ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE GODBILLON

Une construction nouvelle des classes caractéristiques des feuilletages

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 3 (1990), p. 709-721

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_3_709_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 1 (1990), 709-721

UNE CONSTRUCTION NOUVELLES DES CLASSES CARACTERISTIQUES DES FEUILLETAGES

par Claude GODBILLON

Introduction.

Soit M une variété différentiable de classe C^∞. Dans le complexe de de Rham $A^*(M) = \sum A^p(M)$ des formes différentielles sur M, on désigne par i_X et L_X les opérateurs différentiels de produit intérieur et de dérivation de Lie associés à un élément X de l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M)$ des champs de vecteurs différentiables sur M.

On considère sur M un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q et de classe C^∞ ayant un fibré normal $\nu(\mathcal{F})$ trivialisé : $\mathcal{F}$ est défini par un système de q équations de Pfaff indépendantes $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_q = 0$. Dans ces conditions, on peut trouver des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_q$ sur M univoquement définis modulo l'espace tangent $T(\mathcal{F})$ à $\mathcal{F}$ par les relations $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

PROPOSITION 1. — *Les différentielles des formes ω_k, $1 \leq k \leq q$, sont données par les relations*

$$\mathrm{d}\,\omega_k = \sum_i \omega_i \wedge \mathrm{L}_{X_i}\omega_k + \frac{1}{2}\sum_{ij} \omega_k([X_i, X_j])\,\omega_i \wedge \omega_j \ .$$

Mots-clés : Classes caractéristiques – Feuilletages – Formes différentielles.
Classification A.M.S. : 53C – 58F.

Démonstration. — Puisque le système de Pfaff $\omega_1 = 0, \ldots, \omega_q = 0$ est intégrable, il existe sur M des formes de Pfaff $\sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq q$, telles que l'on ait $\mathrm{d}\omega_k = \sum_j \omega_i \wedge \sigma_{ik}$, $1 \leq k \leq q$. On en déduit les relations

$$-\omega_k([X_i, X_j]) = \sigma_{ik}(X_j) - \sigma_{jk}(X_i),\ 1 \leq i, j, k \leq q\ .$$

Si l'on pose maintenant

$$\theta_{ik} = \sigma_{ik} - \sum_j \Big[\frac{1}{2}\omega_k([X_j, X_i]) + \sigma_{jk}(X_i)\Big]\omega_j\ ,$$

on a encore $\mathrm{d}\omega_k = \sum_i \omega_i \wedge \theta_{ik}$: les relations précédentes montrent que $\frac{1}{2}\omega_k([X_j, X_i]) + \sigma_{jk}(X_i - \frac{1}{2}\omega_k([X_i, X_j]) - \sigma_{ik}(X_j) = 0.$

De plus, puisque $\theta_{ik}(X_j) = -\frac{1}{2}\omega_k([X_i, X_j])$, on a

$$\mathrm{L}_{X_i}\omega_k = \mathrm{i}_{X_i}\mathrm{d}\omega_k = \theta_{ik} + \frac{1}{2}\sum_j \omega_k([X_j, X_i])\omega_j\ ;$$

soit encore

$$\theta_{ik} = \mathrm{L}_{X_i}\omega_k + \frac{1}{2}\sum_j \omega_k([X_i, X_j])\omega_j\ ;$$

ce qui fournit les identités cherchées. □

1. L'algèbre des classes caractéristiques.

La proposition 1 conduit à considérer dans le complexe $A^*(M)$ la plus petite sous-algèbre, que l'on note $C^*(\mathcal{F}; X_1, \ldots, X_q)$, qui contient les formes de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_q$ et qui est stable par les opérateurs différentiels i_{X_k} et L_{X_k}, $1 \leq k \leq q$.

Pour donner une description de cette sous-algèbre $C^*(\mathcal{F}; X_1, \ldots, X_q)$ on introduit

- la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{X}(M)$ engendrée par $X_1, \ldots, X_q$,
- l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$,
- le sous-espace E^* de $A^*(M)$ engendré par $\omega_1, \ldots, \omega_q$.

Les dérivations de Lie et les produit intérieurs par les éléments de $\mathfrak{g}$ déterminent des opérations de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ et du produit tensoriel $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}$ sur le complexe $A^*(M)$. Dans ces conditions,

- $C^0 = C^0(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ est la sous-algèbre de $A^0(M)$ engendrée par le sous-espace $\big(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}\big)(E^*)$;

- $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ est l'algèbre produit tensoriel $C^0 \otimes \big(\bigwedge C^1\big)$.

