Annales de l'institut Fourier

Paul A. Schweitzer S.J.

Claude Godbillon : l'homme et son travail mathématiques. Discours prononcé à l'ouverture du colloque par Paul A. Schweitzer, S. J.

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 1-2 (1992), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42, 1-2 (1992), 1-10

CLAUDE GODBILLON : L'HOMME ET SON TRAVAIL MATHEMATIQUE

Discours prononcé par Paul A. SCHWEITZER, S.J.
à l'ouverture du Colloque.

---

1. L'invariant Godbillon-Vey.

C'est un grand honneur pour moi d'ouvrir ce Colloque de Géométrie en mémoire de Claude Godbillon et Jean Martinet en parlant sur le travail et l'œuvre de Claude Godbillon. C'est aussi un grand plaisir pour moi, quoique teinté d'amertume, parce que je comptais Claude parmi mes amis les plus chers.

Je suis bien conscient qu'il y a ici dans cette salle d'autres mathématiciens qui seraient mieux placés pour apprécier l'oeuvre de Claude Godbillon. Je voudrais commencer par quelques mots de l'un d'entre eux, celui qui a inspiré Godbillon tout au début de sa carrière, et qui m'a d'ailleurs beaucoup aidé dans la préparation de ce texte. Vous avez deviné que c'est Georges Reeb.

Ecoutons donc l'histoire racontée par M. Reeb dans la Préface au premier volume du livre de Godbillon, *Feuilletages—Etudes géométriques* [26] :

"Jacques Vey en visite prolongée à Strasbourg. Soudain Claude Godbillon et Jacques Vey s'engouffrent dans mon bureau; le tableau se couvre comme spontanément de trois formules :

$$\omega \wedge d\omega = 0 \Rightarrow d\omega = \omega_1 \wedge \omega \Rightarrow d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega$$

$$\Omega_\omega = \omega \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \qquad d\Omega_\omega = 0$$

Si $\omega' = f\omega$ alors $\Omega_{\omega'}$ homologue à Ω_ω.

Les ingrédients ω_1, ω_2 m'étaient familiers. L'invariant Godbillon-Vey venait de naître. On sait quelle a été sa carrière."

Bientôt l'invariant de Godbillon-Vey devient célèbre et attire le travail et l'intérêt de beaucoup de mathématiciens. Roussarie donne son exemple basé sur $Sl(2, R)$ qui montre que la classe caractéristique n'est pas nulle. Bernstein et Rozenfeld, Bott et Haefliger, Malgrange l'insèrent dans une famille de classes caractéristiques, correspondantes à la cohomologie de Gelfand-Fuchs. Thurston montre que la classe assume un continuum de valeurs, et l'interprète comme une mesure de l'oscillation hélicoïdale ('helical wobble'). Sullivan offre une autre interprétation liée au nombre d'enlacement.

Déjà en 1982, pour le cas de la codimension un, Gérard Duminy couronne une série de travaux de plusieurs auteurs en montrant que l'invariant se concentre dans les 'feuilles ressort', celles qui s'approchent d'elles-mêmes par l'holonomie le long d'un lacet. Beaucoup d'autres mathématiciens font des contributions, trop nombreuses à citer.

La relation de l'invariant de Godbillon-Vey avec la cohomologie de Gelfand-Fuchs est importante; ceci est bien traité par Godbillon dans son exposé au Séminaire Bourbaki de novembre 1972 [22]. Déjà dans la célèbre note aux Comptes Rendus [17] la relation est brièvement expliquée en codimension un.

Pour les reférénces des travaux cités et l'histoire plus récente, on peut consulter l'exposé excellent d'Etienne Ghys au Séminaire Bourbaki [G], où l'on constate que la découverte de Godbillon et Vey continue à produire des bons fruits. En arrivant à l'âge de vingt-et-un ans, l'invariant de Godbillon-Vey est toujours dynamique et vivant!

2. La thèse d'état : la propriété du prolongement des homotopies.

Remontons au début de la carrière de Godbillon. Sa thèse d'état, *Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies* [9], publiée dans [4], [5] et une série de Notes au Comptes Rendus [1], [2], [3], [6], [7], [8], a été soutenue en novembre de 1967 à Strasbourg. Suivant une suggestion de Reeb, la thèse introduit et étudie à fond la propriété du prolongement des homotopies, une généralisation de la propriété du relèvement des homotopies dans les fibrés. Une relation d'équivalence $\sim$ dans un espace topologique X a la *propriété du prolongement des homotopies* si étant donnés deux simplexes singuliers

