ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YANICK HEURTEAUX

Solutions positives et mesure harmonique pour des opérateurs paraboliques dans des ouverts «lipschitziens»

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 3 (1991), p. 601-649

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_3_601_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 3 (1991), 601-649

SOLUTIONS POSITIVES ET MESURE HARMONIQUE POUR DES OPERATEURS PARABOLIQUES DANS DES OUVERTS "LIPSCHITZIENS"

par Yanick HEURTEAUX

INTRODUCTION

Le but initial de ce travail est d'étendre à une classe d'opérateurs paraboliques le théorème de J.T. Kemper ([22]) sur la frontière de Martin (relativement à l'opérateur de la chaleur) de domaines "lipschitziens". La démarche de ce dernier utilise de façon essentielle l'invariance par translations de l'opérateur de la chaleur. E.B. Fabes, N. Garofalo et S. Salsa ([12]) ont déjà travaillé dans cette direction. Ils ont obtenu un résultat positif pour une classe d'opérateurs paraboliques sur $\mathbf{R}^{n+1}$ s'écrivant sous forme divergence et à coefficients mesurables. Cependant, ils ne peuvent conclure que lorsque les coefficients de l'opérateur sont indépendants du temps et lorsque le domaine est un cylindre $\Omega\times]T,S[$ de $\mathbf{R}^{n+1}$. L'idée de la méthode développée ici est de décrire divers principes de Harnack au bord pour les solutions positives des opérateurs considérés. A. Ancona ([1],[2] et [3]) a montré dans le cadre elliptique combien cet outil était utile. Nous parviendrons à décrire ces principes pour une classe d'opérateurs s'écrivant sous forme divergence et à coefficients lipschitziens relativement à une métrique adaptée.

Mots-clés : Opérateur parabolique – Principe de Harnack-Moser – Mesure harmonique – Fonction de Green – Principe de Harnack au bord – Minimale – Frontière de Martin.
Classification A.M.S. :. 35K10 – 31B25 – 31C05 – 31B10 – 31C35.

Dans un premier temps, nous établissons un "principe de Harnack faible au bord". Ce principe permet de comparer le comportement relatif de deux solutions positives s'annulant sur une partie lipschitzienne du bord. Le résultat est à rapprocher du théorème 1.6 de [12]. Cependant, dans notre situation, la fonction décrivant localement le bord de l'ouvert considéré peut dépendre du temps. Nous dénommons ce principe "principe de Harnack faible au bord" car, contrairement aux résultats démontrés par Ancona ([1]), il fait intervenir deux points de référence.

Nous cherchons alors à établir un deuxième principe appelé "principe de Harnack fort au bord"ne faisant plus intervenir qu'un seul point de référence (partie 3). Nous rencontrons de réelles difficulés pour y parvenir, l'origine de ces difficultés provenant essentiellement du caractère "orienté" des inégalités de Harnack. Nous sommes amenés à développer (partie 2) une inégalité de Harnack non naturelle pour certaines solutions positives particulières. On retrouve une démarche similaire dans [12].

Nous pouvons alors enfin généraliser les résultats de Kemper. C'est l'objet des parties 4, 5, 6. Nous décrivons tout d'abord la frontière de Martin des ouverts considérés. Nous en déduisons un théorème de représentation intégrale des solutions positives de certains ouverts. Enfin nous donnons une interprétation géométrique du théorème de Fatou abstrait ([28]). Nous démontrons l'existence de limites "non tangentielles" en presque tout point d'une partie lipschitzienne de la frontière (le presque partout étant relatif à la mesure harmonique).

Au cours d'une dernière partie, nous exploitons les outils développés (en particulier ceux de la partie 2) pour donner des estimations de la mesure harmonique. Nous précisons ainsi des travaux de R. Kaufman et J.M. Wu ([21] et [30]). Fixant un ouvert Ω, nous établissons l'équivalence entre la mesure harmonique, la mesure harmonique adjointe et la mesure de surface sur des portions du bord délimitées par le graphe d'une fonction lipschitzienne par rapport aux variables d'espace et de classe $C^{\epsilon+1/2}$ ($\epsilon > 0$) par rapport à la variable temporelle. Sous ces hypothèses, les résultats de la partie 2 nous permettent de montrer que la fonction de Green et la fonction de Green adjointe ont le même comportement au bord de notre ouvert. Nous obtenons ainsi l'équivalence entre la mesure harmonique et la mesure harmonique adjointe et contrôlons la norme infinie de la densité de l'une par rapport à l'autre. Ensuite, pour démontrer l'équivalence entre la mesure harmonique et la mesure de surface, nous approchons le graphe par des graphes plus réguliers sur lesquels on sait établir le résultat. Rappelons que

Robert Kaufman et Jang Mei Wu avaient démontré que ces trois mesures peuvent être deux à deux étrangères si on fait $\epsilon = 0$.

0. PRELIMINAIRES

Dans tout ce travail, on fixe un entier $n \geq 1$ et on introduit sur l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ la distance suivante qu'on appelle distance parabolique :

$$\forall (x,t)\ ,\ (y,s) \in \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \quad d((x,t),(y,s)) = \| x - y \| \vee | t - s |^{1/2}\ ,$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

Les n premières coordonnées d'un point (x,t) de $\mathbf{R}^{n+1}$ sont appelées les coordonnées d'espace et la dernière coordonnée de (x,t) est appelée la coordonnée temporelle. La distance parabolique est adaptée aux problèmes que nous allons rencontrer et, sauf précision contraire, c'est toujours à cette distance qu'on se réfèrera.

Si μ est un réel strictement supérieur à 1, on note $\Lambda(\mu)$ la classe des opérateurs paraboliques sur $\mathbf{R}^{n+1}$ s'écrivant :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div}(A \nabla_x)$$

où $A = (A_{ij}(x,t))_{ij}$ est une matrice $n \times n$ symétrique vérifiant les propriétés suivantes :

1) A est uniformément elliptique, c'est à dire :

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n \quad \frac{1}{\mu} \| \xi \|^2 \leq < A\xi \mid \xi > \leq \mu \| \xi \|^2 \ .$$

2) Les fonctions A_{ij} sont lipschitziennes relativement à la distance parabolique et vérifient :

$$\forall (x,t),(y,s) \in \mathbf{R}^{n+1} \quad | A_{ij}(x,t) - A_{ij}(y,s) | \leq \mu\ d((x,t),(y,s))\ .$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, on note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f continues sur Ω qui vérifient au sens faible $Lf = 0$. Une telle fonction est appelée une L-solution dans Ω. D'après des travaux de Moser ([25]), toute solution faible de l'équation dans Ω possède un représentant dans $\mathrm{H}(\Omega)$.

Une L-sursolution (ou fonction L-surharmonique) dans Ω est une fonction f localement integrable semi-continue inférieurement dans Ω vérifiant :

i) $Lf \geq 0$ au sens faible

ii) $\forall P \in \Omega$, $f(P) = \liminf_{\xi \to P} \operatorname{ess} f(\xi) = \lim_{\mathcal{V} \searrow \{P\}} \inf_{\xi \in \mathcal{V}} \operatorname{ess} f(\xi)$.

Une fonction f sur Ω est appelée une L-sous solution si $-f$ est une L-sursolution. Ainsi, toute fonction f qui est à la fois une L-sursolution et une L-sous solution dans Ω est une L-solution dans Ω.

Nous allons maintenant énoncer les deux résultats fondamentaux qui sont à la base de ce travail.

0.a. Principe de Harnack-Moser ([25]) .

THÉORÈME 0.1([25]). — *Soient $\mu > 1$, et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Soient P un point de $\mathbb{R}^{n+1}$, α, α', β, β_1, β_2, β_3 et r des réels vérifiant :*

$$0 < \alpha' < \alpha \ , \ r > 0 \text{ et } 0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta \ .$$

On note Ω l'ouvert $\Omega = P + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \| x \| < \alpha r \text{ et } 0 < t < \beta r^2\}$. On considère les parties de Ω suivantes :

$$\Omega^- = P + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \| x \| < \alpha' r \text{ et } \beta_1 r^2 < t < \beta_2 r^2\}$$
$$\text{et } \ \Omega^+ = P + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \| x \| < \alpha' r \text{ et } \beta_3 r^2 < t < \beta r^2\}.$$

Alors, il existe une constante $c = c(\alpha, \alpha', \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta)$ strictement positive telle que pour toute L-solution positive dans Ω on ait :

$$\operatorname*{Max}_{(x,t) \in \Omega^-} u(x,t) \leq c \operatorname*{Min}_{(x,t) \in \Omega^+} u(x,t) \ .$$

0.b. Estimations de la solution fondamentale ([5] & [10]) .

On connait l'existence d'une solution fondamentale Γ pour l'opérateur L. Elle est caractérisée par le fait que pour tout point P de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Gamma_P(\cdot)$ est l'unique L-sursolution définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ tendant vers zéro à l'infini et vérifiant au sens faible $L\Gamma_P = \delta_P$ où δ_P est la mesure de Dirac au point P. Par le principe du minimum, $\Gamma_P(M)$ est nécessairement nulle en tout point M dont la coordonnée temporelle est inférieure à celle de P. Elle vérifie les estimations suivantes (voir [5] et [10]) :

THÉORÈME 0.2. — *Soient $\mu > 1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Notons Γ la solution fondamentale pour l'opérateur L . Il existe une constante c strictement positive ne dépendant que de n et de μ telle que pour tous points (x,t) et (y,s) dans $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant $t > s$ on ait :*

$$\frac{\exp(-c \parallel x-y \parallel^2 /(t-s))}{c(t-s)^{n/2}} \leq \Gamma_{(y,s)}(x,t) \leq \frac{c\exp(- \parallel x-y \parallel^2 /c(t-s))}{(t-s)^{n/2}} .$$

Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^{n+1}$ et P un point de Ω. On appellera fonction de Green de pôle P dans Ω la fonction G_P dans Ω définie par :

$$G_P(M) = \Gamma_P(M) - \int_{\partial\Omega} \Gamma_P(\xi) d\mu_M(\xi) ,$$

où μ_M désigne la L-mesure harmonique dans Ω au point P. G_P est donc une L-sursolution dans Ω qui vérifie au sens faible $LG_P = \delta_P$ et qui converge vers zéro en tout point de régularité de $\partial_p\Omega$: c'est un L-potentiel de Ω. (Rappelons qu'on appelle frontière parabolique de Ω et qu'on note $\partial_p\Omega$ l'ensemble des points de $\partial\Omega$ adhérents à une courbe γ : $[0,1[\longrightarrow \Omega$ le long de laquelle la coordonnée temporelle décroit strictement : c'est la zone utile de la frontière).

On peut alors localiser les estimations de la solution fondamentale de la façon suivante :

COROLLAIRE 0.3. — *Soient $\mu > 1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Soient Q un point de $\mathbb{R}^{n+1}$ et R un réel strictement positif. On note Ω l'ouvert :*

$$\Omega = Q + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \parallel x \parallel < R \text{ et } \mid t \mid < R^2\} .$$

Notons G_P la fonction de Green de pôle P dans l'ouvert Ω . Il existe une constante $c = c(n,\mu)$ strictement positive telle que pour tout pôle P dans l'ensemble $Q + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \parallel x \parallel \leq R/2$ et $-R^2/2 \leq t \leq 0\}$ et pour tout point M dans l'ensemble $Q + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \parallel x \parallel \leq R/2$ et $R^2/4 \leq t \leq R^2/2\}$ on ait :

$$G_P(M) \geq \frac{c}{R^n} .$$

Démonstration. — Grâce au théorème 0.2, il existe une constante $c = c(n,\mu)$ strictement positive telle que :

$$\forall M \in \partial\Omega \ \Gamma_P(M) \leq c/R^n .$$

Ainsi, on a l'estimation $H^{\Omega}_{\Gamma_P}(M) = \int_{\partial\Omega} \Gamma_P(\xi) d\mu_M(\xi) \leq c/R^n$ partout. Fixons alors deux points $M = (x,t)$ et $P = (y,s)$ quelconques dans

l'ensemble Ω et tels que $t > s$. Il existe un constante c strictement positive ne dépendant pas des points M et P telle que :

$$G_P(M) = \Gamma_P(M) - H^{\Omega}_{\Gamma_P}(M) \geq \frac{\exp(-c \parallel x - y \parallel^2 /(t-s))}{c(t-s)^{n/2}} - c/R^n \ .$$

Considérons alors dans un premier temps $P = Q + (0, R^2/8)$ et $M = P + (0, \delta R^2)$ où δ est un réel vérifiant $0 < \delta < 1/8$. Si δ est choisi suffisamment petit, on obtient l'inégalité :

$$G_P(M) \geq \frac{c}{2R^n} \ .$$

Quitte à modifier la constante c, cette inégalité s'étend alors grâce au principe de Harnack-Moser à tout point M de l'ensemble :

$$Q + \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \ ; \ \parallel x \parallel \leq R/2 \text{ et } -R^2/2 \leq t \leq 0\} \ .$$

Elle s'étend aussi à tout point M de l'ensemble :

$$Q + \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \ ; \ \parallel x \parallel \leq R/2 \text{ et } R^2/4 \leq t \leq R^2/2\} \ ,$$

car à M fixé, la fonction $G.(M)$ est une L^*-solution et vérifie donc un principe de Harnack-Moser orienté dans l'autre sens (L^* est l'opérateur adjoint de L).

1. UN PRINCIPE DE HARNACK FAIBLE AU BORD

Au cours de cette première partie, on cherche à donner des estimations locales des L-solutions positives tendant vers zéro sur une partie lipschitzienne du bord d'un ouvert. On retrouve ainsi des estimations décrites par J.T. Kemper ([22]) dans le cadre de l'opérateur de la chaleur $\mathcal{C} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$. Le résultat obtenu est aussi à rapprocher d'une estimation de L. Carleson ([6]) écrite pour l'opérateur Δ. Citons aussi R.A. Hunt et R.L. Wheeden ([19] et [20]) qui ont décrit des inégalités similaires pour les fonctions harmoniques usuelles ainsi que J.C. Taylor qui a étendu ces inégalités aux solutions d'opérateurs elliptiques (voir aussi ([1])). On précise ensuite le comportement relatif de deux L-solutions positives nulles sur une partie lipschitzienne du bord d'un ouvert. Ce résultat ressemble au principe de Harnack au bord démontré par A. Ancona pour des opérateurs elliptiques ([1] théorème 5.1). Cependant, le principe que l'on démontrera fera intervenir deux points de référence. Une version parabolique de ce type d'inégalités a déjà été démontrée par Fabes, Garofalo et Salsa ([11] et[12]) .

1.a. Domaine lipschitzien canonique. Point frontiere lipschitzien d'un ouvert.

On utilisera les ensembles géométriques suivants :

• Cylindre $T_Q(r,h)$:
Un point de $\mathbf{R}^{n+1}$ est noté selon les besoins (x,t) ou (x',x_n,t) (x_n désignant la n-ième coordonnée d'espace du point (x,t)). On note $T_Q(r,h)$ le cylindre suivant :

$$T_Q(r,h) = Q + \{(x',x_n,t) \in \mathbf{R}^{n+1} \ ; \ \| x' \| < r \ , \ | t | < r^2 \ , \ | x_n | < h\} \ ,$$

où Q est un point de $\mathbf{R}^{n+1}$, r et h sont deux réels strictement positifs et $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{R}^{n-1}$.

• Domaine lipschitzien canonique :
Fixons $Q = (Y,S) = (Y',Y_n,S) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$.
Soit f une fonction numérique définie sur :

$$B((Y',S),r_0) = \{(x',t) \in \mathbf{R}^n \ ; \ \| x' - Y' \| \leq r_0 \ , \ | t - S | \leq r_0^2\}$$

et vérifiant la condition de Lipschitz :

$$\forall (x',t),(y',s) \in B((Y',S),r_0) \ \ | f(x',t) - f(y',s) | \leq K d((x',t),(y',s))$$

où K est une constante strictement positive. Notons qu'ici la distance utilisée est la distance parabolique décrite dans la partie préliminaire et que la fonction f est en fait une fonction lipschitzienne par rapport aux coordonnées d'espace et 1/2-höldérienne par rapport à la coordonnée temporelle.

Le domaine $\omega_f = \{(x,t) \in T_Q(r_0,h) \ ; \ x_n > f(x',t)\}$ est appelé domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(r_0,h)$ dès que les conditions $Y_n = f(Y',S)$ et $h > 5Kr_0$ sont vérifiées.
Si P est un point frontière de ω_f situé sur le graphe de f remarquons que l'ensemble $P + \{(x,t) \epsilon \mathbf{R}^{n+1} \ ; \ x_n < -K\|x'\| \vee | t |^{1/2}\}$ est une sorte de *cône parabolique* extérieur à l'ensemble ω_f. De même, on peut trouver $\ell > 0$ tel que le *tronc de cône parabolique* $P + \{(x,t) \epsilon \mathbf{R}^{n+1}; K\|x'\| \vee | t |^{1/2} < x_n < \ell\}$ soit intérieur à ω_f .

• Un domaine Ω est dit lipschitzien en $Q \in \partial\Omega$ si à une isométrie près des coordonnées d'espace et pour un certain couple (r_0,h_0) de réels strictement positifs $\Omega \cap T_Q(r_0,h_0)$ est un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(r_0,h_0)$.
Ainsi, au voisinage de Q , la frontière de Ω est le graphe d'une fonction lipschitzienne pour la *distance parabolique* d .

1.b. Une estimation "de type Carleson".