La proposition qui suit est alors une conséquence directe de cette description de $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$.

PROPOSITION 2. — *La sous-algèbre $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ de $A^*(M)$ est un sous-complexe.*

PROPOSITION 3. — *L'injection du sous-complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_q)$ dans $A^*(M)$ détermine au niveau cohomologique une sous-algèbre de l'algèbre $H^*(M; \mathbf{R})$ de cohomologie réelle de M qui est indépendante du choix des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_q$ vérifiant les relations $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.*

On notera $HC^*(\mathcal{F})$ cette sous-algèbre de cohomologie et on l'appellera *l'algèbre des classes caractéristiques* du feuilletage $\mathcal{F}$.

Démonstration. — Soient $X_i^k \dots X_q^k$, $k = 0, 1$, des champs de vecteurs sur M vérifiant les relations $\omega_i(X_j^0) = \omega_i(X_j^1) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

Si p est la projection de la variété produit $M \times \mathbf{R}$ sur M, le feuilletage $p^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \times \mathbf{R}$ a un fibré normal trivialisé par les formes de Pfaff $\widetilde{\omega}_i = p^*\omega_i$, $1 \leq i \leq q$, et les champs de vecteurs $Y_j = (1-t)X_j^0 + tX_j^1$, $1 \leq j \leq q$, vérifient les relations $\widetilde{\omega}_i(Y_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

Dans ces conditions, si on désigne par ι_k, $k = 0, 1$, les injections de M dans $M \times \mathbf{R}$ définies par $x \mapsto (x, k)$, le sous-complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1^k \dots X_q^k)$, $k = 0, 1$, est l'image par ι_k^* du sous-complexe $C^*(\mathcal{F} \times \mathbf{R}; Y_1 \dots Y_q)$. Un argument standard d'homotopie permet alors de conclure. □

Remarque 1. — L'algèbre $HC^*(\mathcal{F})$ des classes caractéristiques du feuilletage $\mathcal{F}$ contient ses classes caractéristiques telles qu'elles ont été définies par I.N. Bernstein et B.I. Rosenfeld [1], R. Bott et A. Haefliger [2] et D.B. Fuks [4].

On peut s'en assurer rapidement en remarquant que les conditions d'intégrabilité $\mathrm{d}\,\omega_k = \sum_i \omega_i \wedge \theta_{ik}$ intervenant dans la démonstration de la proposition 1 permettent d'obtenir par différentiation les relations $\sum_i \big(\mathrm{d}\,\theta_{ik} - \sum_j \theta_{ij} \wedge \theta_{jk}\big) \wedge \omega_i = 0$. Ces relations expriment l'appartenance des formes $\Theta_{ik} = \mathrm{d}\,\theta_{ik} - \sum_j \theta_{ij} \wedge \theta_{jk}$ à l'idéal de $A^*(M)$ engendré par les formes de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_q$; de sorte que l'algèbre qu'elles engendrent est nulle en degrés supérieurs à $2q$.

On construit alors un morphisme de l'algèbre de Weil W_q du groupe linéaire $Gl(q, \mathbf{R})$ tronquée en degrés symétriques supérieurs à $2q$ (cf [5]) dans le complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1, \ldots, X_q)$ en envoyant les générateurs canoniques α_{ij} et A_{ij} de la première respectivement sur les formes différentielles $-\theta_{ij}$ et $-\Theta_{ij}$ du second.

2. Finitude de l'algèbre des classes caractéristiques.

Soit G le groupe linéaire $Gl(q, \mathbf{R})$ avec ses coordonnées canoniques x_{ij}, $1 \leq i, j \leq q$. On désigne par y_{ij}, $1 \leq i, j \leq q$, les composantes de l'application $\sigma : A \to A^{-1}$ de passage à l'inverse dans G et par $H = \sum_{ij} x_{ij}(\partial/\partial x_{ij})$ le champ de vecteurs engendrant le groupe à un paramètre $(t, X) \mapsto \mathrm{e}^t X$ des homothéties de G.

Si p est la projection de la variété produit $M \times G$ sur M, le feuilletage $p^*\mathcal{F} = \mathcal{F} \times G$ a un fibré normal trivialisé par les formes de Pfaff $\widetilde{\omega}_k = \sum_j x_{kj}\omega_j$, $1 \leq k \leq q$, et les champs de vecteurs $Y_k = \sum_j y_{jk} X_j$, $1 \leq k \leq q$, sur $M \times G$ vérifient les relations $\widetilde{\omega}_i(Y_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq q$.

