{array}$$

[Le second isomorphisme est l'énoncé (1.8); la dernière flèche horizontale est nulle par (1.7)].

4.5. *Soit* $I \subset S$*, fermé, de longueur* $\frac{\pi}{k}$. *On a un isomorphisme*

$$\{\hat{f} \in \mathbf{C}[\![x]\!]_s,\ k-\text{sommable sur } I\}/\mathbf{C}\{x\} \simeq H^1_c(S - I, \mathcal{A}^{\leq -k})$$

["*c*" signifie comme d'habitude "à support compact"]

En effet, soit $\hat{f} \in \mathbf{C}[\![x]\!]_s$ et soit $f = T_s^{-1}\hat{f} \in H^0(S, \mathcal{A}/\mathcal{A}^{\leq -k})$ et soit $\delta f \in H^1(S, \mathcal{A}^{\leq -k})$ l'élément qui lui correspond par 4.4. Pour que $\hat{f}$ soit

k-sommable sur I, il faut et il suffit qu'on ait $\delta f|I = 0$, ce qui signifie précisément que δf provient d'un élément unique de $H^1_c(S - I, \mathcal{A}^{\leq -k})$, en vertu de la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(I,\mathcal{A}^{\leq -k}) & \to & H^1_c(S-I,\mathcal{A}^{\leq -k}) & \to & H^1(S,\mathcal{A}^{\leq -k}) & \to & H^1(I,\mathcal{A}^{\leq -k}) & \to & H^2_c(S-I,\mathcal{A}^{\leq -k}) \\ \| & & & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{array}$$

[Le premier élément est nul par le lemme de Watson, *cf.* (1.4); le dernier est nul pour des raisons de dimension].

4.6. *Les isomorphismes précédents se restreignent de la manière suivante*

a) $H^1(S, V^{\leq -k}) = \ker(D, \mathbb{C}[\![x]\!]^m_s / \mathbb{C}\{x\}^m)$

b) $\{\widehat{F} \in \mathbb{C}[\![x]\!]^m_s$, *$k$-sommables sur I, et tels que $D\widehat{F}$ converge*$\}$ $/\mathbb{C}\{x\}^m \simeq H^1_c(S - I, V^{\leq -k})$.

On obtient ces résultats en utilisant les précédents et le théorème de Ramis-Sibuya (nous laissons les détails au lecteur).

Prenons alors $\widehat{F}$ comme dans 4.1 et soit $\varphi(\widehat{F})$ l'élément de $H^1(S, V^{\leq -k_\ell})$ qui lui correspond par 4.6.a; soit $\overline{\varphi}(\widehat{F})$ la classe définie par $\varphi(\widehat{F})$ dans $H^1(S, V^{\leq -k_\ell}/V^{\leq -k_{\ell+1}})$; d'après 4.3, la restriction de $\overline{\varphi}(\widehat{F})$ à I_ℓ est nulle, donc $\overline{\varphi}(\widehat{F})$ provient d'un élément de $H^1_c(S - I_\ell, V^{\leq k_\ell}/V^{\leq -k_{\ell+1}})$; celui-ci se relève à son tour en un élément de $H^1_c(S - I_\ell, V^{\leq -k_\ell})$ que nous noterons $\varphi_\ell(\widehat{F})$ (utiliser la suite exacte de cohomologie, et le fait que $H^2_c(\cdot,\cdot) = 0$); soit $\widehat{F}_\ell$ un élément de $\mathbb{C}[\![x]\!]^m_{s_\ell}$ qui lui correspond par 4.6.b; il est k_ℓ-sommable sur I_ℓ, vérifie "$D\widehat{F}_\ell$ convergent" , et on vérifie immédiatement que $\overline{\varphi}(\widehat{F}_\ell) = \overline{\varphi}(\widehat{F})$; donc on a $\varphi(\widehat{F} - \widehat{F}_\ell) \in H^1(S, V^{\leq -k_{\ell+1}})$ et par conséquent $\widehat{F} - \widehat{F}_\ell \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{s_{\ell+1}}$. D'où par récurrence, le résultat.