$$f, g\colon \Delta^q \to X \quad \text{tels que } \forall z \in \Delta^q \ f(z) \sim g(z)$$

et une homotopie $F\colon \Delta^q \times I \to X$ qui commence avec f, il existe toujours une deuxième homotopie $G\colon \Delta^q \times I \to X$ compatible avec F dans le sens que $F(z,t) \sim G(z,t)$ pour tout paire $(z,t) \in \Delta^q \times I$. On peut considérer, par exemple, le cas où la relation d'équivalence est donnée par un feuilletage, chaque feuille étant une classe d'équivalence. Ces feuilletages sont un peu rares; en effet, un tel feuilletage est sans holonomie [8] et toutes les feuilles ont le même type d'homotopie. Mais Gilbert Hector m'a signalé un cas intéressant. Un feuilletage pour lequel toutes les feuilles sont courbes géodésiques non fermées a cette propriété. Il y a beaucoup d'autres exemples liés aux actions de groupes de Lie, et Godbillon donne plusieurs autres exemples encore de tels feuilletages [2], [8].

Un autre exemple de relation d'équivalence ayant cette propriété se situe dans la catégorie des espaces difféologiques de Souriau, qu'il a expliqués dans le Colloque Cartan [S]. Dans cette catégorie, un fibré est exactement la projection sur l'espace quotient d'une relation ayant la propriété du prolongement des homotopies [I].

Une des conséquences les plus importantes de la propriété du prolongement des homotopies est le fait suivant :

THÉORÈME. — *Une relation d'équivalence qui a la propriété du prolongement des homotopies admet une suite spectrale de Leray-Serre pour la projection sur son quotient.*

Avant de terminer les résultats de la thèse, je voudrais mentionner un autre théorème – un petit divertissement. Je me rappelle que vers 1970 aux Etats-Unis j'avais entendu parler de ce théorème et je ne savais pas qui en était l'auteur. Ce n'était que plus tard que j'ai su que Godbillon était un des deux mathématiciens qui ont démontré ce résultat :

THÉORÈME ([MCC], [6]). — *Tout complexe simplicial fini a le type d'homotopie faible d'un espace fini.*

C'est-à-dire, chaque complexe simplicial fini admet une application sur un espace (non séparé) à un nombre fini de points, qui induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie. Cela semble très surprenant. C'est quelque chose qu'on racontait dans les salles de thé pour épater les amis. Mais ce théorème devient assez évident quand on considère la relation d'équivalence, deux points sont équivalents s'ils sont dans le même simplexe ouvert. Cette relation d'équivalence a la propriété du prolongement des homotopies, et le théorème résulte facilement du théorème antérieur.

3. Les livres de Godbillon.

Les livres de Godbillon sont une contribution importante pour la communauté mathématique. Je me rappelle bien quand Claude m'a montré son livre *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique* [14], que je venais de découvrir. Il l'a ouvert, et tout en couvrant le fond de la page, il m'a laissé lire *l'Avertissement* :

"On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demande ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme."

Puis, en regardant pour voir ma réaction, avec son sourire typique à peine tracé sur la figure, il a retiré sa main et j'ai lu en bas,

"J.L. Lagrange, *Mécanique Analytique*, 1811".

Godbillon était très content de cette blague. Comme le livre célèbre de Lagrange, celui de Godbillon n'a pas de figures, sauf quelques diagrammes commutatifs. Il commence avec les structures algébriques de l'algèbre extérieur, il développe le calcul et les formes différentielles, il arrive aux formulations hamiltonienne et lagrangienne de la mécanique. Après le Théorème de Darboux des modèles locaux des formes de Pfaff de classe constante, il considère la géométrie symplectique et les structures de contact. Enfin il expose la transformation de Legendre qui permet de passer des équations de Lagrange à celles de Hamilton.

Dans l'ensemble il y a une structure quasi obligatoire, parfaite et complète, comme d'une belle symphonie - pas seulement un petit divertimento - ou peut-être comme un des beaux cristaux que Claude aimait collectionner. Dans mon exemplaire Claude a écrit une inscription: "A Paul, pour qu'il découvre, avec Lagrange, les joies de la mécanique." Vraiment, chaque fois que je reviens à ce livre, je découvre de nouvelles joies et beautés. Je suis sûr que c'est pareil pour bien d'autres mathématiciens, en France et partout, auxquels ce livre de Godbillon a révélé ces belles théories.