THÉORÈME 1.1. — *Soient $\mu > 1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et Q un point frontière de Ω tel que $\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté à $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu) > 0$ telle que pour toute L-solution positive u dans Ω tendant vers 0 en tout point de $\partial\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$, on ait :*

$$\forall M \in \Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0) \quad u(M) \leq cu(P_{r_0})$$

où $P_{r_0} = Q + (0, \lambda r_0, 2r_0^2)$.

Remarque. — Le point P_{r_0} peut être remplacé dans cette estimation par le point $Q + (0, \lambda r_0, (1+\alpha)r_0^2)$ où $0 < \alpha \leq 1$ la constante c dépendant alors aussi du réel α. Cependant, la constante α ne peut pas être prise égale à zéro en raison du caractère *orienté* des inégalités de Harnack : on exhibe des contre-exemples simples dans le cas d'un demi-espace $\{x_n > 0\}$.

Une estimation similaire avait été démontrée dans un cadre elliptique par L. Carleson ([6]) puis reprise ensuite à de nombreuses occasions ([19], [20], [1], [22] et [12])

COROLLAIRE 1.2. — *Soient $\mu > 1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que Ω est lipschitzien en $Q \in \partial\Omega$ et que $\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ est un domaine lipschitzien canonique adapté à $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Il existe $c = c(n, \lambda, \mu) > 0$ telle que pour toute L-solution positive u dans $\Omega - T_Q(r_0/2, \lambda r_0/2)$ tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - T_Q(r_0/2, \lambda r_0/2)$ on ait :*

$$\forall M \in \Omega - T_Q(r_0, \lambda r_0) \quad u(M) \leq cu(M_{r_0}) \text{ où } M_{r_0} = Q + (0, \lambda r_0, r_0^2) .$$

Remarque. — La démonstration du Théorème 1.1 et du Corollaire 1.2 ne font intervenir que des estimations de la fonction de Green. Ils sont donc encore valables lorsque les coefficients de l'opérateur L sont seulement supposés mesurables.

Montrons tout d'abord que le théorème 1.1 et le corollaire 1.2 sont équivalents :
En appliquant le théorème 1.1 dans les boîtes $T_P(r_0/10, \lambda r_0/10) \cap \Omega$ où P parcourt $\partial\Omega \cap \partial T_Q(2r_0/3, 2\lambda r_0/3)$ et en utilisant les inégalités de Harnack-Moser, on trouve l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall M \in \Omega \cap \partial T_Q(2r_0/3, 2\lambda r_0/3) \quad u(M) \leq cu(M_{r_0}) .$$

L'inégalité s'étend alors à $\Omega - T_Q(2r_0/3, 2\lambda r_0/3)$ grâce au principe du maximum.

Réciproquement, supposons le corollaire 1.2 vrai. Notons $G_A(.)$ la fonction de Green dans l'ouvert Ω (A désignant le pôle) et appelons Σ l'ensemble $\Omega \cap T_Q(4r_0/3, 4\lambda r_0/3)$. Notons que le point P_{r_0} a une coordonnée temporelle supérieure à celle des points de Σ. En appliquant le corollaire 1.2 dans les boites $\Omega \cap T_P(r_0/10, \lambda r_0/10)$ où $P \in \partial\Omega \cap \partial\Sigma$, on obtient alors grâce aux inégalités de Harnack :

$$\forall M \in \Omega \cap \bar{T}_Q(r_0, \lambda r_0) \quad G_A(M) \leq cG_A(P_{r_0}) \ ,$$

pour tout point $A \in \Omega \cap \partial\Sigma$ proche du bord de Ω. Pour les autres points A de $\Omega \cap \partial\Sigma$, $G_A(M)$ est estimé par r_0^{-n} et $G_A(P_{r_0})$ est minoré par cr_0^{-n} (voir préliminaires). Finalement, quitte à modifier la constante c , on obtient :

$$\forall M \in \Omega \cap \bar{T}_Q(r_0, \lambda r_0) \quad \forall A \in \Omega \cap \partial\Sigma \quad , \quad G_A(M) \leq cG_A(P_{r_0}) \ .$$

L'estimation du théorème 1.1 s'obtient alors en intégrant l'inégalité précédente par rapport à une mesure portée par $\Omega \cap \partial\Sigma$. En effet, considérons une fonction u vérifiant les hypothèses du dit théorème, et notons R_u^Σ la réduite de u sur l'ensemble Σ . Par définition, R_u^Σ désigne la borne inférieure des fonctions L-surharmoniques dans Ω qui dominent u sur Σ. La fonction u convergeant vers zéro en tout point de $\partial\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$, on remarque que u est un L-potentiel dans Ω , porté par $\Omega \cap \partial\Sigma$ et coincidant avec u dans l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$.

Finalement, grâce à ce qui précède, il ne nous reste plus qu'à démontrer le corollaire 1.2 lorsque u est de plus une fonction de Green dont le pôle est situé dans l'ensemble $T_Q(r_0/2, \lambda r_0/2)$.

Une dernière réduction s'impose : on se restreint à ne traiter que le cas d'un pôle $A_\rho = Q + (0, \lambda\rho, 0)$ avec $\rho \in]0, 1/2]$ (pour se ramener à ce cas, on constate une nouvelle fois que lorsque le pôle est situé loin du bord, l'estimation recherchée découle directement des homogénéités de la fonction de Green). En utilisant les estimations de la fonction de Green et les inégalités de Harnack, on obtient dans un premier temps l'existence d'une meilleure constante $c_m > 0$ telle que :

(1)

$$\forall \rho \in [2^{-(m+1)}, 2^{-m}] \ \ \forall M \in \Omega \cap \partial T_Q(r_0, \lambda r_0) \quad G_{A_\rho}(M) \leq c_m G_{A_\rho}(M_{r_0}) \ .$$

Pour montrer que la suite c_m est bornée, on utilise un principe de barrière uniforme décrit par le lemme suivant :

LEMME 1.3. — *Notons encore L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et $\mathcal{O}$ un domaine conique :*

$$\mathcal{O} = P + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; \| x' \| < r, | t | < r^2, -\lambda(\| x' \| \vee | t |^{1/2}) < x_n < \lambda r\}.$$

Notons h la L mesure harmonique de $\partial T_P(r,\lambda r)$ dans $\mathcal{O}$ et (Y', Y_n, S) le point P. Il existe une fonction $\Phi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^+$ continue croissante nulle en zéro mais ne dépendant ni de L ni de r ni de P , telle que pour tout point $M = (x', x_n, t)$ de l'ensemble $\mathcal{O}$ on ait :

$$h(M) \leq \Phi\left(\frac{\| x' - Y' \|}{r} \vee \frac{| t - S |^{1/2}}{r} \vee \frac{| x_n - Y_n |}{\lambda r}\right).$$

Ce lemme nous apprend donc que $h(M)$ tend vers zéro lorsque M tend vers P et nous offre un contrôle de la vitesse de convergence indépendant de L et P. En particulier, la fonction h constitue une L-barrière locale au voisinage du point frontière lipschitzien P. Le point P est donc L-régulier (au sens de Perron-Wiener-Brelot).

Démonstration. — Grâce à l'invariance par translation de la classe d'opérateurs $\Lambda(\mu)$, on peut supposer que P est l'origine de $\mathbf{R}^{n+1}$. Notons alors G la L-fonction de Green du domaine $T_0(r,\lambda r)$ et notons Q le point $Q = (0, \frac{-7\lambda r}{8}, \frac{-r^2}{2})$. On peut trouver une constante $\epsilon_1 = \epsilon_1(n,\lambda,\mu) \in]0,1[$ telle que $G_Q(M) \geq \frac{\epsilon_1}{r^n}$ pour tout point $M \in T_0(r/2, \lambda r/2)$. De plus, en utilisant la majoration de Γ_Q (L-fonction de Green globale au point Q) , on trouve une constante $c_1 = c_1(n,\lambda,\mu)$ telle que :

$$\forall M \in \partial T_Q(r/10, \lambda r/10)\ G_Q(M) \leq \Gamma_Q(M) \leq \frac{c_1}{r^n}\ .$$

Cette inégalité se transmet à tout point de $\bar{T}_Q(r,\lambda r) - T_Q(r/10, \lambda r/10)$ par le principe du maximum. Ainsi, l'inégalité est entre autre vérifiée dans $\mathcal{O}$ et $\frac{r^n}{c_1} G_Q$ constitue une sous-solution au problème de Dirichlet dans $\mathcal{O}$ avec la donnée frontière 0 sur $\partial T_0(r,\lambda r)$ et 1 sur $\partial\mathcal{O} - \partial T_0(r,\lambda r)$. En d'autres termes, pour tout point M dans $\mathcal{O}$, on a : $\frac{r^n}{c_1} G_Q(M) \leq 1 - h(M)$.

Par suite, $\forall M \in \mathcal{O} \cap T_0(r/2, \lambda r/2)$, $h(M) \leq 1 - \epsilon$ où $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{c_1}$ est une constante de l'intervalle]0,1[qui ne dépend que de n , λ et μ. Par une récurrence immédiate, on a alors :

$$\forall k \geq 0 \quad \forall M \in \mathcal{O} \cap T_0(\frac{r}{2^k}, \frac{\lambda r}{2^k}) \qquad h(M) \leq (1-\epsilon)^k\ .$$

Posons alors $\Phi(x) = 2^\beta x^\beta$ où $\beta = \frac{\log(1-\epsilon)}{\log(1/2)}$. Pour tout point $M = (x', x_n, t)$ de $\mathcal{O}$, si k désigne le plus grand entier tel que $\frac{\| x' \|}{r} \vee \frac{| t |^{1/2}}{r} \vee$

$\frac{|x_n|}{\lambda r} \leq \frac{1}{2^k}$ on a alors :

$$h(M) \leq (1-\epsilon)^k = (1/2)^{\beta k} \leq \Phi\left(\frac{\|x'\|}{r} \vee \frac{|t|^{1/2}}{r} \vee \frac{|x_n|}{\lambda r}\right).$$

Ce qui prouve le lemme.

Nous pouvons alors terminer la preuve de notre théorème en démontrant que la suite c_m est bornée. En utilisant l'estimation (1) et le principe du maximum on a entre autre :

$\forall \rho \in [2^{-(m+2)}, 2^{(m+1)}]$, $\forall M \in \Omega - T_Q(r_0/2, \lambda r_0/2) G_{A_\rho}(M) \leq c_m G_{A_\rho}(M_{r_0/2})$.

On obtient donc grâce aux inégalités de Harnack :

$$\forall M \in \Omega - T_Q(r_0/2, \lambda r_0/2)\ G_{A_\rho}(M) \leq c' c_m G_{A_\rho}(M_{r_0})\ .$$

Soit P un point de $\partial\Omega \cap \partial T_Q(2r_0/3, 2\lambda r_0/3)$ et soit $\mathcal{O}$ le domaine conique :

$$\mathcal{O} = P + \{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; \|x'\| < \frac{r_0}{10}\ , |t|^{1/2} < \frac{r_0}{10},$$
$$-\lambda(\|x'\| \vee |t|^{1/2}) < x_n < \frac{\lambda r_0}{10}\}\ .$$

Grâce au lemme 1.3, en notant h la L-mesure harmonique de $\partial T_P(r_0/10, \lambda r_0/10)$ dans $\mathcal{O}$, on peut trouver ϵ assez petit (ne dépendant ni de P ni de L) tel que h ne dépasse pas $1/c'$ dans $\mathcal{O} \cap T_P(\epsilon r_0, \lambda \epsilon r_0)$. A l'aide du principe du maximum, l'inégalité $G_{A_\rho}(M) \leq c' c_m G_{A_\rho}(M_{r_0})$ valable en particulier sur $\partial\mathcal{O} \cap \Omega$ nous donne :

$$\forall M \in \Omega \cap T_P(\epsilon r_0, \lambda \epsilon r_0) \quad G_{A_\rho}(M) \leq c_m G_{A_\rho}(M_{r_0})\ .$$

Par ailleurs, grâce aux inégalités de Harnack, on a l'existence d'une constante $\tilde{c}(n, \lambda, \mu, \epsilon)$ telle que : $G_{A_\rho}(M) \leq \tilde{c} G_{A_\rho}(M_{r_0})$ pour tout point M de $\Omega \cap \partial T_Q(2r_0/3, 2\lambda r_0/3)$ ne se situant pas dans l'un des $T_P(\epsilon r_0, \epsilon\lambda r_0)$ décrit plus haut. En utilisant une nouvelle fois le principe du maximum à l'extérieur de $T_Q(2r_0/3, 2\lambda r_0/3)$, on conclut finalement $c_{m+1} \leq \max(\tilde{c}, c_m)$ et la suite des c_m est uniformément bornée.

1.c. Principe de Harnack faible au bord.

Nous sommes maintenant en mesure de comparer le comportement relatif de deux L-solutions positives au voisinage d'un point frontière lipschitzien. C'est l'objet du théorème suivant :

THÉORÈME 1.4. — *Soient $\mu > 1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et $r_0 \leq 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et Q un point frontière de Ω tel que $\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté à $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu) > 0$ telle que pour tout couple (u, v) de L-solutions positives dans Ω tendant vers zéro en tout point de $\partial\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ on ait :*

$$\forall M \in \Omega \cap \bar{T}_Q(r_0, \lambda r_0) \qquad \frac{u(M)}{u(P_{r_0})} \leq c\frac{v(M)}{v(P^*_{r_0})} ,$$

où $P_{r_0} = Q + (0, \lambda r_0, 2r_0^2)$ et $P^*_{r_0} = Q + (0, \lambda r_0, -2r_0^2)$.

Remarque. — Ce résultat reste encore valable lorsque l'opérateur est seulement supposé à coefficients mesurables, la démonstration ne nécessitant que des estimations de la fonction de Green (voir aussi [11]).

Commentaires. — Ce théorème est un analogue du théorème 1.5 décrit par A. Ancona dans [1]. Fabes, Garofalo et Salsa ([12]) ont aussi établi un principe similaire dans le cadre parabolique pour des ouverts cylindriques en temps (voir aussi [11]). On prend pour convention dans cet énoncé qu'il devient vide de sens si l'une des valeurs $u(P_{r_0})$ ou $v(P^*_{r_0})$ est nulle. Notons à ce sujet que si $u(P_{r_0})$ est nul, la fonction u est identiquement nulle dans $\Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. Par contre, $v(P^*_{r_0})$ peut être nul sans que v ne soit nulle dans tout l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. Plus précisément, la fonction v peut rester nulle jusqu'à un temps t_0 puis devenir strictement positive. Pour une telle fonction v, on ne peut espérer estimer la fonction u à l'aide de v dans $\Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. Comme dans le théorème 1.1, on peut malgré tout remplacer les points de référence P_{r_0} et $P^*_{r_0}$ par les points $Q + (0, \lambda r_0, (1+\alpha)r_0^2)$ et $Q + (0, \lambda r_0, -(1+\alpha)r_0^2)$,où $\alpha \in]0,1]$; la constante c dépend alors aussi de α.

Sa faiblesse provient évidemment du fait que cette comparaison fait intervenir deux points de référence (P_{r_0} et $P^*_{r_0}$), et il est clair à l'aide des remarques décrites plus haut, qu'on ne peut espérer sans hypothèses supplémentaires sur les fonctions u et v contrecarrer ce fait. Cependant, ce théorème constituera un outil essentiel lors de la deuxième partie de ce travail et on s'efforcera dans la partie 3, d'établir (sous des hypothèses différentes) un principe de Harnack au bord ne faisant plus intervenir qu'un point de référence.

Notons cependant qu'on obtient à l'aide du théorème 1.4 le résultat suivant : si w désigne la L-mesure harmonique dans $\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ de $\partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ et si u est une L-solution vérifiant les hypothèses du

théorème 1.4, et pour laquelle $u(P^*_{r_0}) \neq 0$, on a avec une nouvelle constante c et pour tout point M de l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$:

$$\frac{1}{c} u(P^*_{r_0}) w(M) \leq u(M) \leq c u(P_{r_0}) w(M).$$

Ainsi la vitesse à laquelle u tend vers zéro au bord est comparable à la vitesse à laquelle w tend vers 0 en ces points.

Démonstration du théorème 1.4. — On reprend la démarche d'Alano Ancona dans [1]. En utilisant l'invariance par translation de la classe d'opérateurs $\Lambda(\mu)$, on peut supposer $Q = 0$. On peut de plus supposer $\Omega = \Omega \cap T_0(2r_0, 2\lambda r_0)$; on note encore G la fonction de Green de cet ouvert.

Considérons une fonction u vérifiant les hypothèses du théorème. A une modification élémentaire près utilisant le principe de Harnack et le principe du maximum, on peut écrire grâce au théorème 1.1 :

$$\forall M \in \Omega \cap T_0(5r_0/4, 5\lambda r_0/4) \quad u(M) \leq c u(P_{r_0}) h(M)$$

où h désigne la mesure harmonique de $\partial T_0(5r_0/4, 5\lambda r_0/4)$ dans :

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cap T_0(5r_0/4, 5\lambda r_0/4) \ .$$

On utilise alors le même remarque qu'Ancona dans [1]. Notons avec une étoile les quantités faisant référence à l'opérateur L^* adjoint de L et à la théorie duale. Γ désignant la L-fonction de Green globale, on a $\Gamma_A(M) = \Gamma^*_M(A)$. Ainsi au sens faible, $L^*(\Gamma.(M)) = \delta_M$, mesure de Dirac au point M . Par ailleurs, pour $M \in \tilde{\Omega}$, prolongeant $\tilde{G}^*_M$ (L^*-fonction de Green de $\tilde{\Omega}$) par zéro hors de $\tilde{\Omega}$ et par ses limites supérieures en tout point frontière de $\tilde{\Omega}$, on sait que $\tilde{G}^*_M = \Gamma^*_M -^* \hat{R}^{\tilde{\Omega}^c}_{\Gamma^*_M}$. (La réduite est prise ici au sens des L-sursolutions sur $\mathbb{R}^{n+1}$.)