A titre d'exercice instructif, nous suggérons au lecteur de traduire les raisonnements et les résultats précédents dans le langage "$(\Delta, \widetilde{\mathcal{A}})$" introduit au §2.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba1] W. BALSER, A different characterization of multisummable power series, preprint Universität Ulm (1990).

[Ba2] W. BALSER, Summation of formal power series through iterated Laplace transform, Universität Ulm, preliminary version (1991).

[BBRS] W. BALSER B.L.J. BRAAKSMA, J.-P. RAMIS and Y. SIBUYA, Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary differential equations, preprint Institute for Mathematics and its applications, University of Minnesota, Minneapolis, IMA 717 (1990), to appear in Asymptotic Analysis.

[Bo] E. BOREL, Leçons sur les séries divergentes, Deuxième édition (1928), Gauthier-Villars, Paris.

[Br1] B.L.J. BRAAKSMA, Multisummability and Stokes multipliers of linear meromorphic differential equations, J. of Diff. Equations, 92-1 (1991), 45–75.

[Br2] B.L.J. BRAAKSMA, Multisummability of formal power series solutions of non linear meromorphic differential equations, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier, 42-3 (1992).

[De] P. DELIGNE, Lettre à J.P. Ramis (1986).

[E1] J. ECALLE, L'accélération des fonctions résurgentes, manuscrit (1987).

[E2] J. ECALLE, Introduction à l'accélération et à ses applications, livre à paraître, Travaux en cours, Hermann (1991).

[Ju] W. JURKAT, Summability of asymptotic series, preprint Universität Ulm (1990).

[Ma1] B. MALGRANGE, Equations différentielles linéaires et transformation de Fourier : une introduction, Ensaios Matemáticos 1, Soc. Bras. Math., (1989).

[Ma2] B. MALGRANGE, Equations différentielles à coefficients polynomiaux, Progress in Math., Birkhäuser (1991).

[Mar] J. MARTINET, Introduction à la théorie de Cauchy Sauvage, Manuscrit inachevé, dans les derniers travaux de Jean Martinet, ce colloque.

[MR1] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Théorie de Galois différentielle et resommation, Computer algebra and differential equations (E. Tournier ed.), Academic Press (1989), 117–214.

[MR2] J. MARTINET, J.P. RAMIS, Elementary acceleration and multisummability, preprint I.R.M.A. Strasbourg, 428/P-241 (1990), Annales de l'I.H.P., Physique Théorique, 54-1 (1991), 1–71.

[Ne] F. NEVANLINNA, Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, From XII (1919), 1–81.

[Ra1] J.-P. RAMIS, Dévissage Gevrey, Astérisque, 59–60 (1978), 173–204.

[Ra2] J.-P. RAMIS, Les séries k-sommables et leurs applications, Analysis, Microlocal Calculus and Relativistic Quantum Theory, Proceedings "Les Houches" 1979, Springer Lecture Notes in Physics, 126 (1980), 178–199.

[RS] J.-P. RAMIS, Y. SIBUYA, Hukukara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, Asympt. Anal., 2 (1989), 39–94.

[Si1] Y. SIBUYA, A theorem concerning uniform simplification at a transition point and the problem of resonance, SIAM J. Math. Anal., 12 (1981), 663–668.

[Si2] Y. SIBUYA, Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 82, A.M.S., (1990).

[Tou] J.C. TOUGERON, Sur les ensembles analytiques-réels définis par des équations Gevrey au bord, manuscrit, Rennes (1990).

[Was] W. WASOW, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Intersc. Publ., 1965.

[Wat] G.N. WATSON, A theory of asymptotic series, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, ser. A, vol. 211 (1911), 279–313.

B. MALGRANGE,
Institut Fourier
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex (France)

J.-P. RAMIS,
I.R.M.A.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex (France).