On dit d'une forme différentielle α sur $M \times G$ qu'elle est de *poids* r si elle est telle que $\mathrm{L}_H\alpha = r\alpha$. Les formes de Pfaff $\widetilde{\omega}_k$ sont ainsi de poids 1; la différentielle d'une forme de poids r est encore de poids r et le produit extérieur de deux formes de poids respectifs r et s est de poids $r + s$. De plus, si α est une forme de poids r les formes $\mathrm{i}_{Y_k}\alpha$ et $\mathrm{L}_{Y_k}\alpha$, $1 \leq k \leq q$, sont toutes de poids $r - 1$: on a $[H, Y_k] = -Y_k$. Par conséquent le complexe $C^*(\mathcal{F} \times G; Y_1, \ldots, Y_q)$ est somme directe des sous-complexes $C_r^*(\mathcal{F} \times G; Y_1, \ldots, Y_q)$ regroupant les formes de poids r, pour r entier inférieur ou égal à q.

PROPOSITION 4. — *L'algèbre $HC^*(\mathcal{F}\times G)$ des classes caractéristiques du feuilletage $\mathcal{F} \times G$ est de dimension finie.*

Démonstration. — Pour $r \neq 0$ les sous-complexes $C_r^*(\mathcal{F}\times G; Y_1 \ldots Y_q)$ sont acycliques :$\mathrm{d}\alpha = 0$ implique $\alpha = \mathrm{d}(i_H\alpha)/r$. Pour $r = 0$ le sous-complexe $C_0^*\{ \times G; Y_1 \ldots Y_q)$ est de dimension finie : il est engendré par les fonctions et les formes de Pfaff sur $M \times G$ obtenues à partir de $\widetilde{\omega}_1, \ldots, \widetilde{\omega}_q$ par l'application d'au plus $2q+1$ opérateurs différentiels i_{X_k} ou $\mathrm{L}_{X_k}, 1 \leq k \leq q$. □

COROLLAIRE 1. — *L'algèbre $HC^*(\mathcal{F})$ des classes caractéristiques du feuilletage $\mathcal{F}$ est de dimension finie.*

En effet, si ι est l'injection de M dans $M \times G$ définie par $x \mapsto (x, I)$, on a $\iota^*\big(C^*(\mathcal{F} \times G; Y_1, \ldots, Y_q)\big) = C^*(\mathcal{F}; X_1, \ldots, X_q)$.

Remarque 2. — Si $q = 1$ le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par une forme de Pfaff intégrable ω et, si X est un champ de vecteurs sur M tel que $\omega(X) = 1$, on a $\mathrm{d}\,\omega = \omega \wedge \mathrm{L}_X\omega$. Le sous-complexe des formes de poids 0 a alors pour base 1, $\alpha = \mathrm{L}_X\omega$, $\beta = \omega \wedge (\mathrm{L}_X)^2\omega$ et $\gamma = \omega \wedge \mathrm{L}_X\omega \wedge (\mathrm{L}_X)^2\omega = -\alpha \wedge \beta$ avec les relations de cobord $\mathrm{d}\,1 = 0$, $\mathrm{d}\,\alpha = \beta$, $\mathrm{d}\,\beta = 0$ et $\mathrm{d}\,\gamma = 0$. Sa cohomologie non nulle est donc en degrés 0 et 3 et est engendrée par les formes 1 et γ (cf [6]).

Dans ces conditions, si γ est le cobord d'une forme ν de degré 2 sur M, on peut vérifier par des méthodes analogues à celles développées ici que la plus petite sous-algèbre de $A^*(M)$ qui contient ω et ν et qui est stable par les opérateurs différentiels i_X et L_X est acyclique : sur $M \times]0, \infty[$ on a alors $\widetilde{\omega} = t\omega$, $Y = (1/t)X$ et $\widetilde{\omega} \wedge \mathrm{L}_Y\widetilde{\omega} \wedge (\mathrm{L}_Y)^2\widetilde{\omega} = \mathrm{d}\,\widetilde{\nu}$, où $\widetilde{\nu} = \nu + (dt/t) \wedge \mathrm{L}_X\omega$ est une forme de poids 0.