Utilisant une propriété de symétrie de la notion de réduite lorsqu'on passe au faisceau dual, on obtient alors $L^*(\tilde{G}^*_M) = \delta_M - \mu_M$ où μ_M est la L-mesure harmonique directe au point M dans $\tilde{\Omega}$.

Fixons alors une fonction φ, C^∞ à support compact dans $T_0(4/3, 4\lambda/3) - T_0(6/5, 6\lambda/5)$, valant un au voisinage de $\partial T_0(5/4, 5\lambda/4)$ et toujours comprise entre zéro et un.

Notons ensuite $\varphi_{r_0}(x,t) = \varphi(x/r_0, t/r_0^2)$. Pour tout point $M \in T_0(r_0, \lambda r_0)$,

on a :

$$\begin{aligned} h(M) &\leq < \mu_M \mid \varphi_{r_0} > \\ &= - < L^*(\tilde{G}^*_M) \mid \varphi_{r_0} > \\ &= - < \tilde{G}^*_M \mid L(\varphi_{r_0}) > \\ &\leq \int_\Sigma \mid L(\varphi_{r_0}(\xi)) \mid \tilde{G}^*_M(\xi) d\xi \\ &\leq \int_\Sigma \mid L(\varphi_{r_0}(\xi)) \mid G^*_M(\xi) d\xi \ , \end{aligned}$$

où on a noté Σ le complémentaire de $T_0(6r_0/5, 6\lambda r_0/5)$.

En utilisant l'analogue du corollaire 1.2 pour l'opérateur L^* ainsi que le principe de Harnack pour ce même opérateur, on trouve une constante $c > 0$ telle que :

$$G^*_M(\xi) \leq c G^*_M(B^*_{r_0}) \text{ pour } M \in T_0(r_0, \lambda r_0) \text{ et } \xi \in \Sigma \ ,$$

où $B^*_{r_0} = P^*_{r_0} + (0, r_0^2/4)$.

Finalement, $h(M) \leq c G_{B^*_{r_0}}(M) . \int_\Sigma \mid L(\varphi_{r_0}(\xi)) \mid d\xi$.

Par un changement de variable élémentaire ramenant à $r_0 = 1$, en utilisant que les coefficients de l'opérateur L sont tous contrôlés par μ en valeur absolue, l'intégrale intervenant dans l'estimation est contrôlée par $c_2 r_0^n$ où $c_2 = c_2(n, \lambda, \mu)$. (C'est ici qu'intervient l'hypothèse $r_0 \leq 1$.) Donc avec une nouvelle constante c, on a :

$$(1) \qquad \forall M \in T_0(r_0, \lambda r_0) \ , \ u(M) \leq c u(P_{r_0}) r_0^n G_{B^*_{r_0}}(M).$$

Prenons enfin une autre fonction v vérifiant les conditions du théorème et supposons $v(P^*_{r_0}) \neq 0$ (seul cas intéressant). Fixons $\epsilon = \epsilon(n, \lambda, \mu) > 0$ tel que $T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0, \lambda \epsilon r_0)$ soit inclus dans $\Omega - T_0(r_0, \lambda r_0)$. Imposons de plus $\epsilon^2 < 1/8$. Le principe de Harnack appliqué à v nous assure l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$(2) \qquad \forall M \in \partial T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0, \epsilon \lambda r_0) \quad v(P^*_{r_0}) \leq c v(M).$$

Majorant en ces mêmes points, $G_{B^*_{r_0}}$ par $c_1 r_0^{-n}$ on obtient alors :

$$(3) \qquad \forall M \in \partial T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0, \lambda \epsilon r_0) \quad r_0^n G_{B^*_{r_0}}(M) \leq c_1 c \frac{v(M)}{v(P^*_{r_0})} \ .$$

Cette inégalité se propage à l'extérieur de $T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0, \lambda \epsilon r_0)$ par le principe du maximum, et est donc vraie en particulier pour $M \in T_0(r_0, \lambda r_0)$. La comparaison de (1) avec (3) nous donne l'estimation du théorème.

2. UN PRINCIPE DE HARNACK UNIFORME POUR CERTAINES L-SOLUTIONS POSITIVES

Comme nous l'avons déjà signalé, le théorème 1.4 voit son exploitation limitée car il fait intervenir deux points de référence. Nous démontrerons lors de la partie 3 (sous des hypothèses différentes) un principe de Harnack au bord *fort* ne faisant plus intervenir qu'un seul point de référence. Pour atteindre ce but nous devons établir des estimations de Harnack plus précises que le principe de Harnack-Moser. Evidemment, on ne peut espérer les obtenir que pour des L-solutions positives particulières. C'est l'objet du théorème qui suit :

THÉORÈME 2.1. — *Soit* $\omega_f = \{(x,t) \in T_0(2,2\lambda); x_n > f(x',t)\}$ *un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre* $T_0(2,2\lambda)$. *Soit* L *un opérateur de la classe* $\Lambda(\mu)$. *La fonction* w, L*-mesure harmonique de* $\partial T_0(2,2\lambda)$ *dans* ω_f *vérifie le principe de Harnack uniforme suivant :*
Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu) > 0$ *telle que pour toute boule parabolique* $B(M_0,2r)$ *incluse dans* $\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$, *on ait :*

$$\forall M_1, M_2 \in B(M_0,r) \quad w(M_1) \leq cw(M_2) \ .$$

Remarque. — Par souci de simplicité des notations tous les résultats de cette partie ont été écrits en supposant $Q = 0$ et $r_0 = 2$. Par homogénéité, ils peuvent se généraliser aux domaines lipschitziens canoniques adaptés aux cylindres $T_Q(r_0, \lambda r_0)$, où $r_0 \leq 2$.

Notons que Fabes, Garofalo et Salsa ([12]) ont établi un principe assez comparable lorsque les coefficients de l'opérateur L et le graphe f sont indépendants de t.

La démonstration s'articule en quatre parties.

Tout d'abord, on établit le résultat lorsque L est un opérateur à coefficients constants.

Ensuite, on est naturellement amené à comparer les fonctions w obtenues pour deux opérateurs coïncidant au point Q, un opérateur quelconque de la classe $\Lambda(\mu)$ coïncidant évidemment au point Q avec un opérateur à coefficients constants. Il s'agit alors d'affiner dans ce cadre des résultats d'A. Ancona ([4]).

L'essentiel de la démarche m'a été suggéré par A. Ancona qui a envisagé des problèmes similaires dans un cadre elliptique : il a démontré des résultats semblables aux théorèmes 2.2 et 2.4 dans un cadre elliptique.

On commence donc (théorème 2.2) par comparer les fonctions w correspondant à des ouverts dont les graphes sont "*tangents*" en Q lorsqu'on s'approche "non tangentiellement" du point Q. Il faut dans un premier temps supposer de plus l'opérateur L à coefficients constants car on est amené à utiliser le principe de Harnack *uniforme* pour la fonction w. Lorsque ce principe sera acquis pour tous les opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$, le théorème 2.2 pourra être étendu à tous ces opérateurs.

Le théorème 2.2 permet alors de comparer le comportement des fonctions w au voisinage d'un point frontière lipschitzien pour deux opérateurs coïncidant en ce point (théorème 2.4). On adapte à notre situation une technique d'A. Ancona ([4]). Notons que J. Serrin ([25]) a utilisé antérieurement une démarche comparable pour résoudre d'autres types de problèmes.

On peut alors enfin étendre le principe de Harnack uniforme décrit dans le théorème 2.1 à tout opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$.

2.a. Démonstration du théorème 2.1 lorsque L est un opérateur à coefficients constants.

Fixons $B(M_0, 2r)$ une boule vérifiant les hypothèses du théorème 2.1, et appelons M et M^* les points $M_0+(0, 3r^2/2)$, $M_0-(0, 3r^2/2)$. L'opérateur L vérifiant le principe de Harnack-Moser, on est amené à établir l'existence d'une constante $c = c(n, \lambda, \mu) > 0$ telle que $w(M) \leq cw(M^*)$. Considérons alors la translation τ de vecteur $(0, -3Kr, 4r^2)$ où K est la constante de Lipschitz associée à la fonction f . Les coefficients A_{ij} de l'opérateur L étant constants, $w \circ \tau^{-1}$ reste une L-solution dans $\tau(\omega_f)$. En comparant les ouverts ω_f et $\tau(\omega_f)$, on obtient alors à l'aide du principe du maximum :

$$\forall P \in \omega_f \cap \tau(\omega_f) \ , \ w(P) \leq w \circ \tau^{-1}(P) \ .$$

En particulier $w(M) \leq w \circ \tau^{-1}(M)$. Le principe de Harnack-Moser permet ensuite de dire $w(\tau^{-1}(M)) \leq cw(M^*)$ ce qui donne le résultat.

2.b. Evolution de la fonction w lorsqu'on effectue de petites perturbations du bord.

THÉORÈME 2.2. — *Soit $L \in \Lambda(\mu)$ un opérateur à coefficients constants. Soient f_1 et f_2 deux fonctions lipschitziennes et ω_{f_1}, ω_{f_2}*

deux domaines lipschitziens canoniques adaptés au cylindre $T_0(2,2\lambda)$. On suppose que les graphes de f_1 et f_2 sont proches, en ce sens qu'il existe deux constantes ϵ et α strictement positives telles que :

$$\forall(x',t) \quad | f_1(x',t) - f_2(x',t) | \leq \epsilon d((x',t),0)^{1+\alpha} = \epsilon(\| x' \| \vee | t |^{1/2})^{1+\alpha} .$$

Alors, w_i désignant la L-mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_{f_i}, il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon,\alpha) > 0$ telle que pour tout point M de l'ensemble $T_0(1,\lambda) \cap \{x_n \geq \lambda(\|x'\| \vee |t|^{1/2})\}$, on ait :

$$\frac{1}{c} w_2(M) \leq w_1(M) \leq c w^2(M) .$$

Démonstration. — Quitte à remplacer f_1 par $f_1 \wedge f_2$ et f_2 par $f_1 \vee f_2$, on peut évidemment supposer $f_1 \leq f_2$ et donc $\omega_{f_1} \supset \omega_{f_2}$. Notons I la partie de ω_{f_1} située entre les graphes de f_1 et f_2. Appellons $R^I_{w_1}$ la réduite de w_1 sur I, c'est à dire la borne inférieure des fonctions L-surharmoniques sur ω_{f_1} qui dominent w_1 sur I. On a alors $w_2 = w_1 - \hat{R}^I_{w_1} \leq w_1$, où $\hat{R}^I_{w_1}(M) = \operatorname*{Sup}_{V \in \mathcal{V}(M)} \operatorname*{Inf}_{P \in V} R^I_{w_1}(P)$ est la plus grande minorante s.c.i de $R^I_{w_1}$. Comparer w_1 et w_2 consiste donc essentiellement à comparer $\hat{R}^I_{w_1}$ et w_1.

Nous commençons par estimer l'ordre de grandeur de la fonction w_1 au voisinage du graphe de f_1.

LEMME 2.3. — *Notons $\rho(M)$ la distance parabolique de M au graphe de f_1 . Il existe $\beta = \beta(n,\lambda,\mu)$ et $c = c(n,\lambda,\mu)$ deux constantes strictement positives telles que pour tout couple de points (M,N) de l'ensemble $\omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda)$ situés sur un même axe de direction (0,1,0) et vérifiant $M_n \leq N_n$, on ait :*

$$\frac{w_1(M)}{w_1(N)} \leq c \left(\frac{\rho(M)}{\rho(N)}\right)^{\beta} .$$

(M_n (resp. N_n) désigne la n-ième coordonnée du point M (resp N)).

Démonstration. — $w_1(M)$ étant de l'ordre d'une constante lorsque M est loin du bord, on peut tout d'abord supposer $\rho(M) \leq 1/2$. Ensuite, en utilisant le principe de Harnack *uniforme* pour la fonction w_1 on se ramène à n'étudier que le cas $\rho(N) \leq 1/2$. Fixons alors $P \in \partial\omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda)$ et appelons φ la fonction de la variable réelle $\varphi(x) = w_1(P + (0,x,0))$.

En utilisant le théorème 1.1, ainsi que le principe de Harnack *uniforme* pour la fonction w_1, on peut écrire,

$$\forall x \leq 1/2 \quad \forall N \in \omega_{f_1} \cap T_P(x,\lambda x) \quad w_1(N) \leq c\varphi(x) .$$

Grâce au principe du maximum on obtient alors :

$$\forall N \in \omega_{f_1} \cap T_P(x, \lambda x) \quad w_1(N) \leq c\varphi(x)h(N),$$

où h est la L-mesure harmonique de $\partial T_P(x, \lambda x)$ dans l'ouvert :

$$T_P(x, \lambda x) \cap \{x_n > -\lambda \|x'\| \vee |t|^{1/2})\} .$$

Le lemme 1.3 nous permet alors de trouver $\delta = \delta(n, \lambda, \mu) > 0$ tel que $\varphi(\delta x) \leq \varphi(x)/2$. Si $0 < y \leq x$ et si n est l'unique entier tel que $y/(\delta^n) \leq x < y/(\delta^{n+1})$ on a donc $\varphi(y) \leq \varphi(y/\delta^n)/2^n$. Grace au principe de Harnack uniforme pour la fonction w_1 on obtient alors quitte à modifier la constante c :

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \leq c\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} \text{ où } \beta = \frac{\log 2}{\log 1/\delta} .$$

On termine la démonstration en constatant que si $N = P + (0, x, 0)$, ρ(N) et x sont du même ordre de grandeur.

Ce lemme étant acquis, notons pour $p \geq 0$:

$$I_p = I \cap (\bar{T}_0(2^{-p}, 2^{-p}\lambda) - T_0(2^{-p-1}, 2^{-p-1}\lambda))$$

et M_p et M_p^* les points $(0, \lambda 2^{-p}, 2.2^{-2p})$ et $(0, \lambda 2^{-p}, -2.2^{-2p})$.

Constatons que si $X \in I_p$, $\rho(X)$ est inférieur à $c2^{-p(1+\alpha)}$ et que $\rho(M_p^*)$ est de l'ordre de 2^{-p} . Grâce au lemme 2.3 et en utilisant une nouvelle fois le principe de Harnack uniforme pour la fonction w_1, on peut donc trouver une nouvelle constante $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon) > 0$ telle que :

$$\forall X \in I_p \quad w_1(X) \leq c\left(\frac{2^{-p(1+\alpha)}}{2^{-p}}\right)^{\beta} w_1(M_p^*) .$$

Les constantes étant harmoniques, l'inégalité $\hat{R}_{w_1}^{I_p}(X) \leq c2^{-\alpha\beta p} w_1(M_p^*)$ est donc vraie en tout point de ω_{f_1} et en particulier au point M_p.
Par ailleurs, grace au théorème 1.4 on peut trouver $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon, \alpha)$ telle que pour tout point de ω_{f_1} vérifiant $d(M, I_p) \geq (2^{-p})/10$:

$$\frac{\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M)}{w_1(M)} \leq c\frac{\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M_p)}{w_1(M_p^*)} .$$

En particulier, l'estimation $\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M) \leq c2^{-2\alpha\beta p} w_1(M)$ est vraie en tout point de $T_0(1, \lambda) \cap \{x_n \geq \lambda(\| x' \| \vee | t |^{1/2})\}$. Fixons alors un entier k tel que $c\sum_{p \geq k} 2^{-2\alpha\beta p} \leq 1/2$ et notons $\Sigma_k = \bigcup_{p \geq k} I_p$. Pour tout point M de l'ensemble $T_0(1, \lambda) \cap \{x_n \geq \lambda(\| x' \| \vee | t |^{1/2})\}$, on peut écrire :

$$\hat{R}_{w_1}^{\Sigma_k}(M) \leq \frac{1}{2} w_1(M) .$$

Ce qui revient à dire : $w_1(M) - \hat{R}_{w_1}^{\Sigma_k}(M) \geq 1/2w_1(M)$. Il reste alors à comparer w_2 à $w_3 = w_1 - \hat{R}_{w_1}^{\Sigma_k}$. w_3 étant une L-solution dans ω_{f_2} tendant vers zéro en tout point de $\partial\omega_{f_2} \cap T_0(2^{-k}, \lambda 2^{-k})$, à l'aide du principe de Harnack faible au bord (théorème 1.4), on a :

$$\forall M \in \omega_{f_2} \cap T_O(2^{-(k+2)}, \lambda 2^{-(k+2)}) \quad \frac{w_3(M)}{w_2(M)} \leq c\frac{w_3(M_{k+1})}{w_2(M_{k+1}^*)} \leq c\frac{w_1(M_{k+1})}{w_2(M_{k+1}^*)} .$$

Enfin, les fonctions w_1 et w_2 sont toutes deux de l'ordre d'une constante dans $T_0(2, 2\lambda) - T_0(2, \lambda)$. Ainsi grâce au principe de principe de Harnack uniforme pour les fonctions w_1 et w_2 le rapport w_3/w_2 est contrôlé par une constante en tout point M de l'ensemble :

$$T_0(1, \lambda) \cap \{x_n \geq \| x' \| \vee | t |^{1/2}\} - T_0(2^{-(k+2)}, \lambda 2^{-(k+2)}) .$$

De même, grâce au principe de Harnack uniforme, le rapport $w_1(M_{k+1})/w_1(M_{k+1}^*)$ est contrôlé par une constante. Ici, les nouvelles constantes dépendent aussi de k qui a été définitivement fixé. En conclusion, on obtient en tous les points du cône qui nous intéressent l'estimation :

$$w_1(M) \leq 2w_3(M) \leq cw_2(M) ,$$

ce qui constitue la comparaison non triviale entre w_1 et w_2.