Godbillon écrivait la mathématique d'un style austère et dépouillé de détails et de mots superflus. A première vue on pourrait se tromper en pensant que ce n'était que des théories abstraites et formelles, sans exemples ni applications intéressants. Vu de plus près, on perçoit clairement le génie du géomètre d'un talent et d'une culture mathématiques extraordinaires. Il savait bien d'où venaient les idées et où elles menaient. On peut se plaindre, quand même, qu'il n'ait pas donné aux lecteurs des jalons plus clairs pour les origines et les conséquences des théories. Le cristal est si beau, si parfait, qu'il semble être figé dans le temps, sans passé ni avenir.

Deux livres-textes écrits par Godbillon, *Eléments de Topologie Algébrique* et *Systèmes Dynamiques sur les Surfaces*, sont pleins d'exemples et d'applications. Celui-là a la vertu de présenter la cohomologie au moyen des formes différentielles, c'est-à-dire, la cohomologie de de Rham, ce qui lui permet d'arriver plus vite à des résultats importants. Celui-ci est une présentation belle et très élémentaire - accessible à mon avis à de bons étudiants de deuxième cycle, mais aussi assez complète - de la théorie riche des surfaces et de la dynamique bi-dimensionnelle.

Heureusement la deuxième édition du quatrième et dernier livre de Godbillon, *Feuilletages—Etudes Géométriques*, vient d'être publiée dans un volume unique à l'occasion de ce Colloque [26]. Nous le devons à Marie-Paule Muller, qui a revu le texte qui n'était frappé qu'en partie, à M. R. Séroul qui a récupéré des archives d'ordinateur, et aux secrétaires qui ont complété la frappe. C'est un traité qui développe une bonne partie de la théorie des feuilletages, en renvoyant le lecteur aux reférences pour beaucoup de résultats qui ne sont que cités au passage. La bibliographie compréhensive est un grand service, une reférence standard. C'est néanmoins dommage que Claude n'ait eu le temps ni pour compléter la révision, ni pour écrire le sixième chapitre, projeté dans le premier volume, sur la construction des feuilletages.

4. De retour aux classes caractéristiques des feuilletages.

Revenons à l'invariant de Godbillon–Vey, parce que Godbillon lui-même est revenu à ce sujet dans les dernières années. Il y a deux ans, quand ici à Strasbourg je lui ai parlé de mes efforts, toujours sans succès, de mieux comprendre le problème de l'indépendance des éléments de la cohomologie de Gelfand-Fuchs, considérés dans leur rôle de classes caractéristiques des feuilletages, il m'a montré quelques pages qu'il avait écrites sur ces classes caractéristiques. Je crois que ces feuilles étaient le petit début de son dernier article, "Une construction nouvelle des classes caractéristiques des feuilletages," publié après sa mort aux *Annales de l'Institut Fourier* [27]. Il ne le considérait pas vraiment définitif, mais heureusement il l'avait envoyé à plusieurs collègues pour avoir leurs réactions, et c'est ainsi qu'il a pu être publié. Comme toute œuvre de Godbillon, il est très bien écrit, de telle manière qu'en le lisant, on le penserait définitif, si ce n'est qu'il s'arrête à mi-chemin sans aborder quelques questions naturelles.

Il considère un feuilletage différentiable $\mathcal{F}$ de codimension q à fibré normal trivialisé, donc défini globalement en intégrant q 1-formes linéairement indépendantes, $\omega_1, \ldots, \omega_q$, qu'on suppose fixes. La première Proposition donne leurs différentielles :

$$d\omega_k = \sum_{i=1}^{q} \omega_i \wedge \theta_{ik},$$

$$\theta_{ik} = \mathcal{L}_{X_i}\omega_k + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{q} \omega_k([X_i, X_j])\omega_j$$

où les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_q$ satisfont les relations $\omega_i(X_i) = \delta_{ij}$.

En effet, les formes θ_{ik} sont les formes d'une connexion basique sur le fibré normal, de façon que les 2-formes $\Theta_{ik} = d\theta_{ik} - \sum_{j=1}^{q} \theta_{ij}\wedge\theta_{jk}$ sont les formes de courbure correspondantes, toutes par rapport à la base donnée. Ainsi on obtient les classes caractéristiques de $\mathcal{F}$ par la construction usuelle. Godbillon introduit la plus petite sous-algèbre $C^* = C^*(\mathcal{F}, X_1, \ldots, X_q)$ du complexe de de Rham $A^*(M)$ de la variété feuilletée M telle que C^* contienne les formes ω_i et soit stable par les produits intérieurs i_{X_k} et les dérivations de Lie $\mathcal{L}_{X_k}$. Il montre que C^* est stable par la différentielle extérieure. Ensuite Godbillon donne une description explicite de l'algèbre et montre en adaptant un argument classique que sa cohomologie est de dimension finie. Mais ceci est dans le cadre de la variété. Ensuite il construit encore une autre algèbre différentielle graduée F_q, appelée de 'complexe caractéristique universelle'. C'est une construction assez compliquée, et je confesse que je ne l'ai pas complètement comprise. Et après ça il montre qu'il existe un épimorphisme canonique