3. Le complexe caractéristique universel.

On désigne par

- $\mathfrak{G}_q$ l'algèbre de Lie libre réelle engendrée par $X_1, \ldots, X_q$;
- E_q le sous-espace de $\mathfrak{G}_q$ engendré par $X_1, \ldots, X_q$;
- E_q^* l'espace dual de E_q avec sa base duale $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$;
- $\mathfrak{G}'_q$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{G}_q$, qui est un facteur direct de E_q dans $\mathfrak{G}_q$;
- $U_q = U(\mathfrak{G}_q)$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{G}_q$: c'est encore l'algèbre associative libre engendrée par $X_1, \ldots, X_q$ (cf [3]);
- F_q^0 l'algèbre symétrique du produit tensoriel $U_q \otimes \mathfrak{G}'_q \otimes E_q^*$ (on notera $L\alpha(Z)$ l'élément $L \otimes Z \otimes \alpha$ et on posera $\alpha(Y) = \alpha(Y_1) + \alpha(Y_2)$ pour un élément $Y = Y_1 + Y_2$ de $\mathfrak{G}_q = E_q \oplus \mathfrak{G}'_q$) ;
- F_q^1 le produit tensoriel $U_q \otimes E_q^*$ (on notera $L\alpha$ l'élément $L \otimes \alpha$);

– F_q l'algèbre anticommutative produit tensoriel $F_q^0 \otimes \left(\bigwedge F_q^1\right)$ graduée par les degrés de l'algèbre extérieure.

On associe à chaque élément Y de $\mathfrak{G}_q$ une dérivation L_Y de degré 0 et une antidérivation i_Y de degré -1 de l'algèbre F_q que l'on définit par les relations suivantes sur les éléments de F_q^0 et F_q' :

– $\mathrm{L}_Y(1) = 0$, $\mathrm{L}_Y(L\alpha(Z)) = (YL)\alpha(Z)$ et $\mathrm{L}_Y(L\alpha) = (YL)\alpha$ (de sorte que, pour $Y_1, \ldots, Y_r$ dans E_q, les éléments $Y_1 \ldots Y_r\alpha(Z)$ et $Y_1 \ldots Y_r\alpha$ sont respectivement égaux à $\mathrm{L}_{Y_1} \circ \ldots \circ \mathrm{L}_{Y_r}(\alpha(Z))$ et $\mathrm{L}_{Y_1} \circ \ldots \circ \mathrm{L}_{Y_r}(\alpha)$; ce qui permet d'étendre les notations $L\alpha(Z)$ et $L\beta$ aux cas où Z est dans E_q et β dans F_q);

– $\mathrm{i}_Y = 0$ sur F_q^0, $\mathrm{i}_Y(\alpha) = \alpha(Y)$, $\mathrm{i}_Y(X_k\alpha) = X_k\alpha(Y) - \alpha([X_k, Y])$, puis, par récurrence sur la longueur r de l'élément $L = X_{i_1} \ldots X_{i_r}$ de U_q, $\mathrm{i}_Y(X_kL\alpha) = \mathrm{L}_{X_k}\mathrm{i}_Y(L\alpha) - \mathrm{i}_{[X_k,Y]}(L\alpha)$.

On définit enfin une antidérivation d de degré $+1$ de l'algèbre F_q en posant $\mathrm{d}(1) = 0$, $\mathrm{d}(\alpha_k) = \sum_i \alpha_i \wedge X_i\alpha_k + (1/2)\sum_{ij} \alpha_k([X_i, X_j])\alpha_i \wedge \alpha_j$, $\mathrm{d}(L\alpha(Z)) = LZ\alpha - L\mathrm{i}_Z(\mathrm{d}(\alpha))$ et $\mathrm{d}(L\alpha) = L\mathrm{d}(\alpha)$.

PROPOSITION 5. — *On a, pour Y et Z dans $\mathfrak{G}_q$, les relations de Cartan* $\mathrm{L}_Y \circ \mathrm{L}_Z - \mathrm{L}_Z \circ \mathrm{L}_Y = \mathrm{L}_{[Y,Z]}$, $\mathrm{L}_Y \circ \mathrm{i}_Z - \mathrm{i}_Z \circ \mathrm{L}_Y = \mathrm{i}_{[Y,Z]}$ *et* $\mathrm{d}\,\mathrm{i}_Y + \mathrm{i}_Y\mathrm{d} = \mathrm{L}_Y$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier ces relations en degrés 0 et 1, auxquels cas la première est immédiate, de même que la seconde lorsque $Y = X_k$, $1 \leq k \leq q$.