2.c. Comparaison des fonctions w correspondant à deux opérateurs coincidant en 0.

THÉORÈME 2.4. — *Fixons ω_f un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_0(2, 2\lambda)$. Soit $L \in \Lambda(\mu)$ et $\tilde{L}$ l'opérateur de $\Lambda(\mu)$ à coefficients constants coïncidant avec L au point 0. Notant w (resp $\tilde{w}$) la L (resp $\tilde{L}$) mesure harmonique de $\partial T_0(2, 2\lambda)$ dans ω_f , il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que pour tout point M situé dans le cône parabolique $T_0(1, \lambda) \cap \{x_n \geq \lambda \| x' \| \vee | t |^{1/2}\}$, on ait :*

$$\frac{1}{c}\tilde{w}(M) \leq w(M) \leq c\tilde{w}(M) .$$

Comme A. Ancona dans [4], nous allons chercher à estimer le signe de $L(g(\tilde{\omega}))$ pour des fonctions g bien choisies. Nous commençons par minorer $\| \nabla_x \tilde{w} \|$.

LEMME 2.5. — *Notons $\rho(M)$ la distance parabolique de M au bord de ω_f. Pour tout point $M \in \omega_f \cap T_0(1, \lambda)$ on a :*

$$\| \nabla_x \tilde{w}(M) \| \geq | \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_n}(M) | \geq \frac{1}{c}\frac{\tilde{w}(M)}{\rho(M)} ,$$

l'opérateur $\tilde{L}$ étant rappelons le à coefficients constants et c étant une constante strictement positive ne dépendant que de n, λ et μ.

Démonstration. — Fixons $P \in \partial\omega_f \cap T_0(3/2, 3\lambda/2)$ et appelons φ la fonction de la variable réelle $\varphi(x) = \tilde{w}(P + (0, x, 0))$. La démonstration du lemme 2.3 nous a appris l'existence de $\delta \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\delta x) \leq \frac{1}{2}\varphi(x)$ pour tout réel x tel que le point $P + (0, x, 0)$ reste dans l'ensemble $T_O(3/2, 3\lambda/2)$. Par le théorème des accroissements finis, il existe donc $\theta \in]\delta, 1[$ tel que $\varphi'(\theta x) \geq \dfrac{\varphi(x)}{2(1-\delta)x}$. De plus, $\tilde{L}$ étant à coefficients constants, le principe du maximum nous apprend que φ est une fonction croissante et $\dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}$ est une $\tilde{L}$-solution positive. En utilisant les inégalités de Harnack-Moser pour la fonction $\dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}$, et en notant M le point $P + (0, x, 0)$, on a alors :

$$\frac{\tilde{w}(M)}{\rho(M)} \leq c\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x_n}(M + (0, \frac{\rho^2(M)}{10})) \ .$$

(Il faut pour cela constater que $\rho(M)$ et x sont du même ordre de grandeur.)

En particulier, on a :

$$\forall M \in \omega_f \cap T_0(1, \lambda) \quad \frac{\tilde{w}(M - (0, \rho^2(M)/10))}{\rho(M - (0, \rho^2(M)/10))} \leq c\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}(M) \ .$$

On conclut alors en utilisant le principe de Harnack uniforme pour la fonction $\tilde{w}$. Nous pouvons maintenant aborder la preuve du théorème 2.4.

α) Majoration de w.

Fixons $\gamma > 1$ et $\epsilon > 0$ tels que si $f_1(x', t) = f(x', t) - \epsilon[\| x' \| \vee |t|^{1/2}]^\gamma$, ω_{f_1} soit encore adapté au cylindre $T_0(2, 2\lambda)$. On recherche, comme A. Ancona dans [4] une fonction $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ nulle en 0, valant 1 en 1 de classe C^2 et telle que $g(\tilde{w}_1)$soit une L-sursolution dans $\omega_f \cap T_0(1, \lambda)$ pour tout opérateur L coïncidant avec $\tilde{L}$ en 0 (nous avons noté $\tilde{w}_1$ la $\tilde{L}$-mesure harmonique de $\partial T_0(2, 2\lambda)$dans ω_{f_1}).

$\tilde{L}\tilde{w}_1$ étant nul, on constate que :

$$L(g(\tilde{w}_1)) = g'(\tilde{w}_1)[L - \tilde{L}](\tilde{w}_1) - g''(\tilde{w}_1) < A\nabla_x\tilde{w}_1 \mid \nabla_x\tilde{w}_1 > .$$

Grâce au lemme 2.5, si ρ_1 désigne la distance au bord de ω_{f_1}, dans l'ensemble $\omega_{f_1} \cap T_0(1, \lambda)$ on a l'estimation :

$$< A\nabla_x\tilde{w}_1 \mid \nabla_x\tilde{w}_1 > \geq \frac{1}{c\mu}\frac{\tilde{w}_1^2}{\rho_1^2} \ .$$

Majorons alors $|(L-\tilde{L})(\tilde{w}_1)|$. Grâce aux estimées de Schauder intérieures pour l'opérateur à coefficients constants $\tilde{L}$ ([14]), et en utilisant le caractère lipschitzien des A_{ij} ainsi qu'une nouvelle fois le principe de Harnack uniforme pour la fonction $\tilde{w}_1$, chaque terme du second ordre dans cette expression vérifie :

$$|A_{ij}(M)-A_{ij}(0)|\left|\frac{\partial^2\tilde{w}_1(M)}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leq c\frac{d(M,0)\tilde{w}_1(M)}{\rho_1^2(M)} \text{ pour } M\in\omega_{f_1}\cap T_0(1,\lambda).$$

Par ailleurs, si on impose maintenant à M de rester aussi dans ω_f, on peut trouver une constante c strictement positive telle que $d(M,0)\leq c\rho_1(M)^{1/\gamma}$. Finalement quitte à modifier la constante c, on obtient :

$$|A_{ij}(M)-A_{ij}(0)|\left|\frac{\partial^2\tilde{w}_1(M)}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leq \frac{c\tilde{w}_1(M)}{\rho_1(M)^{2-1/\gamma}}.$$

Les termes du premier ordre intervenant dans $(L-\tilde{L})(\tilde{w}_1)$ sont, grâce aux estimées de Schauder internes et au principe de Harnack uniforme pour $\tilde{w}_1$, tous contrôlés par $\tilde{w}_1/\rho_1$. (Il faut remarquer que les $\left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\right|$ sont presque partout majorés par μ.) Finalement on obtient :

$$\left|(L-\tilde{L})(\tilde{w}_1)(M)\right| \leq c\frac{\tilde{w}_1(M)}{\rho_1^{2-1/\gamma}(M)}$$

en tout point de $\omega_f\cap T_0(1,\lambda)$. On recherche alors g croissante et solution d'une équation du type $g''(\tilde{w}_1)=\frac{-\delta}{\tilde{w}_1^\alpha}g'(\tilde{w}_1)$, avec $\alpha\in]0,1[$. On a alors :

$$Lg(\tilde{w}_1)\geq g'(\tilde{w}_1)\frac{\tilde{w}_1}{\rho_1^{2-1/\gamma}}\left(-c+\frac{\delta}{c\mu}.\frac{\tilde{w}_1^{1-\alpha}}{\rho_1^{1/\gamma}}\right) \text{ dans } \omega_f\cap T_0(1,\lambda).$$

Enfin, on s'assure de l'existence d'un réel $\beta'\in]0,1[$ tel que $\tilde{w}_1/\rho_1^{\beta'}$ reste minoré dans $\omega_{f_1}\cap T_0(1,\lambda)$ (le raisonnement est similaire à celui effectué dans le lemme 2.3). Posons alors $\alpha=1-1/\beta'\gamma$. Fixons un nombre réel strictement positif δ tel que $L(g(\tilde{w}_1))$ soit positif, et considérons l'unique solution de $g''(\tilde{w}_1)=\frac{-\delta}{\tilde{w}_1^\alpha}g'(\tilde{w}_1)$ valant 0 en 0 et 1 en 1; $g(\tilde{w}_1)$ est L-surharmonique (pour tout opérateur L coïncidant avec $\tilde{L}$ en 0) dans $\omega_f\cap T_0(1,\lambda)$ et est de l'ordre de $\tilde{w}_1$ partout. Par le principe du minimum, en constatant que $\tilde{w}_1$ (et donc $g(\tilde{w}_1)$) est minorée par une constante dans $\partial T_0(1,\lambda)\cap\omega_f$, on obtient avec une nouvelle constante, $w\leq cg(\tilde{w}_1)$ dans $T_0(1,\lambda)\cap\omega_f$. Enfin, grâce au théorème 2.2, $\tilde{w}_1, g(\tilde{w}_1)$ et $\tilde{w}$ sont du même ordre de grandeur dans le cône $T_0(1,\lambda)\cap\{x_n\geq\lambda\,\|x'\|\vee|t|^{1/2}\}$.

β) Minoration de w.

Les idées de base sont les mêmes mais un peu plus difficiles à mettre en oeuvre car il s'agit ici de minorer w au voisinage du graphe de f.

LEMME 2.6. — *Avec les notations du théorème 2.4, il existe deux constantes $c = c(n, \lambda, \mu)$ et $\beta' = \beta'(n, \lambda, \mu)$ strictement positives telles que :*

$$\forall M \in \omega_f \cap T_0(1, \lambda) \quad w(M) \geq c\rho(M)^{\beta'} ,$$

$\rho(M)$ désignant toujours la distance au bord.

Il faut ici être un peu plus vigilant que lors des lemmes équivalents décrits plus haut, car w ne vérifie pas encore le principe de Harnack uniforme. (L n'est pas à coefficients constants.)

Fixons $P \in \partial\omega_f \cap T_0(1, \lambda)$ et considérons la parabole située dans le plan $< P, x_n, t >$ d'équation $t - t(P) = -\lambda(x_n - x_n(P))^2/2$. Paramétrons cette parabole par $x = x_n - x_n(P)$ et notons $\varphi(x)$ la restriction de w à cette parabole. Les inégalités de Harnack-Moser nous disent $\varphi(2x) \leq c\varphi(x)$ et on obtient alors si $x \leq y$ $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \geq c_1 \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\beta'}$ où $\beta' = \dfrac{\log c}{\log 2}$.
Lorsque y devient grand pour sortir de $T_0(1, \lambda)$, $\varphi(y)$ est de l'ordre d'une constante, donc $\varphi(x) \geq c(x)^{\beta'}$ où c est une nouvelle constante. Regardant maintenant le point M ayant même coordonnée x_n que le point paramétré par x et situé sur l'axe $P + \mathbb{R}^+(0, 1, 0)$, grâce au principe de Harnack-Moser, on a encore $w(M) \geq c\rho(M)^{\beta'}$ (c a changé). Finalement, M peut être pris arbitrairement dans $\omega_f \cap T_0(1, \lambda)$.

Pour minorer w, on commence par fixer $\gamma > 1$ puis $\epsilon > 0$ tels que le cylindre $T_0(2, 2\lambda)$ soit adapté au graphe $f_2(x', t) = f(x', t) + \epsilon R(x', t)^\gamma$, où $R(x', t) = \| x' \| \vee | t |^{1/2}$. En convenant de noter $R(M)$ la quantité $\| x' \| \vee | t |^{1/2}$ lorsque M s'écrit (x', x_n, t), on a $w(M) \geq cR(M)^{\beta'\gamma}$ sur la portion du graphe de f_2 située dans $T_0(1, \lambda)$. Par ailleurs, notant f_3 un graphe intermédiaire $f_3(x', t) = f_2(x', t) - \epsilon(R(x', t)/10)^{\gamma'}$ où $\gamma' > \gamma$ et $\tilde{w}_3$ la $\tilde{L}$-mesure harmonique de $\partial T_0(2, 2\lambda)$ dans ω_{f_3}, on a grâce au lemme 2.3 $\tilde{w}_3 \leq cR^{\beta\gamma'}$ sur la portion du graphe de f_2 situé dans $T_0(1, \lambda)$. On choisit alors γ' tel que $\beta\gamma' \geq \beta'\gamma$, ce qui assure $\tilde{w}_3 \leq cw$ sur $\partial\omega_{f_2} \cap T_0(1, \lambda)$. On construit par une technique similaire à celle employée dans le α) une fonction $g(\tilde{w}_3)$ (solution d'une équation du type $g''(\tilde{w}_3) = \dfrac{+\delta}{\tilde{w}_3^\alpha} g'(\tilde{w}_3)$) telle que $g(\tilde{w}_3)$ soit L-sousharmonique dans $\omega_{f_2} \cap T_0(1, \lambda)$. En utilisant les inégalités de Harnack, w est minorée par une constante sur $\partial T_0(1, \lambda) \cap \omega_{f_2}$. Finalement, grace au principe du maximum, $g(\tilde{w}_3) \leq cw$ dans $\omega_{f_2} \cap T_0(1, \lambda)$. On conclut alors à l'aide du théorème 2.2, les fonctions $\tilde{w}_3$, $\tilde{w}$ et $g(\tilde{w}_3)$ étant du même ordre de grandeur dans le cône $T_0(1, \lambda) \cap \{x_n \geq \lambda \| x' \| \vee | t |^{1/2}\}$.

2.d. Démonstration du théorème 2.1.

Reprenons les notations du théorème 2.1. Grâce au théorème 2.4, sa conclusion est claire si la boule $B(M_0, 2r)$ reste incluse dans le cône $\{x_n \geq \lambda \parallel x' \parallel \vee \mid t \mid^{1/2}\}$ (la conclusion étant déjà acquise si l'opérateur est à coefficients constants).

Pour $M_0 = (x', x_n, t)$ quelconque, notons $P_0 = (x', f(x', t), t)$. On peut supposer que la boule $B(M_0, 2r)$ reste incluse dans le cône $P_0 + \{x_n \geq \lambda \parallel x' \parallel \vee \mid t \mid^{1/2}\}$. On peut aussi supposer $B(M_0, 2r) \subset T_{P_0}(1/2, \lambda/2)$, car si non, w est de l'ordre d'une constante dans $B(M_0, r)$. Mais alors, grace au principe de Harnack faible au bord, la comparaison dans l'ensemble $T_{P_0}(1/2, \lambda/2)$ entre la fonction w et la L-mesure harmonique de $\partial T_{P_0}(1, \lambda)$dans $T_{P_0}(1, \lambda) \cap \omega_f$ nous ramène au cas précédent.

2.e. Quelques conséquences du théorème 2.1.

COROLLAIRE 2.7. — *Le théorème 2.2 est vrai pour tout $L \in \Lambda(\mu)$.*

On en déduit alors un résultat de même nature que celui de Widman ([29] p. 523) pour des opérateurs elliptiques.

COROLLAIRE 2.8. — *Soient ω_f un domaine lipschitzien adapté à $T_0(2, 2\lambda)$ et $\alpha \in]0, 1[$. On suppose de plus que f est de classe $C^{1\alpha}$ en x' et $(1+\alpha)/2$ lipschitzienne en t, et vérifie :*

$$\parallel \nabla_{x'} f \parallel_\infty + \sup_{x', y', t} \frac{\parallel \nabla_{x'} f(x', t) - \nabla_{x'} f(y', t) \parallel}{\parallel x' - y' \parallel^\alpha} + \sup_{x', t, s} \frac{\mid f(x', t) - f(x', s) \mid}{\mid t - s \mid^{(1+\alpha)/2}} \leq K .$$

Alors, il existe une constante strictement positive $c = c(n, \lambda, \mu, \alpha, K)$ telle que pour tout opérateur $L \in \Lambda(\mu)$ et pour toute L-solution positive dans l'ouvert ω_f on ait :

$$\forall M \in \omega_f \cap T(1, \lambda) \quad \frac{1}{c} d(M, \partial\omega_f) u(M_1^*) \leq u(M) \leq c d(M, \partial\omega_f) u(M_1)$$

où $M_1 = (0, 1, 2)$ et $M_1^* = (0, 1, -2)$.

Démonstration. — Notant $\rho(M) = d(M, \partial\omega_f)$ et notant toujours w la L-mesure harmonique dans ω_f de $\partial T_0(2, 2\lambda)$, on est ramené à voir en

utilisant le principe de Harnack faible au bord que $\frac{1}{c}\rho(N) \leq w(N) \leq c\rho(N)$. Considérant ensuite des portions de ω_f du type $\omega_f \cap T_P(1,\lambda)$ où P est un point de $\partial\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$ et comparant alors dans $\omega_f \cap T_P(1/2,\lambda/2)$ w à la L-mesure harmonique de $\partial T_P(1,\lambda)$ dans $\omega_f \cap T_P(1,\lambda)$ on se ramène finalement à montrer l'estimation souhaitée pour des points M situés sur l'axe $\mathbb{R}^+.(0,1,0)$. On approche alors le graphe de f par "l'hyperplan tangent" :

$$x_n = f_1(x',t) = x'.\vec{a} \text{ où } \vec{a} = \nabla_{x'} f(0) \quad .$$

Les graphes f et f_1 vérifiant les hypothèses du corollaire 2.7, on est ramené à estimer la fonction w_1, L-mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_{f_1}, sur l'axe $\mathbb{R}^+.(0,1,0)$.