$$F_q \to C^*(\mathcal{F}, X_1, \ldots, X_q).$$

On introduit une filtration décroissante assez naturelle en F_q, et la dernière Proposition affirme que le premier terme $E^1_{q,0} = F_{q,1}/F_{q,2}$ du complexe gradué associé est isomorphe au complexe de Gelfand-Fuchs des cochaînes continues sur l'algèbre de Lie a_q des champs de vecteurs formels à q variables.

Je crois qu'ici on voit pourquoi Godbillon ne considérait pas cet article comme définitif. La question se pose immédiatement : quelle est la relation entre la cohomologie de F_q et celle de Gelfand-Fuchs? Dans les cas $q = 1$ et $q = 2$ Godbillon montre que

$$H^*(F_q) \approx H^*(a_q).$$

Est-ce que ceci reste vrai en général, ou peut-être y a-t-il de nouvelles classes caractéristiques de feuilletages dans la cohomologie de F_q? Il reste aussi un autre travail à faire, celui d'adapter les résultats au cas de feuilletages à fibré normal non-trivial.

5. Le service professionnel du mathématicien et la cohérence de l'homme.

Maintenant je voudrais vous parler un peu de Claude Godbillon comme personne, de sa cohérence et de son engagement, qualités trop rares en nos temps, desquelles on n'aime pas beaucoup parler. Mais se taire serait injuste, ce serait mutiler la mémoire et ne pas donner toute la mesure de la grandeur de Claude.

Je me permets aussi de faire un commentaire personnel. Claude se disait franchement athée, convaincu et cohérent il l'était, je peux dire même athée pratiquant. Et moi j'essaie de vivre en chrétien, j'espère cohérent, et quand même nous étions de fort bons amis. C'est un paradoxe; comment peut-on l'expliquer?

Je crois que dans la mathématique on rencontre des jalons d'une solution. Parfois deux structures très différentes en apparence se montrent équivalentes à un niveau plus profond. Considérons le Théorème de l'Indice d'Atiyah-Singer; d'un côté on a quelque chose dans l'analyse et d'autre côté on a quelque chose dans la topologie, apparemment tout à fait différentes, mais enfin, en puisant plus profondémment, on découvre que c'est la même chose. Il y a aussi l'histoire célèbre de Poincaré, qui, en montant dans un autobus lors d'une promenade, a perçu l'équivalence entre les fonctions Fuchsiennes et les transformations de la géométrie non-euclidienne. Et moi je crois (c'est mon opinion, en tout cas) que nous avions au fond quelque chose de commun dans ce point où apparemment il y avait un choc total. Un concept qu'on fait de Dieu est bien loin de la réalité, quelle qu'elle soit. Il y a sans doute des raisons fortes de le rejeter. Les mots et les idées ne sont qu'un reflet incomplet de la réalité. Il y a aussi la réponse qu'on fait devant le mystère et les défis de la science et de la vie.

On a vu la cohérence et l'intégrité de cette réponse chez Claude dans sa responsabilité professionnelle, dans son honnêteté, dans son service à la communauté, tout avec une grande générosité. Il a servi en beaucoup de fonctions. Dominique Foata, Directeur du Département de Mathématique à l'Université Louis-Pasteur, a énuméré quelques postes que Claude Godbillon a exercés [F] :

"directeur de l'I.R.M.A. à l'âge de trente-cinq ans, directeur de notre U.E.R., président de la Société Mathématique de France, président du Comité Consultatif, président du Comité National Français des mathématiciens, vice-président de l'Université Louis-Pasteur, conseiller du ministre de l'Education Nationale pour les mathématiques." [F]

Jean-Pierre Bourguignon, actuel président de la Société Mathématique de France, a donné un bilan plus complet du service professionnel de Godbillon dans la plaquette distribuée au Colloque de Géométrie [B].

Cette liste, même partielle, n'est que le cadre extérieur de son travail. Il faut y ajouter la personne, son dévouement quotidien, le respect pour les personnes et leurs convictions, le service caché et quasiment secret, tout fait avec une modestie peu commune.

Il était un mathématicien d'une culture très ample, d'une compréhension rapide, d'une vue globale, comme la vue des sommets des Vosges, où il aimait se promener avec sa chère Christiane et son ami Jean Martinet. Enfin, c'est un ami, une personne de grande valeur. Nous, qui l'avons connu, nous reconnaissons comme nos vies ont été enrichies par sa présence entre nous.