On vérifie cette dernière en toute généralité en le faisant lorsque Y est le crochet de deux éléments Y_1 et Y_2 pour lesquels elle est satisfaite. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}\mathrm{i}_Z &= \mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{i}_Z\mathrm{L}_{Y_2} + \mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{i}_{[Y_2,Z]} \\ &= \mathrm{i}_Z\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2} + \mathrm{i}_{[Y_1,Z]}\mathrm{L}_{Y_2} + \mathrm{i}_{[Y_2,Z]}\mathrm{L}_{Y_1} + \mathrm{i}_{[Y_1,[Y_2,Z]]} ;\end{aligned}$$

et par conséquent $\mathrm{L}_Y\mathrm{i}_Z = \mathrm{i}_Z\mathrm{L}_Y + \mathrm{i}_{[Y,Z]}$.

La troisième relation est satisfaite lorsqu'on l'applique à un élément α de E_q^*. Elle l'est aussi lorsqu'on l'applique à des éléments de F_q de la forme $X_kL\alpha(Z)$ et $X_kL\alpha$, $1 \leq k \leq q$, en supposant qu'elle l'est déjà pour

$\beta_1 = L\alpha(Z)$ et $\beta_2 = L\alpha$. On a alors en effet :

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}_Y(\mathrm{L}_{X_k}\beta_i) &= \mathrm{L}_{X_k}\mathrm{i}_Y\beta_i - \mathrm{i}_{[X_k,Y]}\beta_i \\
\mathrm{di}_Y(\mathrm{L}_{X_k}\beta_i) &= \mathrm{L}_{X_k}\mathrm{di}_Y\beta_i - \mathrm{di}_{[X_k,Y]}\beta_i \\
&= \mathrm{L}_{X_k}\mathrm{L}_Y\beta_i - \mathrm{L}_{X_k}\mathrm{i}_Y\mathrm{d}\beta_i - \mathrm{L}_{[X_k,Y]}\beta_i + \mathrm{i}_{[X_k,Y]}\mathrm{d}\beta_i \\
&= \mathrm{L}_Y(\mathrm{L}_{X_k}\beta_i) - \mathrm{i}_Y\mathrm{d}(L_{X_k}\beta_i)\ .
\end{aligned}$$

En particulier, elle est donc satisfaite sur F_q^1.

Compte tenu de ces résultats, cette troisième relation de Cartan est vérifiée pour les éléments $\alpha(Z)$ de F_q^0 lorsque $Y = X_k,\ 1 \le k \le q$. On a en effet :

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}_{X_k}\mathrm{d}\alpha(Z) &= \mathrm{i}_{X_k}\mathrm{L}_Z\alpha - \mathrm{i}_{X_k}\mathrm{i}_Z\mathrm{d}\alpha = \mathrm{i}_{X_k}\mathrm{L}_Z\alpha + \mathrm{i}_Z\mathrm{i}_{X_k}\mathrm{d}\alpha \\
&= \mathrm{i}_{X_k}\mathrm{L}_Z\alpha + \mathrm{i}_Z\mathrm{L}_{X_k}\alpha = \mathrm{L}_{X_k}\mathrm{i}_Z\alpha\ .
\end{aligned}$$

Enfin, si Y est le crochet de deux éléments Y_1 et Y_2 pour lesquels elle est satisfaite lorsqu'on l'applique à $\beta = \alpha(Z)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}_Y\mathrm{d}\beta &= \mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{i}_{Y_2}\mathrm{d}\beta - \mathrm{i}_{Y_2}\mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{d}\beta = \mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}\beta - \mathrm{i}_{Y_2}\mathrm{d}\mathrm{L}_{Y_1}\beta \\
&= \mathrm{L}_{Y_1}\mathrm{L}_{Y_2}\beta - \mathrm{L}_{Y_2}\mathrm{L}_{Y_1}\beta = \mathrm{L}_Y\beta\ ;
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. □

PROPOSITION 6. — *L'opérateur* d : $F_q \to F_q$ *est de carré nul.*

Démonstration. — Puisque l'on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(L\alpha(Z)) &= L(Z\alpha - \mathrm{i}_Z\mathrm{d}\alpha\ ) \\
\mathrm{dd}(L\alpha(Z)) &= L(Z\mathrm{d}\alpha - Z\mathrm{d}\alpha + \mathrm{i}_Z\mathrm{dd}\alpha = L\mathrm{i}_Z(\mathrm{dd}\alpha) \\
\mathrm{dd}(L\alpha) &= L(\mathrm{dd}\alpha),
\end{aligned}$$