Ce dernier problème est facile : on peut rechercher des barrières sous la forme $s(x,t) = \varphi(x_n - x'.\vec{a})$. On a :

$$L(s) = -\varphi'(x_n - x'.\vec{a}).\mathrm{div}\left(A\binom{-\vec{a}}{1}\right) - \varphi''(x_n - x'.\vec{a}) < A\binom{-\vec{a}}{1} \mid \binom{-\vec{a}}{1} > \ .$$

Les dérivées $\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$ étant toutes contrôlées par μ, $\mid \mathrm{div}\left(A\binom{-\vec{a}}{1}\right) \mid$ est contrôlé par une constante c . De même $< A\binom{-\vec{a}}{1} \mid \binom{-\vec{a}}{1} > \geq \frac{1}{\mu}$. Si $\varphi(x) = c^{c\mu x} - 1$, $L(s)$ est alors négatif et s est une L-sous solution dans ω_{f_1}. On peut alors trouver une constante δ telle que $0 \leq \delta s \leq 1$ dans ω_g. Le principe du maximum nous assure $\delta s \leq w_1$ et w_1 est minorée par un multiple de la distance au bord.

De même, $\psi(x) = 1 - e^{-c\mu x}$ est telle que la fonction associée $\psi(x_n - x'.\vec{a})$ est une L-sursolution. On peut aussi choisir δ telle que $\delta\psi(x_n - x'.\vec{a})$ soit supérieur à 1 dans $\partial\omega_{f_1} \cap \{x_n = 2\lambda\}$. Cette fonction va alors constituer une L-sursolution pour la mesure harmonique de l'hyperplan $x_n = 2\lambda$ dans ω_{f_1} qui est grâce au principe de Harnack faible au bord du même ordre de grandeur que w_1 dans $\mathbb{R}^+.(0,1,0) \cap T_0(1,\lambda)$. On a ainsi majoré w_1 par un multiple de la distance au bord, ce qu'il restait à prouver.

3. UN PRINCIPE DE HARNACK FORT AU BORD

Nous établissons ici un principe de Harnack fort au bord pour certains couples de L-solutions positives. Ce principe ne fait plus intervenir qu'un point de référence.

Introduisons les nouveaux ensembles géométriques suivants. λ étant un réel strictement positif, on note $\mathcal{C}_\lambda$ le "*cône parabolique*" :

$$\mathcal{C}_\lambda = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \geq \sup(\| x' \|^2, | x_n |^2 / \lambda^2)\}.$$

THÉORÈME 3.1. — *Soient $\mu > 1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ lipschitzien en Q. Soient $r_0 \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Notons M_ρ le point $Q + (0, \lambda\rho, \rho^2)$. Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout réel r ne dépassant pas $r_0/4$ et pour tout couple de L-solutions positives (u, v) dans $\Omega - T_Q(r, \lambda r)$ tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - T_Q(r, \lambda r)$ on ait :*

$$\forall M \in [\Omega \cap (Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap \bar{T}_Q(r_0, \lambda r_0)] - T_Q(2r, 2\lambda r) \ , \ \frac{u(M)}{u(M_{2r})} \leq c \frac{v(M)}{v(M_{2r})}$$

(la constante c est indépendante de r).

Remarques.

1) Comme nous l'avons déjà évoqué lors de la partie 1, on ne peut pas obtenir (comme dans le cas d'opérateurs elliptiques) la même estimation en tout point M de l'ensemble $\Omega - T_Q(2r, 2\lambda r)$.

2) On ne peut non plus obtenir la même inégalité (avec une constante ne dépendant pas de r) en tout point M de l'ensemble $\Omega \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \geq t(M_{2r})\}$, $t(M_{2r})$ désignant la coordonnée temporelle de M_{2r}. Des contre-exemples simples peuvent être écrits dans le cadre du demi-espace $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_n > 0\}$ pour l'opérateur $\mathcal{C} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$.

3) L'amélioration par rapport aux résultats de la partie 1 vient du fait que la comparaison obtenue ne fait plus intervenir qu'un seul point de normalisation. Cependant, les L-solutions positives dont on sait estimer le rapport ne sont plus quelconques. Ce principe de Harnack fort au bord nous permettra lors de la partie 4 de montrer que deux L-solutions positives minimales de Ω tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - \{Q\}$ sont proportionnelles.

Démonstration. — Fixons une fonction u vérifiant les hypothèses du théorème et notons h la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(9r/8, 9\lambda r/8)$ dans $\Omega - T_Q(9r/8, 9\lambda r/8)$. On peut écrire grâce au corollaire 1.2 , aux inégalités de Harnack et au principe du maximum :

$$\forall M \in \Omega - T_Q(9r/8, 9\lambda r/8) \quad u(M) \leq c u(M_{2r}) h(M) \ .$$

Par une technique similaire à celle employée au cours du théorème 1.4 on obtient alors en notant M_ρ^* le point $Q + (0, \lambda\rho, -\rho^2)$ et G la fonction de Green de Ω :

$$(1) \qquad \forall M \in \Omega - T_Q(2r, 2\lambda r) \quad u(M) \leq cr^{-n} u(M_{2r}) G_{M^*_{3r/2}}(M) \ .$$

(On utilise en cours de démonstration l'estimation :

$$\forall \xi \in T_Q(5r/4, 5\lambda r/4) \ , \ \forall M \in \Omega - T_Q(2r, 2\lambda r) \ , \ G^*_M(\xi) \leq cG^*_M(M^*_{3r/2})$$

qui n'est autre qu'une version du théorème 1.1 dans le cadre adjoint.)

Le lemme suivant est alors la clé de la démonstration du théorème 3.1. Il utilise les résultats de la partie 2 pour la théorie adjointe décrite par l'opérateur L^*. Il consiste à décrire une inégalité de Harnack non naturelle pour les fonctions $G.(M)$.

LEMME 3.2. — *Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 3.1. Notons G la L-fonction de Green de Ω. Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que pour tout $r \leq r_0/4$ on ait :*

$$\forall M \in [\Omega \cap (Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap \bar{T}_Q(r_0, \lambda r_0)] - T_Q(2r, 2\lambda r) \ G_{M^*_{3r/2}}(M) \leq cG_{M_{3r/2}}(M).$$

Avant de démontrer le lemme 3.2, voyons comment il permet de terminer la preuve de théorème 3.1. Grâce à l'inégalité (1) et quitte à modifier la constante c, on obtient :

$$\forall M \in [\Omega \cap (Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap \bar{T}_Q(r_0, \lambda r_0)] - T_Q(2r, 2\lambda r) u(M) \leq cr^{-n} u(M_{2r}) G_{M_{3r/2}}(M).$$

Par ailleurs, si v désigne une deuxième fonction vérifiant les hypothèses du théorème, les estimées de la fonction de Green globale, le principe de Harnack-Moser et le corollaire 1.2 nous permettent d'affirmer l'existence de constantes c et c' strictement positives telles que :

$$\forall \xi \in \partial T_{M_{3r/2}}(r/10, \lambda r/10) \quad r^{-n} G_{M_{3r/2}}(\xi) \leq c' \leq c \frac{v(\xi)}{v(M_{2r})} \ .$$

Notant τ la coordonnée temporelle du point $M_{3r/2}$ cette inégalité se propage par le principe du maximum à tout l'ensemble :

$$[\Omega \cap \{t \geq \tau\}] - T_{M_{3r/2}}(r/10, \lambda r/10) \ .$$

Le théorème 3.1 résulte alors de la comparaison des estimations des fonctions u et v.

Démonstration du lemme 3.2. — Fixons $\rho \leq r_0$ et notons w^* la L* mesure harmonique de $\partial T_Q(2\rho, 2\lambda\rho)$ dans l'ouvert $\Omega \cap T_Q(2\rho, 2\lambda\rho)$.

L'analogue du théorème 1.4 pour l'opérateur adjoint L^* nous donne par exemple :

$$\forall M \in \Omega \cap T_Q(3\rho/4, 3\lambda\rho/4) \quad \begin{cases} \frac{G_M(M_\rho)}{G_{M^*_{4\rho/5}}(M_\rho)} \leq c\frac{w^*(M)}{w^*(M_{4\rho/5})} \\ \frac{w^*(M)}{w^*(M^*_{4\rho/5})} \leq c\frac{G_M(M_\rho)}{G_{M_{4\rho/5}}(M_\rho)} \end{cases} .$$

Remarquons comme on l'a déjà fait à plusieurs reprises que les quantités $G_{M^*_{4\rho/5}}(M_\rho)$ et $G_{M_{4\rho/5}}(M_\rho)$ sont de l'ordre de ρ^{-n} . Constatons ensuite en utilisant les résultats du chapitre 2 que les quantités $w^*(M_{4\rho/5})$ et $w^*(M^*_{4\rho/5})$ sont du même ordre de grandeur. On peut alors trouver une nouvelle constante c strictement positive telle que :

(1)

$$\forall M \in \Omega \cap T_Q(3\rho/4, 3\lambda\rho/4) \; \frac{1}{c}\rho^{-n}\frac{w^*(M)}{w^*(M_{4\rho/5})} \leq G_M(M_\rho) \leq c\rho^{-n}\frac{w^*(M)}{w^*(M_{4\rho/5})}.$$

Par ailleurs, la fonction w^* vérifie le principe de Harnack uniforme décrit dans le chapitre 2. On peut entre autre trouver une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que :

$$\forall r \leq \rho/2 \quad w^*(M^*_{3r/2}) \leq cw^*(M_{3r/2}) \; . \tag{2}$$

Les estimations (1) et (2) nous permettent alors, quitte à modifier la constante c, d'écrire :

$$\forall r \leq r_0/4 \; \forall \rho \in [2r, r_0] \quad G_{M^*_{3r/2}}(M_\rho) \leq cG_{M_{3r/2}}(M_\rho) \; . \tag{3}$$

Il nous reste à étendre l'inégalité (3) à tout point M de l'ensemble :

$$[(Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap \Omega \cap \bar{T}_Q(r_0, \lambda r_0)] - T_Q(2r, 2\lambda r) \; .$$

Fixons un tel point M et notons ρ^2 la différence entre la coordonnée temporelle de M et celle de Q. $t(M)$ désignant la coordonnée temporelle de M, appliquons le principe de Harnack faible au bord dans la boite $T_Q(3\rho/2, 3\lambda\rho/2) \cap \{t \geq t(M)\}$. Il nous permet entre autre d'écrire :

$$\frac{G_{M^*_{3r/2}}(M)}{G_{M_{3r/2}}(M)} \leq c\frac{G_{M^*_{3r/2}}(M_{2\rho})}{G_{M_{3r/2}}(M_{7\rho/8})} \; . \tag{4}$$

Enfin, grâce au corollaire 1.2, on peut trouver une nouvelle constante c strictement positive telle que :

$$\begin{cases} G_{M^*_{3r/2}}(M_{2\rho}) \leq cG_{M^*_{3r/2}}(M_\rho) \\ G_{M_{3r/2}}(M_\rho) \leq cG_{M_{3r/2}}(M_{7\rho/8}) \end{cases} . \tag{5}$$

Notons que ces inégalités (obtenues par le principe du maximum lors du corollaire 1.2) constituent aussi des inégalités de Harnack à *l'envers*. La comparaison des estimations (4) et (5) permettent alors d'étendre au point M l'inégalité (3), ce qui termine la preuve du lemme 3.2.

4. ETUDE DES MINIMALES ASSOCIEES A UN POINT FRONTIERE LIPSCHITZIEN

Nous allons retrouver ici, dans le cadre des opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ l'analogue du théorème 1.7 décrit par J. T. Kemper [22] pour l'opérateur de la chaleur $\mathcal{C} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$. Notons que Kemper utilise de façon essentielle l'invariance par translations de l'opérateur $\mathcal{C}$ pour montrer son résultat. Ici, le principe de Harnack au bord nous permet de nous passer de cette hypothèse. Citons aussi Fabes Garofalo et Salsa ([12]) qui obtiennent un résultat similaire lorsque l'opérateur L et la fonction f sont indépendants du temps. Cependant, au cours de leur travail, les coefficients de la matrice A sont seulement supposés mesurables.

THÉORÈME 4.1. — *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $Q \in \partial\Omega$ tel que Ω soit lipschitzien en Q et soit $L \in \Lambda(\mu)$. Supposant que tout point de la frontière parabolique $\partial_p\Omega$ soit L-régulier (au sens de Perron-Wiener-Brelot), le cône $C_Q(\Omega)$ des L-solutions positives tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega$ autre que Q est une demi-droite engendrée par une L-solution positive minimale de Ω.*

Pour montrer que $C_Q(\Omega) \neq \{0\}$ nous utiliserons les résultats de la partie 1. Nous obtiendrons un élément non nul de $C_Q(\Omega)$ comme limite de fonctions de Green normalisées. La démonstration de $\dim C_Q(\Omega) = 1$ utilisera les résultats de la partie 3. On commencera par démontrer que deux minimales u et v de l'ensemble $C_Q(\Omega)$ vérifient l'estimation $u \leq cv$ en tout point du *cône* $\Omega \cap (Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap T_Q(r, \lambda r)$. Ayant ensuite démontré que ce *cône* est non effilé par rapport à u et v la comparaison s'étendra à Ω tout entier. On pourra alors conclure que u et v sont proportionnelles.

4.a. $C_Q(\Omega) \neq \{0\}$.

Fixons $r_0 \leq 1$ tel que $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0) \cap \Omega$ soit un domaine lipschitzien canonique. Notons G la L-fonction de Green dans Ω. Pour tout point A dans l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0/2, \lambda r_0/2)$, notons $\varphi_A(M) = G_A(M)/G_A(M_{r_0})$. Grâce au corollaire 1.2, il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que pour tout réel $r \in]0, r_0]$ on ait :

$$\forall A \in \Omega \cap T_Q(r/2, \lambda r/2) \quad \forall M \in \Omega - T_Q(r, \lambda r) \ , \quad \varphi_A(M) \leq c\varphi_A(M_r).$$

Fixons alors une suite A_n convergeant vers Q. Les inégalités précédentes et le principe de Harnack-Moser nous assurent que les φ_{A_n} sont uniformément bornées sur $\Omega - T_Q(r, \lambda r)$ si n est assez grand ($\varphi_{A_n}(M_{r_0})$ valant un). La singularité A_n sortant de tout compact de Ω, φ_{A_n} possède une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une L-solution positive dans Ω. Notons φ la limite d'une telle sous-suite et notons h_r la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(r, \lambda r)$ dans $\Omega - T_Q(r, \lambda r)$. Grâce au principe du maximum, si r ne dépasse pas r_0 et si n est assez grand, on obtient :

$$\forall M \in \Omega - T_Q(r, \lambda r) \quad \varphi_{A_n}(M) \leq c\varphi_{A_n}(M_r)h_r(M) \ .$$

Enfin, en passant à la limite $\varphi(M) \leq c\varphi(M_r)h_r(M)$. Les points de $\partial_p\Omega - \{Q\}$ étant tous réguliers, φ converge donc bien vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - \{Q\}$. φ est un élément non nul de $C_Q(\Omega)$ car il vaut un au point M_{r_0} .

4.b. $\dim(C_Q(\Omega)) = 1$.

Notons dans un premier temps que $C_Q(\Omega)$ est un cône convexe à base compacte. En effet, les inégalités de Harnack et le principe du maximum nous assurent qu'un élément de $C_Q(\Omega)$ nul en M_{r_0} est identiquement nul. Ainsi, l'ensemble des éléments de $C_Q(\Omega)$ valant 1 au point M_{r_0} est une base de $C_Q(\Omega)$. Le corollaire 1.2 et les inégalités de Harnack nous prouvent que cette base $\mathcal{B}$ est bornée dans l'ensemble des fonctions continues sur Ω. Ainsi, $\mathcal{B}$ est compacte. $C_Q(\Omega)$ étant à base compacte, grâce au théorème de Krein-Milmann, il est engendré par ses génératrices extrémales qui constituent aussi des génératrices extrémales du cône des L-solutions positives. Montrer que $C_Q(\Omega)$ est une demi-droite revient alors à montrer que deux éléments minimaux de $C_Q(\Omega)$ sont proportionnels. Ce dernier point sera une conséquence simple du théorème 3.1 et de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *On conserve les notations et les hypothèses de l'énoncé précédent. Si h est une minimale non nulle de $C_Q(\Omega)$, alors l'ensemble $\Omega \cap (Q + \mathcal{C}_\lambda)$ est non effilé en h. Plus généralement, si Q_k est une suite de points de $\tilde{\Omega} = \Omega \cap \{t > t(Q)\}$ convergeant vers Q et telle que $\liminf_{k\to\infty} \dfrac{d(Q_k, \partial\tilde{\Omega})}{d(Q_k, Q)} > 0$ et si B_k désigne une suite de boules paraboliques centrées en Q_k et de rayons proportionnels à $d(Q_k, Q)$, alors $\bigcup_k B_k$ est non effilé par rapport à h; (là encore d désigne la distance parabolique).*

Remarque. — La suite de points Q_k converge non tangentiellement (relativement à d) vers Q dans $\tilde{\Omega}$. Notons qu'une famille similaire de boules situées dans l'ensemble $\Omega \cap \{t < t(Q)\}$ est par contre effilée par rapport à h, h étant nulle dans l'ensemble $\Omega \cap \{t < t(Q)\}$.

Rappelons que si h est une L-solution minimale de Ω et E un sous-ensemble de Ω , $\hat{R}_h^E$ est égale à h ou est un potentiel dans Ω (la réduite étant prise au sens de L-sursolutions dans Ω). E est dit effilé en h si $\hat{R}_h^E$ est un potentiel.

Notons enfin avant de prouver la proposition que celle-ci constitue dans le cadre des opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ l'analogue d'un résultat établi par A. Ancona ([1], page 198) pour des opérateurs elliptiques.