BIBLIOGRAPHIE DES OEUVRES DE CLAUDE GODBILLON

[1] Topologie fine et ensemble semi-simpicial associés à une relation d'équivalence, C.R. Acad. Sci. Paris, 262 (1966), A817-A818.

[2] Relations d'équivalence et prolongement des homotopies, C.R. Acad. Sci. Paris, 262 (1966), A856-A858.

[3] Généralisation d'un théorème sur les fibrés en sphères, C.R. Acad. Sci. Paris, 262 (1966), A1152-A1153.

[4] Fibrés sur le branchement simple (avec G. Reeb), L'Enseignement Mathématique, 12 (1996), 277-287.

[5] Feuilletages ayant la propriété du prolongement de homotopies, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 2 (1967), 219-260.

[6] Fibration de Serre associée à une triangulation, C.R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967), A176-A178.

[7] Cohomologie à l'infini des espaces localement compacts. Applications, C.R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967), A394-A396.

[8] Holonomie transversale, C.R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967), A1050-A1052.

[9] Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies, Thèse d'état, Strasbourg, novembre de 1967.

[10] Formalisme lagrangien, Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick, 1968-69, pp. 9-11.

[11] The principle of Maupertuis, Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick, 1968-69,pp. 91-94.

[12] Foliations of the plane, Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, Warwick, 1968-69, pp. 104-105.

[13] Travaux de D. Anosov et S. Smale sur les difféomorphismes, Séminaire Bourbaki, 21e année, 1968-69, Exposé no. 348.

[14] Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique, Paris, Herman, 1969.

[15] Transformation de Legendre, Colloque de Topologie Différentielle (Mont-Aigoual, 1969), Université de Montpellier, 1969, pp. 1-7.

[16] Problèmes d'existence et d'homotopie dans les feuilletages, Séminaire Bourbaki, 23e année, 1970-71, Exposé no. 390, Springer Lect. Notes in Math., 244.

[17] Un invariant des feuilletages de codimension un (avec Jacques Vey), C.R. Acad. Sci. Paris, 273 (1971), A92-A95.

[18] Eléments de Topologie Algébrique, Hermann, Paris, 1971.

[19] Fibrés en droites et feuilletages du plan, L'Enseignement Mathématique, 18 (1972), 213-224.

[20] Feuilletages de Lie, Géométrie Différentielle : Colloque Universidad de Santiago de Compostela, 1972, Springer Lect. Notes in Math., 392.

[21] Invariants of foliations, Global Analysis and Its Applications, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 1972, vol. II, 215-219.

[22] Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, Sé minaire Bourbaki, 25e. année, 1972-73, Exposé no. 421, Springer Lect. Notes in Math., 383 (1974), 69-87.

[23] Systèmes Dynamiques sur les Surfaces, Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, 66/C-06, Strasbourg, 1979.

[24] Variation, Calcul de, Encyclopedia Universalis.

[25] Dynamical Systems on Surfaces (traduit de français par H.G. Helfenstein), Berlin, Springer-Verlag, 1983.

[26] Feuilletages : Etudes Géométriques, I,II, Publications de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1985, 1986; 2^{e}é dition, Birkhäuser, 1991.

[27] Une construction nouvelle des classes caractéristiques des feuilletages, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 40–1 (1990), 709-721.

AUTRES REFERENCES

[B] J.P. BOURGUIGNON, Claude Godbillon, discours prononcé lors de l'hommage rendu le 16 juin 1990 par l'Université Louis-Pasteur, Gazette des Mathématiciens, n°46 (1190).

[F] D. FOATA, Hommage à Claude Godbillon, allocution prononcée le 16 juin 1990, lors de l'inhumation de Claude Godbillon au cimetière d'Écueil.

[G] E. GHYS, L'Invariant de Godbillon-Vey, Séminaire Bourbaki, exposé 706 (mars 1989), Astérisque, 177-178 (1989), 155-181.

[I] P. IGLESIAS, Fibrés difféologiques et homotopie, thèse, Univ. de Provence, Marseille, 1985.

[McC] M. MCCORD, Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces, Duke Math. J., 33 (1966), 465-474.

[S] J.-M. SOURIAU, Un algorithme générateur de structures quantiques, dans *Elie Cartan et les Mathématiques d'Aujourd'hui*, Astérisque, numero hors série (1985), 341-399.

Paul A. SCHWEITZER S.J.,
Depto de Matemática
Pontificia Universidade Católica
do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
22453 Rio de Janeiro RJ (Brésil).