il suffit de vérifier que d^2 s'annule sur les éléments $\alpha_k,\ 1 \le k \le q$; mais alors :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathrm{d}\alpha_k = & \sum_{ir} \alpha_i \wedge \mathrm{L}_{X_i}\alpha_r \wedge \mathrm{L}_{X_r}\alpha_k + \frac{1}{2}\sum_{ijr} \alpha_r([X_i, X_j])\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \mathrm{L}_{X_r}\alpha_k \\
& - \sum_{ir} \alpha_r \wedge \mathrm{L}_{X_r}\alpha_i \wedge \mathrm{L}_{X_i}\alpha_k - \sum_{ir} \alpha_r \wedge \alpha_i \wedge \mathrm{L}_{X_r}\mathrm{L}_{X_i}\alpha_k \\
& - \frac{1}{2}\sum_{ijr} X_r\alpha_k([X_i, X_j])\alpha_r \wedge \alpha_i \wedge \alpha_j \\
& - \frac{1}{2}\sum_{ijr} \alpha_k([X_i, X_j])\alpha_r \wedge \mathrm{L}_{X_r}\alpha_i \wedge \alpha_j \\
& - \frac{1}{2}\sum_{ijr} \alpha_k([X_i, X_j])\alpha_r \wedge \alpha_i \wedge \mathrm{L}_{X_r}\alpha_j \\
& + \frac{1}{2}\sum_{rs} (L_{[X_r, X_s]}\alpha_k) \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
& - \frac{1}{2}\sum_{irs} \alpha_i([X_r, X_s])\mathrm{L}_{X_i}\alpha_k \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
& + \frac{1}{2}\sum_{irs} X_i\alpha_k([X_r, X_s])\alpha_i \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
& - \frac{1}{2}\sum_{irs} \alpha_k([X_i, [X_r, X_s]])\alpha_i \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
& - \frac{1}{4}\sum_{ijrs} \alpha_k([X_i, X_j])\alpha_i([X_r, X_s])\alpha_j \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
& + \frac{1}{4}\sum_{ijrs} \alpha_k([X_i, X_j])\alpha_j([X_r, X_s])\alpha_i \wedge \alpha_r \wedge \alpha_s \\
& + \frac{1}{2}\sum_{irs} \alpha_k([X_r, X_s])\alpha_i \wedge \mathrm{L}_{X_i}\alpha_r \wedge \alpha_s \\
& + \frac{1}{4}\sum_{ijrs} \alpha_k([X_r, X_s])\alpha_r([X_i, X_j])\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_s \\
& - \frac{1}{2}\sum_{irs} \alpha_k([X_r, X_s])\alpha_r \wedge \alpha_i \wedge \mathrm{L}_{X_i}\alpha_s \\
& - \frac{1}{4}\sum_{ijrs} \alpha_k([X_r, X_s])\alpha_s([X_i, X_j])\alpha_r \wedge \alpha_i \wedge \alpha_j \\
= & \, 0 \, ;
\end{aligned}
$$

ce qui permet de conclure. □

Avec les notations du paragraphe 1, on désigne par π l'épimorphisme canonique de l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{G}_q$ sur la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{X}(M)$. On a alors :

PROPOSITION 7. — *Si $Y_1, \dots, Y_r$ sont des éléments de E_q, la correspondance associant respectivement les formes de Pfaff* $\mathrm{L}_{Y_1} \dots \mathrm{L}_{Y_r}\omega_k(\pi(Z))$ *et* $\mathrm{L}_{Y_1} \dots \mathrm{L}_{Y_r}\omega_k$ *aux éléments* $Y_1 \dots Y_r\alpha_k(Z)$ *et* $Y_1 \dots Y_r\alpha_k$, $1 \leq k \leq q$, *de F_q, détermine un épimorphisme du complexe F_q sur le sous-complexe $C^*(\mathcal{F}; X_1, \dots, X_r)$ de $A^*(M)$ compatible avec les opérations* L_{X_k} *et* i_{X_k}.

Pour cette raison on dira que F_q et son algèbre de cohomologie $H^*(F_q)$ sont respectivement le *complexe caractéristique universel* et l' *algèbre caractéristique universelle* pour les feuilletages de codimension q avec fibré normal trivialisé.

Remarque 3. — De même que dans le paragraphe 2, on peut montrer que l'algèbre caractéristique universelle $H^*(F_q)$ est de dimension finie.