Fixons $\epsilon > 0$ tel que pour tout entier k suffisamment grand on ait :

$$d(Q_k, \partial\tilde{\Omega}) \geq 4\epsilon d(Q_k, Q) = 4\epsilon r_k \ .$$

Quitte à diminuer ϵ, on peut supposer de plus que la boule B_k contient la boule $B(Q_k, \epsilon r_k)$, et il suffit alors d'établir le résultat pour $B_k = B(Q_k, \epsilon r_k)$, boule de centre Q_k de rayon ϵr_k. Supposons enfin $\epsilon < 1 \wedge \lambda$ de telle sorte que la boule B_k reste incluse dans le cylindre $T_Q(2r_k, 2\lambda r_k)$.

Pour établir que $E = \bigcup_k B_k$ est non effilé en h, il suffit de montrer que $\hat{R}_h^{B_k}(M_{r_0})$ ne tend pas vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Or, le théorème 3.1 nous assure l'existence d'une constante c_1 telle que :

$$\hat{R}_h^{B_k}(M_{r_0}) \geq c_1 \hat{R}_h^{B_k}(M_{4r_k}).\frac{h(M_{r_0})}{h(M_{4r_k})} \ .$$

Par ailleurs, on peut trouver une constante de Harnack $c_2 = c_2(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que :

$$\forall M \in B_k \ , \ h(M) \geq c_2 h(M_{\epsilon r_k}) \ .$$

L'inégalité $\hat{R}_h^{B_k} \geq c_2 h(M_{\epsilon r_k}) \hat{R}_1^{B_k}$ est alors vraie dans tout l'ensemble Ω. Ainsi, on obtient :

$$\hat{R}_h^{B_k}(M_{r_0}) \geq c_1 c_2 h(M_{r_0}).\hat{R}_1^{B_k}(M_{4r_k}).\frac{h(M_{\epsilon r_k})}{h(M_{4r_k})} \ .$$

Il est alors aisé de constater que le second membre de l'inégalité est minoré par une constante indépendante de k. La fraction $h(M_{\epsilon r_k})/h(M_{4r_k})$ est minorée grâce au corollaire 1.2. Enfin, les inégalités de Harnack et le principe du maximum nous permettent de trouver une constante c_3 telle que :

$$\hat{R}_1^{B_k}(M_{4r_K}) \geq c_3 \varphi(Q_k + (0, 2(\epsilon r_k)^2) \ ,$$

où φ est la L-mesure harmonique de ∂B_k dans $B(Q_k, 2\epsilon r_k) - B_k$. Un raisonnement similaire à celui effectué lors du lemme 1.3 nous prouve alors que la quantité $\varphi(Q_k + (0, 2(\epsilon r_k)^2)$ est minorée par une constante $c_4 = c_4(n, \mu) > 0$.

Ainsi on a prouvé que $\hat{R}_h^{B_k}(M_{r_0})$ ne tend pas vers zéro lorsque k tend vers l'infini. $\bigcup_k B_k$ est donc bien non effilé en h.

Montrons alors que deux minimales du cône $C_Q(\Omega)$ sont toujours proportionnelles. Fixons h_1 et h_2 deux telles minimales non nulles. Grâce au théorème 3.1, on peut trouver une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que :

$$\forall r \leq r_0/4 \quad \forall M \in [(Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap \Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)] - T_Q(2r, 2\lambda r) \ ,$$

$$\frac{h_1(M)}{h_1(M_{2r})} \leq c \frac{h_2(M)}{h_2(M_{2r})} \ .$$

On obtient donc en tout point M de l'ensemble $(Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap \Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$ l'inégalité :

$$\frac{h_1(M)}{h_1(M_{r_0})} \leq c^2 \frac{h_2(M)}{h_2(M_{r_0})} \ .$$

Comme l'ensemble $(Q + \mathcal{C}_\lambda) \cap \Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$ est non effilé en h_1 et h_2, en passant aux réduites, la même inégalité se propage à tout point de Ω. Ainsi il existe une constante α strictement positive telle que $h_1 \leq \alpha h_2$. Mais, la fonction αh_2 étant une L-solution minimale, h_1 est donc proportionnelle à h_2. Le cône $C_Q(\Omega)$ possède donc au plus une génératrice extrémale. Etant non réduit à $\{0\}$ et engendré par ses génératrices extrémales, c'est une demi-droite.

5. UN THEOREME DE REPRESENTATION DES L-SOLUTIONS POSITIVES

Nous démontrons ici un théorème de représentation des L-solutions positives de certains ouverts de $\mathbf{R}^{n+1}$, généralisant ainsi aux opérateurs L un théorème de J.T. Kemper ([22], page 254).

THÉORÈME 5.1. — *Soient $T_1 < T_2$ deux réels. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^{n+1}$ inclus dans $\{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}; T_1 < t < T_2\}$. On suppose que :*

(a) *Tout point de $\partial\Omega \cap \{T_1 < t < T_2\}$ est lipschitzien.*

(b) *Si* $Q = (Y, T_1) \in \partial\Omega$, *alors, ou bien* Q *est un point frontière lipschitzien d'un ouvert* $\Omega' \supset \Omega$ *vérifiant* $\Omega = \Omega' \cap \{t > T_1\}$, *ou bien* $\partial\Omega \subset \{t = T_1\}$ *au voisinage de* Q.

Si $L \in \Lambda(\mu)$ *et* $Q_0 = (X, T) \in \partial\Omega$, *on a alors :*

1. *Pour chaque point* P *de l'ensemble* $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ *il existe un unique élément du cône* $C_P(\Omega)$ *noté* K_P *valant 1 au point* Q_0.

2. K_p *désignant (si* $P \in \Omega$ *la* L*-fonction de Green de pôle* P *normalisée en* Q_0, *on a :*

$$\forall P_0 \in \partial\Omega \cap \{t < T\} \quad \forall M \in \Omega \qquad \lim_{P \to P_0, P \in \bar{\Omega}} K_P(M) = K_{P_0}(M) \ .$$

3. *Pour toute* L*-solution positive* u *dans* Ω, *il existe une unique mesure de radon positive* ν *portée par* $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ *et telle que :*

$$\forall M \in \Omega \cap \{t < T\} \quad u(M) = \int K_P(M) d\nu(P) \ .$$

Remarque. — L'ouvert Ω peut se lire comme une déformation au cours du temps d'un domaine lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Les domaines lipschitziens canoniques entrent dans le cadre de ce théorème.

Démonstration.

1. Par hypothèse, on peut trouver un ouvert $\Omega' \supset \Omega$ tel que Ω coincide avec la trace de Ω' sur le demi-espace $\{t > T_1\}$ et où les points du type b) s'interprètent soit comme des points frontière lipschitziens de Ω' (points *coin*) soit comme des points intérieurs à Ω'(points *fond*). Grace à la partie 4, seuls les points du type b) sont à analyser.

Si P est un point *coin*, grâce au principe du maximum, l'application $h \in C_P(\Omega') \longrightarrow h_{|\Omega} \in C_P(\Omega)$ est une bijection, et le résultat est établi.

Enfin si P est un point *fond* et $h \in C_P(\Omega)$, prolongeant h par 0, on obtient clairement un L-potentiel de Ω' porté par P donc une fonction proportionnelle à la L-fonction de Green dans Ω' de pôle P. Réciproquement, si φ est un L-potentiel dans Ω_1 porté par P, $\varphi_{|\Omega}$ est clairement un élément de $C_P(\Omega)$ car $\varphi_{|\Omega'-\Omega} = 0$. $C_P(\Omega)$ est encore bien une demi-droite dans ce cas.

Notons que dans tous les cas, les fonctions K_P s'obtiennent comme limites de fonctions de Green normalisées en Q_0.

2. Grâce à la continuité des fonctions de Green et à l'identification précédente, la propriété de continuité est claire aux points *fond*. De plus, les

points *coins* s'assimilant à des points *côté* de l'ouvert Ω', il suffit d'établir ce principe de continuité pour ce dernier type de points.
Soit P un tel point et soit P_n une suite de $\bar{\Omega}$ convergeant vers P. Par le corollaire 1.2 on peut trouver une constante $c > 0$ telle que pour tout entier n suffisamment grand, pour tout réel r sufisamment petit et pour tout point M dans l'ensemble $\Omega - T_P(r, \lambda r)$ on ait :

$$K_{P_n}(M) \leq cK_{P_n}(M_r) \ ,$$

où $M_r = P + (0, \lambda r, r^2)$.

Le principe du maximum assure alors en ces mêmes points l'estimation :

$$K_{P_n}(M) \leq cK_{P_n}(M_r)h_r(M) \ ,$$

où h_r est la L-mesure harmonique de $\partial T_P(r, \lambda r)$ dans $\Omega - \bar{T}_P(r, \lambda r)$.Grâce aux inégalités de Harnack, il existe donc une nouvelle constante c_r telle que :

$$K_{P_n}(M) \leq c_r K_{P_n}(Q_0)h_r(M) = c_r h_r(M) \ .$$

Cette estimation étant valable pour tout réel r strictement positif et suffisamment petit, il est alors clair que toute valeur d'adhérence de la suite K_{P_n} est dans le cône $C_P(\Omega)$. La suite K_{P_n} étant localement uniformément bornée, elle possède des valeurs d'adhérences. En évaluant au point Q_0, on conclut que K_P est l' unique valeur d'adhérence de la suite K_{P_n} et finalement, cette suite converge vers K_P.

3. Pour établir le théorème de représentation, on reprend la technique de Martin [24]. Rappelons la notion de réduite suivante :

Si A est inclus dans la frontière de Ω, et si u est une L-sursolution positive dans Ω, R_u^A désigne la borne inférieure des L-sursolutions positives dans Ω majorant u au voisinage de A (pour les propriétés de cette réduite, voir [9]).

Montrons d'abord l'unicité de la mesure. Elle va résulter du lemme suivant :

LEMME 5.2. — *Si B est un compact inclus dans $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ et si P est un point de $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ alors :*

$$R_{K_P}^B = 0 \text{ si } P \notin B \text{ et } R_{K_P}^B = K_P \text{ si } P \in B \ .$$

En effet, si P n'appartient pas à B, et si ϵ est strictement positif, K_P est inférieur à ϵ au voisinage de B donc $R_{K_P}^B$ est inférieur à ϵ partout (ϵ est une L-solution). Par contre, si P appartient à B et s est une L-sursolution

positive majorant K_P au voisinage de B, alors $\liminf_{\xi \to P}(s(\xi) - K_P(\xi)) \geq 0$. Comme par ailleurs K_P tend vers zéro en tout point de $\partial\Omega \cap \{t < T_2\}$ différent de P on en déduit par le principe du maximum l'inégalité $K_P \leq s$. On obtient alors $K_P \leq R^B_{K_P}$ ce qui constitue l'inégalité non triviale entre les deux fonctions.

Soit alors ν une mesure représentant u. Fixons un compact B inclus dans $\partial\Omega \cap \{t < T\}$. La notion de réduite étant additive, elle commute à la représentation intégrale. Ainsi grâce au lemme 5.2, on obtient en évaluant au point Q_0 :

$$R^B_u(Q_0) = \int R^B_{K_P}(Q_0)d\nu(P) = \int_B K_P(Q_0)d\nu(P) = \nu(B) \ .$$

La mesure ν est donc parfaitement déterminée sur les compacts de $\partial\Omega \cap \{t < T\}$. Par régularité, elle est donc déterminée sur tous les boréliens.

Pour prouver l'existence, commençons par fixer un compact B inclus dans $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ puis considérons une suite B_n de voisinages ouverts de B décroissant vers B. Fixons un entier n et un compact σ inclus dans $B_n \cap \Omega$. $\hat{R}^\sigma_u$ étant un potentiel porté par $\partial\sigma$, il existe une mesure positive ν_σ telle que :

$$\hat{R}^\sigma_u(M) = \int_\sigma K_P(M)d\nu_\sigma(P) \ .$$

L'évaluation en Q_0 assure que $\nu_\sigma(\sigma) \leq u(Q_0)$. La famille ν_σ a donc une valeur d'adhérence (au sens de la convergence vague) lorsque σ croit vers $B_n \cap \Omega$. Notons ν_n une telle valeur d'adhérence (portée par $\overline{B_n \cap \Omega}$). Par les propriétés de continuité des noyaux, on a alors :

$$\forall M \in \Omega - \overline{B_n \cap \Omega} \quad \hat{R}^{B_n \cap \Omega}_u(M) = \int K_P(M)d\nu_n(P) \ .$$

Toujours en évaluant au point Q_0, on obtient $\int d\nu_n \leq u(Q_0)$. La suite ν_n possède donc elle aussi une sous-suite convergeant vaguement vers une mesure ν^B portée par B et telle que $R^B_u(M) = \int K_P(M)d\nu^B(P)$ dans Ω. Enfin les mesures ν^B étant toujours bornées en masse par $u(Q_0)$ on obtient toujours par le même raisonnement en faisant croître B vers $\partial\Omega \cap \{t<T\}$ l'existence d'une mesure ν telle que :

$$\forall M \in \Omega, \quad R^{\partial\Omega \cap \{t<T\}}_u(M) = \int K_P(M)d\nu(P) \ .$$

On conclut en constatant que $R^{\partial\Omega \cap \{t<T\}}_u$ coincide avec u dans $\Omega \cap \{t < T\}$.

6. EXISTENCE DE LIMITES NON TANGENTIELLES A LA FRONTIERE

Nous étendons ici le résultat de J. T. Kemper ([22], théorème 2.6) aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$. Nous allons donc démontrer que les L-solutions positives possèdent des limites non tangentielles en presque tout point de la partie lipschitzienne de la frontière de Ω (le presque partout étant relatif à la mesure harmonique).

Rappelons aussi que R. A. Hunt et R. L. Wheeden ([19] et [20]) ont démontré un résultat semblable pour les fonctions harmoniques positives usuelles dans les ouverts lipschitziens de $\mathbf{R}^n$. Ce résultat a ensuite été étendu par A. Ancona ([1]) aux opérateurs elliptiques. Enfin, Fabes, Garofalo et Salsa ([12]) ont démontré un résultat similaire dans le cadre parabolique mais pour des ouverts cylindriques en temps et pour des opérateurs indépendants du temps et à coefficients uniquement mesurables.

Définissons tout d'abord la notion de convergence non tangentielle :

DÉFINITION 6.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$ et u une fonction dans Ω. Si $Q \in \partial\Omega$, on dit que u converge non tangentiellement vers ℓ au point Q si pour toute suite Q_n de Ω tendant vers Q et vérifiant $\inf_n d(Q_n, \partial\Omega)/d(Q_n, Q) > 0$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} u(Q_n) = \ell\,.$$

d désigne toujours la distance parabolique).

THÉORÈME 6.2. — *Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Soit (X,T) un point de Ω joignable au point $Q + (0, \lambda r_0, r_0^2)$ par une courbe strictement décroissante en temps. Soit $L \in \Lambda(\mu)$ et h une L-solution positive dans Ω. Alors, si $\mu_{(X,T)}$ désigne la L-mesure harmonique au point (X,T) dans Ω, h admet une limite non tangentielle en $\mu_{(X,T)}$ presque tout point de $\Delta = \partial\Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$.*

La démonstration que nous donnons du théorème 6.2 reprend des idées de Doob ([8]). Elle utilise le théorème de Fatou abstrait ([28]) ainsi que la proposition 4.2. Faisons tout d'abord la réduction suivante : notons T le domaine lipschitzien canonique $\Omega \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ et m la L-mesure

harmonique dans T au point $A = Q + (0, r_0, 2r_0^2)$. Pour tout borélien B de Δ, on a :

$$m(B) = \mu_A(B) - \hat{R}^{T^c}_{\mu.(B)}(A) \ .$$

Ainsi, $\mu_{(X,T)}$ et m sont équivalentes sur Δ (la nullité de $\mu_{(X,T)}(B)$ entrainant si B est inclus dans Δ la nullité de $\mu.(B)$ dans tout l'ensemble Ω). On peut donc supposer $\Omega = T$ et $Q_0 = A$.

On se place désormais dans le cadre de cette réduction. On peut ainsi utiliser dans Ω le théorème de représentation de la partie 5. Les minimales K_p sont supposées être normalisées au point $Q_0 = (X, T) = Q + (0, \lambda r_0, 2r_0^2)$.

LEMME 6.3. — *Soit P un point de Δ. Soit P_k une suite de points convergeant non tangentiellement vers P dans Ω. Il existe une constante c dépendant de n, λ, μ, et de la suite P_k (mais ne dépendant pas de la fonction h) telle que si h converge finement vers ℓ en K_P, alors :*

$$\limsup_{k\to\infty} h(P_k) \leq c\ell \ .$$

En effet, sous les hypothèses du lemme, on peut construire une suite de points Q_k et une suite de boules B_k vérifiant les hypothèses de la proposition 4.2 telles que la distance de P_k à B_k soit de l'ordre de la distance de P_k à P. On peut de plus supposer que P_k soit antérieur à B_k de telle sorte qu'on puisse écrire les inégalités de Harnack :

$$\forall M \in B_k \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \quad h(P_k) \leq ch(M) \ ,$$

où la constante c ne dépend ni de k ni de h. De plus, si ϵ est strictement positif, il existe un ensemble $\mathcal{F}$ non effilé en K_P tel que :

$$\forall M \notin \mathcal{F} \quad h(M) \leq \ell + \epsilon \ .$$

Grâce à la proposition 4.2 , le complémentaire de $\mathcal{F}$ va rencontrer les boules B_k à partir d'un certain rang. Ainsi, on a :

$$\limsup_{k\to\infty} h(P_k) \leq c(\ell + \epsilon) \ .$$

Le réel ϵ étant arbitraire, le lemme est ainsi démontré.