Pour cela, on introduit d'abord un poids sur F_q en faisant les conventions suivantes :

– les éléments de $E_q^* \subset F_q'$ sont de poids 1;

– si Z est un crochet de longueur s en les $X_1, \dots, X_q$, l'élément $\alpha(Z)$ de F_q^0 est de poids $1 - s$;

– si γ est un élément de poids r de $F_q^0 \oplus F_q'$, les éléments $\mathrm{L}_{X_k}\gamma$, $1 \leq k \leq q$, sont tous de poids $r - 1$ (et par suite, si Z est comme précédemment, l'élément $\mathrm{i}_Z\gamma$ est de poids $r - s$);

– le produit de deux éléments de F_q de poids respectifs r et s est de poids $r + s$.

Dans ces conditions, l'ensemble F_{q_r} des éléments de poids r de F_q est un sous-complexe de F_q et ces sous-complexes F_{q_r} forment une décomposition en somme directe de F_q.

On définit ensuite une antidérivation i de poids -1 de l'algèbre F_q en posant $\mathrm{i} = 0$ sur $F_q^0 \oplus E_q^*$, $\mathrm{i}(X_k\alpha) = -\alpha(X_k)$, $1 \leq k \leq q$, puis, par récurrence sur la longueur r de l'élément $L = X_{i_1} \dots X_{i_r}$ de U_q, $\mathrm{i}(X_kL\alpha) = L_{X_k}(\mathrm{i}(L\alpha)) - \mathrm{i}_{X_k}(L\alpha)$.

Cette antidérivation i conserve le poids, est de carré nul, anticommute avec les opérateurs i_Z et vérifie les relations suivantes "de Cartan" :

$\mathrm{L}_Z \circ \mathrm{i} - \mathrm{i} \circ \mathrm{L}_Z = s\,\mathrm{i}_Z$ lorsque Z est un crochet de longueur s en les $X_1, \dots, X_q$;

$\mathrm{i} \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ \mathrm{i} = r$ sur F_{q_r}.

On conclut alors comme dans la démonstration de la proposition 4.

4. L'algèbre caractéristique universelle.

On considère la graduation de l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{G}_q$ par ses sous-espaces $\mathfrak{G}_q^n$, $n \in \mathbf{N}$, engendrés par les crochets de longueur n en les X_k, $1 \leq k \leq q$, et on désigne par $\mathcal{H} = (H_r)_{r \in \mathbf{N}}$ une base de Hall de $\mathfrak{G}_q$ (cf. [3]) : $\mathcal{H}$ est la réunion de ses parties homogènes $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \cap \mathfrak{G}_q^n$, $n \in \mathbf{N}$, et l'indexation de ses éléments est telle que, pour $n > m$, les indices dans $\mathcal{H}^n$ sont supérieurs à ceux dans $\mathcal{H}^m$ (les éléments de $\mathcal{H}^1$ sont les générateurs $X_1, \ldots, X_q$; ceux de $\mathcal{H}^2$, les crochets $[X_i, X_j]$ pour $i < j$; ceux de $\mathcal{H}^3$, les crochets $[X_i, [X_j, X_k]]$ pour $i \geq j$ et $j < k$; ...).

Dans ces conditions, le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt [3] permet de montrer les résultats suivants :

– les monômes en les éléments $\alpha_k(H_s)$ et $H_{r_1} \ldots H_{r_p} \alpha_k(H_s)$, $p \in \mathbf{N}$, $1 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_p$ et $1 \leq k \leq q$, fournissent une base de l'algèbre symétrique F_q^0 ;

– les éléments α_k et $H_{r_1} \ldots H_{r_p} \alpha_k$, $p \in \mathbf{N}$, $1 \leq r_1 \leq \ldots \leq r_p$ et $1 \leq k \leq q$, forment une base de l'espace F_q^1.

Avec ces notations, on construit une filtration décroissante $(F_{q,m})_{m \in \mathbf{N}}$ de l'algèbre F_q en convenant que, pour $m \geq 2$, $F_{q,m}$ est l'idéal de F_q engendré par les éléments de base $\alpha_k(H_s)$ et $H_{r_1} \ldots H_{r_p} \alpha_k(H_s)$ dans F_q^0 et $H_{r_1} \ldots H_{r_p} \alpha_k$ dans F_q^1 pour lesquels, selon le cas, soit la longueur de H_s, soit celle de H_{r_p}, soit le maximum de celles de H_{r_p} et de H_s, est au moins égal à m.