La démonstration du théorème est alors simple en utilisant le théorème de Fatou abstrait ([28]). On constate tout d'abord que la fonction $\mathbb{1}$ est représentée par la mesure $\mu_{(X,T)}$. Plus généralement, si K est un compact de $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ et M un point de $\Omega \cap \{t < T\}$, on a :

$$\mu_M(K) = R^K_{\mathbb{1}}(M) = \int_K K_P(M) d\mu_{(X,T)}(P) \ .$$

Assimilant grâce au théorème 5.1 les points frontières de $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ et les L-solutions positives minimales de Ω non nulles en (X,T) , le théorème de Fatou abstrait nous dit alors que si H est la mesure représentant h, la fonction h converge finement vers $\dfrac{dH}{d\mu_{(X,T)}}$ en $\mu_{(X,T)}$ presque tout point de $\partial\Omega \cap \{t < T\}$. En particulier, si la mesure H est étrangère à $\mu_{(X,T)}$, la conclusion du théorème 6.2 est acquise grâce au lemme 6.3 (la limite non tangentielle étant nulle en $\mu_{(X,T)}$ presque tout point de Δ). Il suffit donc de traiter le cas où H est absolument continue par rapport à $\mu_{(X,T)}$, c'est à dire le cas où $dH = f d\mu_{(X,T)}$.

Comme Doob ([8]), on commence par regarder les cas où f est une fonction simple. Si $f = \mathbb{1}_E$, le lemme 6.3 et le théorème de Fatou nous apprennent que h converge non tangentiellement vers zéro en $\mu_{(X,T)}$ presque tout point de $\Delta - E$. En appliquant le même raisonnement à la fonction $1 - h$, on obtient que h converge non tangentiellement vers 1 en $\mu_{(X,T)}$ presque tout point de $\Delta \cap E$. Par linéarité , la conclusion du théorème reste acquise si f est une fonction étagée. Le cas général se traite par un argument d'approximation. Ecrivons f comme une limite croissante d'une suite f_p de fonctions étagées et appelons h_p la L-solution représentée par la mesure $f_p d\mu_{(X,T)}$. On peut trouver un ensemble $\mu_{(X,T)}$ négligeable $\mathcal{N}$ tel qu'en tout point P de $\Delta - \mathcal{N}$ et pour tout entier p, h_p converge non tangentiellement (et finement) en P vers $f_p(P)$. Supposons de plus qu'en P, h converge finement vers $f(P)$ et fixons une suite P_k convergeant non tangentiellement vers P. La croissance de la suite f_p nous assure :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f_p(P) \leq \liminf_{k\to\infty} h(P_k) \ .$$

On a donc : $f(P) \leq \liminf_{k\to\infty} h(P_k)$. Enfin, le lemme 6.3 nous apprend l'existence d'une constante c indépendante de p telle que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \limsup_{k\to\infty}(h(P_k) - h_p(P_k)) \leq c(f(P) - f_p(P)) \ .$$

On en déduit :

$$\limsup_{k\to\infty} h(P_k) \leq c(f(P) - f_p(P)) + f_p(P) \ ,$$

ce qui permet de conclure en faisant tendre p vers l'infini.

7. ESTIMATIONS DE LA MESURE HARMONIQUE

Dans toute cette partie, $\omega_f = T_Q(2r_0, 2\lambda r_0) \cap \{x_n \geq f(x',t)\}$ désigne un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. On

note M_0 (resp. M_0^*) le point $Q+(O,\lambda r_0,2r_0^2)$ (resp. $Q+(0,\lambda r_0,-2r_0^2)$) et Δ la partie de la frontière $\partial\omega_f \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$. On cherche à comparer dans Δ la L-mesure harmonique μ_{M_0} , la L^*-mesure harmonique $\mu^*_{M_0^*}$ et la mesure σ, image de la mesure de Lebesgue par l'application $(x',t) \longrightarrow (x',f(x',t),t)$. On va ainsi préciser les résultats obtenus par Jang-Mei Wu dans [30] et par Robert Kaufman et Jang-Mei Wu dans [21]. Rappelons tout d'abord ces résultats.

THÉORÈME A ([30]). — *Ici, $L = \mathcal{C} = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$. Soit E un sous ensemble de Δ négligeable pour la mesure σ. Alors il existe une décomposition de E de la forme $E = F \cup F^*$ vérifiant :*

$$\mu_{M_0}(F) = 0 \quad et \quad \mu^*_{M_0^*}(F^*) = 0 \ .$$

THÉORÈME B ([21]). — *Ici n est égal à 1. Il existe une fonction f lipschitzienne (relativement à d) telle que les mesures σ, $\mu_{M_0}|_\Delta$ et $\mu^*_{M_0^*}|_\Delta$ soient deux à deux étrangères.*

Remarque. — La mesure σ sera appelée *mesure de surface* sur Δ. Cependant, cette mesure n'est en général pas équivalente à la mesure de Hausdorff n-dimensionnelle. La propriété vérifiée par la fonction f nous permet uniquement d'affirmer que son graphe Δ a une dimension de Hausdorff comprise entre n et $n+1/2$. En particulier, sur Δ, la mesure n-dimensionnelle peut être identique à l'infini. C'est du reste ce qui se produit dans le contre-exemple développé par R. Kaufman et J.M. Wu, le graphe construit étant partout localement de dimension de Hausdorff 3/2 (dans ce contre-exemple, $n = 1$). Cependant, on peut aussi considérer la théorie de la dimension lorsqu'on munit l'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ de la distance parabolique d. L'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ est alors un espace métrique de dimension $n+2$, la mesure $n+2$-dimensionnelle étant équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^{n+1}$. Le graphe Δ d'une fonction lipschitzienne par rapport à d est un ensemble de dimension $n+1$ et la mesure σ est alors équivalente à la mesure $n+1$-dimensionnelle. C'est pour ces raisons que nous appellerons malgré tout σ la "*mesure de surface*" sur Δ.

Nous allons obtenir l'équivalence des mesures σ, $\mu_{M_0}|_\Delta$ et $\mu^*_{M_0^*}|_\Delta$ lorsque la fonction f est un peu plus régulière. C'est l'objet des deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 7.1. — *Soient $r_0 \leq 1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Supposons de plus qu'il existe deux constantes $\epsilon \in]0,1/2]$ et $K \in$*

$]0,\infty[$ *telles qu'en tous points du domaine de définition de f on ait :*

$$| f(x',t) - f(y',s) | \leq K \| x' - y' \| \vee | t - s |^{\epsilon+1/2} .$$

Alors, il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon, K)$ strictement positive telle que :

$$\frac{1}{c}\mu^*_{M_0^*} |_\Delta \leq \mu_{M_0} |_\Delta \leq c\mu^*_{M_0^*} |_\Delta .$$

Ainsi les mesures $\mu_{M_0} |_\Delta$ et $\mu^*_{M_0^*} |_\Delta$ sont équivalentes, la densité de l'une par rapport à l'autre étant de plus dans L^∞.

THÉORÈME 7.2. — *Les mesures μ_{M_0} et σ sont aussi équivalentes dans Δ. De plus, la densité de μ_{M_0} par rapport à σ est dans l'espace $L^2(\sigma)$, sa norme dans $L^2(\sigma)$ étant contrôlée par une constante ne dépendant que des constantes géomètriques du problème.*

Remarque. — En raison du principe du maximum vérifié par les opérateurs L et L^*, si l'on veut espérer comparer la mesure harmonique et la mesure harmonique adjointe dans Δ, le point M_0^* doit être *antérieur* à l'ensemble Δ et le point M_0 doit être *postérieur* à Δ.

Rappelons que B. Dahlberg a montré ([7]) dans les domaines lipschitziens l'équivalence entre la mesure harmonique (pour l'opérateur du laplacien) et la mesure de surface. A. Ancona ([4]) a généralisé ce résultat à certains opérateurs elliptiques. Du reste pour démontrer le théorème 4.2, nous reprendrons certaines idées de [4] et [9]. Enfin, lorsque $n = 1$ et $L = \mathcal{C}$, J. Lewis et J. Silver ([23]) ont décrit une condition (la meilleure qui soit en termes de module de continuité de f) assurant l'équivalence entre les trois mesures décrites précédemment.

7.a. Equivalence entre mesure harmonique et mesure harmonique adjointe.

Nous commençons par donner une comparaison entre la mesure harmonique et la fonction de Green de l'ouvert ω_f . C'est l'objet du lemme 7.3. Il généralise aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ le lemme 2.2, page 175 démontré par J.M. Wu ([30]). Nous allons l'obtenir facilement à l'aide du principe de Harnack au bord, ce principe nous permettant de nous passer de toute invariance par translation de l'opérateur L. Ce lemme n'utilise pas l'hypothèse de régularité supplémentaire sur f décrite lors des théorèmes 7.1 et 7.2.

LEMME 7.3. — *Pour tout point $P = (X', X_n, T)$ de l'ensemble $\partial\omega_f \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$, on note $\Delta_r(P)$(lorsque ça a un sens) la partie du bord :*

$$\Delta_r(P) = \{(x', x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; \| x' - X' \|_\infty < r \ , \ | t - T | < r^2 \ , \ x_n = f(x', t)\}.$$

Si G désigne la L-fonction de Green de l'ouvert ω_f, Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit on ait :

$$\forall P \in \Delta \quad \frac{1}{c}\mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leq r^n G_{P+(0,\lambda r,0)}(M_0) \leq c\mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \ ,$$

cette estimation étant encore valable pour tout borélien compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$

Démonstration. — Fixons un point P dans l'ensemble Δ, notons P_r le point $P + (0, \lambda r, r^2)$ et appliquons le principe de Harnack au bord dans l'ouvert $\omega_f \cap T_P(r_0, \lambda r_0)$. Comme $\Delta_r(P)$ reste inclus dans le cylindre $T_P(r', \lambda r')$ où $r' = \sqrt{n-1}r$, on obtient entre autre si $2r'$ ne dépasse pas $r_0/8$:

$$(1) \qquad \frac{1}{c}\frac{\mu_{P_{4r'}}(\Delta_r(P))}{G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{4r'})} \leq \frac{\mu_{P_{r_0/2}}(\Delta_r(P))}{G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{r_0/2})} \leq c\frac{\mu_{P_{4r'}}(\Delta_r(P))}{G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{4r'})} \ .$$

Grâce aux inégalités de Harnack et aux estimations de la fonction de Green données en introduction, $G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{4r'})$ est de l'ordre de r^{-n}.

On constate ensuite que $\mu_{P_{4r'}}(\Delta_r(P))$ est de l'ordre d'une constante. En effet, notons $\mathcal{O}$ l'ouvert $P + T_P(r/2, \lambda r/2) \cap \{x_n > -\lambda \| x' \| \vee | t |^{1/2}\}$ et notons h la L-mesure harmonique de $\partial T_P(r/2, \lambda r/2)$ dans $\mathcal{O}$. Grâce au principe du maximum, on a l'estimation $\mu_M(\Delta_r(P)) \geq 1 - h(M)$ dans l'ouvert $\mathcal{O} \cap \omega_f$. En utilisant la technique du lemme 1.3, on montre alors l'existence d'une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que :

$$(2) \qquad \forall M \in T_P(r/4, \lambda r/4) \cap \omega_f \quad \mu_M(\Delta_r(P)) \geq c \ .$$

Ainsi grâce aux inégalités de Harnack, $\mu_{P_{4r'}}(\Delta_r(P))$ est aussi minorée par une constante.

Enfin, les inégalités de Harnack et le corollaire 1.2 nous donnent :

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{1}{c}G_{P+(0,\lambda r,0)}(M_0) \leq G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{r_0/2}) \leq cG_{P+(0,\lambda r,0)}(M_0) \\ \\ \frac{1}{c}\mu_{P_{r_0/2}}(\Delta_r(P)) \leq \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leq c\mu_{P_{r_0/2}}(\Delta_r(P)) \end{cases} .$$

Cette succession de comparaisons fournit l'estimation du lemme 7.3.

Nous allons maintenant comparer sous les hypothèses du théorème 7.1 la mesure harmonique et la mesure harmonique adjointe de $\partial T_Q(2r_0, \lambda r_0)$ dans ω_f. C'est le point clé de la démonstration du théorème.

LEMME 7.4. — *Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 7.1 et notons, (comme lors de la partie 2) w (resp. w^* la L-mesure harmonique (resp. L^*-mesure harmonique) de $\partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ dans ω_f . Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon, K)$ strictement positive telle que :*

$$\forall M \in \omega_f \cap T_Q(r_0, \lambda r_0) \quad \frac{1}{c} w^*(M) \leq w(M) \leq c w^*(M) \ .$$

Démonstration. — Il suffit de l'établir pour des points $M = (x', x_n, t)$ vérifiant de plus $\mid x_n - f(x', t) \mid \leq r_0/2$, les fonctions w et w^* étant de l'ordre d'une constante aux autres points considérés.

Introduisons les portions de ω_f du type $\omega_f \cap T_P(r_0, \lambda r_0)$ où P est un point de $\partial\omega_f \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. En utilisant le principe de Harnack faible au bord pour comparer w (resp. w^*) à la L-mesure harmonique (resp. L^*-mesure harmonique) de $\partial T_P(r_0, \lambda r_0)$dans $\omega_f \cap T_P(r_0, \lambda r_0)$, on se ramène à établir l'estimation pour les points M situés sur l'axe $Q + \mathbf{R}^+.(0, 1, 0)$. On peut ensuite par homogénéité supposer $Q = 0$ et $r_0 = 1$.

En utilisant le théorème 2.4 (et son homologue pour l'opérateur L^*), on peut geler au point 0 les coefficients de la matrice A qui décrit L et donc supposer que L est un opérateur à coefficients constants.

Considérons alors le graphe *tangent* à f décrit par $g(x', t) = f(x', 0)$. Il vérifie vis à vis de f l'approximation :

$$\mid g(x', t) - f(x', t) \mid \leq K[d[(x', t), 0]]^{1+2\epsilon} \ .$$

Grâce au théorème 2.2, on peut donc aussi supposer que f ne dépend pas de t.

Plaçons-nous alors dans l'ouvert de $\mathbf{R}^n$: $\{x \in \mathbf{R}^n; (x, 0) \in \omega_f\}$. C'est un ouvert lipschitzien de $\mathbf{R}^n$ et notons $\varphi(x)$ la mesure harmonique dans cet ouvert de $\{x \in \mathbf{R}^n; (x, 0) \in \partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)\}$ pour l'opérateur à coefficients constants sur $\mathbf{R}^n$ $\operatorname{div}(A\nabla_x)$. f ne dépendant pas de t et L étant à coefficients constants, la fonction $h(x, t) = \varphi(x)$ constitue alors une L-solution (et une L^*-solution!) dans ω_f nulle sur $\partial\omega_f \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Grâce au principe de Harnack faible au bord, on a la comparaison $h/c \leq w \leq ch$ dans l'ensemble $\omega_f \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. Mais, en utilisant la version adjointe du théorème 1.4, on a aussi dans ce même ensemble l'estimation $h/c \leq w^* \leq ch$. Ces deux comparaisons assurent la conclusion du lemme.

La démonstration du théorème 7.1 est alors très simple. Avec les notations du lemme 7.4, et grâce au principe de Harnack faible au bord et au lemme 7.3, on peut trouver une nouvelle constante $c = c(n, \lambda, \mu)$

strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit on ait :

$$\forall P \in \Delta \quad \frac{r^n}{cr_0^n} w^*(P + (0, \lambda r, 0)) \leq \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leq \frac{cr^n}{r_0^n} w^*(P + (0, \lambda r, 0)) \ .$$

De même pour la théorie adjointe, on a :

$$\forall P \in \Delta \quad \frac{r^n}{cr_0^n} w(P + (0, \lambda r, 0)) \leq \mu^*_{M_0^*}(\Delta_r(P)) \leq \frac{cr^n}{r_0^n} w(P + (0, \lambda r, 0)) \ .$$

En utilisant le lemme 7.4 on trouve finalement une constante $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon, K)$ strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit et pour tout point P dans l'ensemble Δ on ait :

$$\frac{1}{c} \mu^*_{M_0^*}(\Delta_r(P)) \leq \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leq c\mu^*_{M_0^*}(\Delta_r(P)) \ .$$

Cette inégalité est encore vraie pour tous les boréliens compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$. Tout ouvert de Δ s'écrivant comme réunion au plus dénombrable et disjointe de tels boréliens, l'inégalité se propage à tout ouvert de Δ. Par régularité des mesures on obtient finalement l'estimation souhaitée pour tout borélien de Δ.

7.b. Equivalence entre mesure harmonique et mesure de surface.

Reprenant des idées de [7] et [4] nous allons commencer par démontrer l'équivalence entre mesure harmonique et mesure de surface lorsque le graphe est plus régulier. Ensuite nous chercherons à estimer la norme L^2 de la densité de la mesure harmonique par rapport à la mesure de surface. Cette estimation nous permettra par un argument d'approximation d'obtenir le résultat dans le cas général.

Considérons donc dans un premier temps un ouvert lipschitzien canonique ω_f vérifiant les hypothèses du théorème 7.2, la fonction f étant de plus de classe C^2 (f de classe $C^{1\ 2\epsilon}$ en x' et $1/2 + \epsilon$ hölderienne en t suffirait). Grâce au corollaire 2.8 écrit pour l'opérateur L^*, il existe une constante c strictement positive dépendant ici aussi de l'ouvert ω_f telle que pour r suffisamment petit, on ait :

$$\forall P \in \Delta \ , \ \frac{1}{c} r \leq w^*(P + (0, \lambda r, 0)) \leq cr \ .$$

En utilisant le lemme 7.3 ainsi que le principe de Harnack faible au bord, on trouve alors une nouvelle constante c strictement positive (dépendant aussi de r_0) telle que :

$$\forall P \in \Delta \ , \ \frac{1}{c} r^{n+1} \leq \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leq cr^{n+1} \ .$$

Comme par définition $\sigma(\Delta_r(P))$ vaut r^{n+1}, on obtient en fait :

$$\forall P \in \Delta \ , \ \frac{1}{c}\sigma(\Delta_r(P)) \leq \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leq c\sigma(\Delta_r(P)) \ .$$

Cette inégalité est encore valable pour tout borélien compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$. Elle s'étend alors aux ouverts de Δ puis par régularité aux boréliens de Δ. En particulier, les mesures σ et $\mu_{M_0}|_\Delta$ sont équivalentes, la densité de l'une par rapport à l'autre étant de plus dans L^∞. Cependant, la norme dans L^∞ de cette densité dépend de constantes liées à la différentiabilité de la fonction f. C'est pourquoi, comme dans [7] et [4], nous allons plutôt chercher à contrôler la norme dans $L^2(\sigma)$ de la densité de $\mu_{M_0}|_\Delta$ par rapport à σ. Pour y parvenir, comme A. Ancona dans [4], nous allons nous ramener au cas où l'opérateur L ne dépend pas de la variable x_n. Ceci sera possible grâce au lemme suivant qui est l'analogue du corollaire 6 de [4] dans notre cadre.

LEMME 7.5. — *Soient $r_0 \in]0,1]$ et ω_f un domaine lipschitzien adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. On n'impose pas ici de régularité supplémentaire sur f. Soient L_1 et L_2 deux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ dont les matrices A_1 et A_2 coïncident sur le graphe de f. Notant μ_i la L_i la mesure harmonique dans ω_f au point $M_0 = Q + (0, \lambda r_0, 2r_0^2)$, il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que :*

$$\frac{1}{c}\mu_2|_\Delta \leq \mu_1|_\Delta \leq c\mu_2|_\Delta \ .$$

Démonstration. — Notons w_i^* la L_i^* mesure harmonique de $\partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ dans ω_f. w_1^* et w_2^* vont être comparables dans $\omega_f \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. C'est une conséquence immédiate du théorème 2.4 écrit pour la théorie duale, le principe de Harnack faible au bord pour les opérateurs L_1^* et L_2^* nous permettant de n'avoir à effectuer cette comparaison que sur l'axe $Q + \mathbf{R}^+.(0,1,0)$.

De plus, grâce au lemme 7.3 et au principe de Harnack faible au bord, on peut trouver une constante c strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit on ait :

$$\forall P \in \Delta \ , \ \begin{cases} \mu_1(\Delta_r(P)) \leq c\frac{r^n}{r_0^n} w_1^*(P + (0, \lambda r, 0)) \\ \mu_2(\Delta_r(P)) \geq \frac{1}{c}\frac{r^n}{r_0^n} w_2^*(P + (0, \lambda r, 0)) \end{cases} .$$

Ainsi, quitte à modifier la constante c, on obtient :

$$\mu_1(\Delta_r(P)) \leq c\mu_2(\Delta_r(P)).$$

Cette inégalité est aussi vraie pour les boréliens compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$. Comme précédemment, on peut alors conclure que $\mu_1 |_\Delta \leq c\mu_2 |_\Delta$. Les mesures μ_1 et μ_2 jouant des rôles similaires, la deuxième inégalité est aussi vérifiée.

LEMME 7.6. — *Soit $L \in \Lambda(\mu)$. On se place sous les hypothèses du théorème 7.2 et on suppose en plus que f est la restriction d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 et globalement lipschitzienne par rapport à d. Notant φ la densité de $\mu_{M_0} |_\Delta$ par rapport à σ, il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon, K)$ strictement positive telle que :*

$$\int_\Delta \varphi^2 d\sigma \leq \frac{c}{r_0^{n+1}} .$$

Démonstration. — Comme nous l'avons déjà évoqué, en reprenant une idée de [4], nous pouvons supposer que l'opérateur L ne dépend pas de la variable x_n. En effet, le lemme 7.5 nous apprend que dans Δ, μ_{M_0} est du même ordre que la mesure harmonique en ce même point pour l'opérateur $L_1 = \dfrac{\partial}{\partial t} - \mathrm{div} A_1 \nabla_x$ où $A_1(x,t) = A(x', f(x',t), t)$.

Supposons donc l'opérateur L indépendant de x_n. Notons encore w la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ dans ω_f. Grâce aux lemmes 7.3, 7.4 et au principe de Harnack faible au bord, il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon, K)$ strictement positive telle que pour tout réel r suffisamment petit, on ait :

$$\forall P \in \Delta \quad \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leq c\frac{r^n}{r_0^n} w(P + (0, \lambda r, 0)) ,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\mu_{M_0}(\Delta_r(P))}{\sigma(\Delta_r(P))} \leq \frac{c}{r_0^n} . \frac{w(P + (0, \lambda r, 0))}{r} .$$

Mais, l'opérateur L ne dépendant pas de x_n , le principe du maximum nous apprend que la fonction $\dfrac{\partial w}{\partial x_n}$ est donc une L-solution positive. En utilisant le théorème 6.1, elle admet donc des limites radiales en μ_{M_0}-presque tout point de Δ.

Appelons encore $\dfrac{\partial w}{\partial x_n}(P)$ ces limites radiales aux points P de Δ où elles existent. La mesure σ vérifiant l'hypothèse $\sigma(\Delta_{2r}(P)) \leq c\sigma(\Delta_r(P))$, le quotient $\mu_{M_0}(\Delta_r(P))\, \sigma(\Delta_r(P))$ converge vers $\varphi(P)$ en σ-presque tout point de Δ lorsque r converge vers 0 (voir Rudin ([26])).

Ainsi, les mesures $d\sigma$ et $d\mu_{M_0}|_\Delta$ étant équivalentes, on peut trouver grâce au théorème des accroissements finis, une nouvelle constante c strictement positive telle qu'en μ_{M_0}-presque tout point P de Δ on ait :

$$\varphi(P) \leq \frac{c}{r_0^n}\frac{\partial w}{\partial x_n}(P) .$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_\Delta \varphi^2(P)d\sigma(P) &= \int_\Delta \varphi(P)d\mu_{M_0}(P)\\ &\leq \frac{c}{r_0^n}\int_\Delta \frac{\partial w}{\partial x_n}(P)d\mu_{M_0}(P)\\ &\leq \frac{c}{r_0^n}\liminf_{r\to 0}\int_\Delta \frac{\partial w}{\partial x_n}(P+(0,r,0))d\mu_{M_0}(P) .\end{aligned}$$

Notons ω_f^r l'ouvert $\omega_f \cap T_Q(2r_0, 2\lambda r_0 - r)$ et $\mu_{M_0}^r$ la L-mesure harmonique au point M_0 dans cet ouvert. On peut trouver une nouvelle constante c strictement positive telle que, pour r suffisamment petit, on ait la comparaison $\mu_{M_0}|_\Delta \leq c\mu_{M_0}^r|_\Delta$. Ce résultat s'obtient aisément grâce au lemme 7.3 et au principe de Harnack faible au bord qui permet de comparer les fonctions de Green adjointes des deux ouverts ω_f et ω_f^r. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_\Delta \varphi^2(P)d\sigma(P) &\leq \frac{c}{r_0^n}\liminf_{r\to 0}\int_\Delta \frac{\partial w}{\partial x_n}(P+(0,r,0))d\mu_{M_0}^r(P)\\ &\leq \frac{c}{r_0^n}\liminf_{r\to 0}\frac{\partial w}{\partial x_n}(M_0+(0,r,0))\\ &= \frac{c}{r_0^n}\frac{\partial w}{\partial x_n}(M_0) .\end{aligned}$$

Par ailleurs, appelons M_1 le point $Q + (0, 9\lambda r_0/10, 3r_0^2)$ et M_2 le point $Q + (0, 11\lambda r_0/10, 3r_0^2)$. On a $w(M_1) \geq \alpha(n,\lambda,\mu) > 0$ et $w(M_2) \leq 1$. Donc grâce au théorème des accroissements finis, il existe une constante c strictement positive et un point M_3 du segment $[M_1, M_2]$ tels que $\frac{\partial w}{\partial x_n}(M_3) \leq \frac{c}{r_0}$. Les inégalités de Harnack nous assurent alors l'existence d'une nouvelle constante c strictement positive telle que $\frac{\partial w}{\partial x_n}(M_0) \leq \frac{c}{r_0}$.

On obtient finalement :

$$\int_\Delta \varphi^2 d\sigma \leq \frac{c}{r_0^{n+1}} .$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

On va maintenant généraliser cette estimation à tout graphe vérifiant les hypothèses du théorème 7.2 mais n'ayant plus nécessairement la

régularité C^2. On retrouve alors dans ce nouveau cadre l'analogue d'une estimation de Dahlberg ([7]).

LEMME 7.7. — *On se place sous les hypothèses du théorème 4.2 f n'a plus nécessairement la régularité C^2 . Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu, \epsilon, K)$ strictement positive telle que pour tout borélien E inclus dans Δ on ait :*

$$\mu_{M_0}(E) \leq \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\sigma(E)} \, .$$

Démonstration. — f se prolonge à $\mathbf{R}^n$ en une fonction lipschitzienne par rapport à la distance parabolique (avec même constante de Lipschitz). A l'aide d'une approximation de l'unité de classe C^2, on peut alors trouver des fonctions f_k vérifiant les hypothèses du lemme 7.6 et décroissant vers f, la convergence étant uniforme sur tout compact. Notons μ_M^k la L-mesure harmonique au point M dans le cylindre ω_{f_k} et σ_k la projection de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^n$ sur le graphe $x_n = f_k(x', t)$. Considérons toutes ces mesures comme des mesures de Radon sur $\mathbf{R}^{n+1}$. Fixons dans un premier temps un compact K inclus dans Δ, un ouvert Ω de $\mathbf{R}^{n+1}$ contenant K et inclus dans $T_Q(r_0, \lambda r_0)$ et enfin K' un voisinage compact de K dans $\mathbf{R}^{n+1}$ inclus dans Ω. Soit ψ une fonction continue à support compact vérifiant $\mathbb{1}_{K'} \leq \psi \leq \mathbb{1}_\Omega$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le lemme 7.6, on a pour tout entier k :

$$\int \psi d\mu_{M_0}^k \leq \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\int \psi^2 d\sigma_k} \, .$$

Appelons K_k le projeté de K sur le graphe de f_k. En utilisant les barrières construites lors du lemme 1.3, il existe une constante $\alpha = \alpha(n, \lambda, \mu, r_0, K')$ strictement positive telle que pour tout entier k suffisamment grand et pour tout point P dans l'ensemble K_k on ait :

$$[d(M, P) < \alpha \text{ et } M \in T_Q(2r_0, 2\lambda r_0) \cap \{x_n > f_k(x', t)\}] \Longrightarrow \int \psi d\mu_M^k \geq \frac{1}{2} \, .$$

Entre autre, si k est assez grand, la propriété est vraie en tout point de K. Par le principe du maximum, on a alors en tout point M de l'ouvert ω_f :

$$\int_K d\mu_M \leq 2 \int \psi d\mu_M^k .$$

Par suite, il existe une nouvelle constante c telle que pour tout entier k assez grand :

$$\mu_{M_0}(K) \leq \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\int \psi^2 d\sigma_k} \, .$$

La suite f_n convergeant simplement vers f, la suite σ_k converge vaguement vers la mesure σ, projection de la mesure de Lebesgue sur le graphe de f. On obtient donc finalement :

$$\mu_{M_0}(K) \leq \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\int \psi^2 d\sigma} \leq \frac{c\sqrt{\sigma(\Omega)}}{r_0^{(n+1)/2}} .$$

Par régularité de la mesure σ, le résultat du lemme est alors vrai pour tout compact de Δ. L'inégalité se propage aux boréliens de Δ par régularité des mesures μ_{M_0} et σ.

On peut alors démontrer le théorème 7.2. Le lemme 7.7 montre déjà que $\mu_{M_0}|_\Delta$ est absolument continue par rapport à σ. Pour obtenir l'absolue continuité de σ par rapport à $\mu_{M_0}|_\Delta$, on procède comme Dahlberg dans [7]. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un borélien E inclus dans Δ qui soit μ_{M_0}-négligeable mais qui ne soit pas σ-négligeable. Plaçons - nous alors en un point de densité de E, c'est à dire en un point P tel que :

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sigma(E \cap \Delta_r(P))}{\sigma(\Delta_r(P))} = 1 .$$

Appliquons alors le lemme 7.7 dans les ouverts $\omega_f \cap T_P(2r, 2\lambda r)$ lorsque r est petit. Notons μ_M^r la L-mesure harmonique au point M dans ce nouvel ouvert et notons P_r le point $P + (0, \lambda r, 2r^2)$. Pour tout réel r suffisamment petit, on a :

$$\begin{aligned}\mu_{P_r}^r(\Delta_r(P) - E) &\leq \frac{c}{r^{(n+1)/2}} \sqrt{\sigma(\Delta_r(P) - E)} \\ &\leq c\left(1 - \frac{\sigma(E \cap \Delta_r(P))}{\sigma(\Delta_r(P))}\right)^{1/2} .\end{aligned}$$

On aboutit alors à une contradiction en constatant que E est aussi négligeable pour la mesure $\mu_{P_r}^r$ (cf. partie 6) et en se souvenant que $\mu_{P_r}^r(\Delta_r(P))$ est minoré par une constante strictement positive (ce raisonnement a déjà été effectué). La mesure σ est finalement absolument continue par rapport à la mesure $\mu_{M_0}|_\Delta$. La preuve du théorème 7.2 est alors complète.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ancona, Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien, Ann. Inst. Fourier, 28–4 (1978), 162-213.

[2] A. Ancona, Une propriété de la compactification de Martin d'un domaine euclidien, Ann. Inst. Fourier, 29–4 (1979), 71-90.

[3] A. ANCONA, Régularité d'accés des bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien, J. Math. Pures & Appl., 63 (1984), 215-260.

[4] A. ANCONA, Comparaison des mesures harmoniques et des fonctions de Green pour des opérateurs elliptiques sur un domaine lipschitzien, C. R. Acad. Sc.,Paris 294, série 1 (1982), 505-508.

[5] D.G. ARONSON, Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 890-896.

[6] L. CARLESON, On the existence of boundary values for harmonic functions of several variables, Ark. för Math., 4 (1962)..

[7] B. DALHBERG, Estimates of harmonic measure, Arch. Rat. Mech. and Anal., 65 , n°3 (1978), 275-288.

[8] J.L. DOOB, A relative Fatou theorem, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 45 (1959), 215-222.

[9] J.L. DOOB, Classical potential theory and its probabilistic counterpart, New York, Springer-Verlag ,1984.

[10] E.B. FABES & D.W. STROOCK, A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old idea of Nash. Arch. Rat. Mech. and Anal., 96 (1986), 326-338.

[11] E.B. FABES, N. GAROFALO & S. SALSA, Comparison Theorems for Temperatures in non-cylindrical domains, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, 77 (1984), 1-12.

[12] E.B. FABES, N. GAROFALO & S. SALSA, A backward Harnack inequality and Fatou theorem for nonnegative solutions of parabolic equations, Illin. J. of Maths., 30 n°4 (1986), 536-565.

[13] E.B. FABES, N. GAROFALO & E. LANCONELLI, Wiener's criterion for divergence form parabolic operators with C^1-Dini continious coefficients, Duke Math. Journal, 59–1 (1989), 191-232.

[14] A. FRIEDMAN, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Englewood cliffs, N.J. ,1964,.

[15] R.M. HERVE, Recherches sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 415-471.

[16] Y. HEURTEAUX, Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques, thèse Paris 11, France, 1989.

[17] Y. HEURTEAUX, Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques, C.R. Acad. Sci., Paris, 308, série 1 (1989), 401-404.

[18] Y. HEURTEAUX, Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques (2). Estimations de la mesure harmonique de certains ouverts de $\mathbb{R}^{n+1}$, C.R. Acad. Sci., Paris, 308, série 1 (1989), 441-444.

[19] R.A. HUNT & R.L. WHEEDEN, On the boundary values of harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 32 (1968), 307-322.

[20] R.A. HUNT & R.L. WHEEDEN, Positive harmonic functions on Lipschitz domains, Trans. Amer. Math. Soc., 147 (1970), 507-528.

[21] R. KAUFMAN & J.M. WU, Singularity of parabolic measures, Compositio Mathematica, 40 n°2 (1980), 243-250.

[22] J.T. KEMPER, Temperatures in several variables : kernel functions, representations and parabolic boundary values, Trans. Amer. Math. Soc., 167 (1972), 243-262.

[23] J.L. LEWIS & J. SILVER, Parabolic measure and the Dirichlet problem for the heat equation in two dimensions, Ind. U. Maths. Journal, 37, n°3 (1988).

[24] R.S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., (1941), 137-172.

[25] J. MOSER, A Harnack inequality for parabolic differential equations, Comm. Pure & Appl. Math., 17 (1964), 101-134.

[26] W. RUDIN, Real and complex analysis, 2nd. ed., Mc Graw-Hill, 1974.

[27] J. SERRIN, On the Harnack inequality for linear elliptic equations, J. Anal. Math., 4 (1956), 292-308.

[28] D. SIBONY, Théorème de limites fines et problème de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier, 18–2 (1968), 121-134.

[29] K.O. WIDMAN, On the boundary behavior of solutions to a class of elliptic partial differential equations, Ark. för Math., 6 (1967), 485-533.

[30] J.M. WU, On parabolic measures and subparabolic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 251 (1979), 171-186.

Manuscrit reçu le 9 juillet 1990,
révisé le 10 juin 1991.

Yanick HEURTEAUX,
CNRS URA D0757
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).