La filtration ainsi introduite est adaptée à la graduation de F_q, au sens où $F_{q,m}$ est la somme directe de ses sous-espaces homogènes $F_{q,m} \cap F_q^n$. Elle est compatible avec les opérations L_Y et i_Y, $Y \in \mathfrak{G}_q$, définies précédemment sur F_q, ainsi qu'avec sa différentielle d et l'antidérivation i introduite dans la remarque 3. De plus, avec les notations de cette remarque 3, le sous-complexe $F_{q,m}$ est la somme directe de ses sous-complexes $F_{q,m} \cap F_{q_r}$ pour $r \leq q + 1 - m$.

Remarque 4. — En raison de ces compatibilités, la situation décrite dans la remarque 3 se transpose au niveau du complexe gradué $E_{q,0}$ associé à la filtration du complexe caractéristique universel F_q. Par conséquent, les sous-complexes $E^m_{q,0} = F_{q,m}/F_{q,m+1}$ de $E_{q,0}$ ont même cohomologie que leur sous-complexe (de dimension finie) $\widehat{E}^m_{q,0}$ formé des éléments de poids nul dans $E^m_{q,0}$. En particulier, ces sous-complexes $E^m_{q,0}$ sont acycliques dès que m est strictement supérieur à $q+1$.

PROPOSITION 8. — *Le premier terme $E^1_{q,0} = F_{q,1}/F_{q,2}$ du complexe gradué associé à la filtration du complexe caractéristique universel F_q est isomorphe au complexe de Gelfand–Fuks des cochaines continues sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_q$ des champs de vecteurs formels à q variables.*

En effet (cf [5]), si on désigne par S_q l'algèbre symétrique de l'espace E_q, ce complexe E^1_0 est isomorphe à l'algèbre extérieure de sa composante homogène de degré 0, elle-même isomorphe au produit tensoriel $S_q \otimes E^*_q$, avec un opérateur de cobord déterminé à ce niveau par les relations $\mathrm{d}\,\alpha_k = \sum_i \alpha_i \wedge X_i\alpha_k$, $1 \le k \le q$.

Exemple. — Le cas $q = 2$. – Dans cette situation on note Y le crochet $[X_1, X_2]$ et, avec les inégalités $1 \le r, s \le 2$ et $1 \le i \le j \le 2$ portant sur les indices, on désigne par

– L la sous-algèbre de $\widehat{E}^1_{2,0}$ engendrée par les éléments 1 et $\theta_{ir} = X_i\alpha_r$;

– M_1 le sous-espace de $\widehat{E}^2_{2,0}$ engendré par les éléments

$$\beta_{rs} = \alpha_r(Y)\alpha_s \quad \text{et} \quad \gamma_{rs} = (Y\alpha_r) \wedge \alpha_s \ ;$$

– M_2 le sous-espace de $\widehat{E}^2_{2,0}$ engendré par les éléments

$$\begin{aligned}
\lambda_{rs} &= \alpha_r(Y)\alpha_s(Y)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \ , \\
\mu_{rs} &= \alpha_r(Y)(Y\alpha_s) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \ , \\
\nu &= (Y\alpha_1) \wedge (Y\alpha_2) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \ , \\
\varepsilon_{ir} &= \big(X_i\alpha_r(Y)\big)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \ , \\
\eta_{ir} &= (X_iY\alpha_r) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \ , \\
\sigma^{rs}_{ij} &= \alpha_r(Y)(X_iX_j\alpha_s) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \\
\tau^{rs}_{ij} &= \big(Y\alpha_r\big) \wedge (X_iX_j\alpha_s) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \ ;
\end{aligned}$$

– N le sous-espace de $\widehat{E}^3_{2,0}$ engendré par les éléments

$$\varphi_{ir} = \alpha_r\big([X_i, Y]\big)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \quad \text{et} \quad \psi_{ir} = \big([X_i, Y]\alpha_r\big)\alpha_1 \wedge \alpha_2 \ .$$

Dans ces conditions, les espaces $\widehat{E}^2_{2,0}$ et $\widehat{E}^3_{2,0}$ sont respectivement isomorphes aux produits tensoriels $(M_1 \oplus M_2) \otimes L$ et $N \otimes L$.

Compte tenu du fait que l'on a $\mathrm{d}\,\theta_{ir} = \sum_k \theta_{ik} \wedge \theta_{kr}$ modulo α_1 et α_2, la différentielle dans $\widehat{E}^3_{2,0}$ est déterminée par les relations

$$\mathrm{d}_0\,\varphi_{ir} = \psi_{ir} - \sum_k \varphi_{ik} \wedge \theta_{kr} - \varphi_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \ ,$$
$$\mathrm{d}_0\,\psi_{ir} = \sum_k \psi_{ik} \wedge \theta_{kr} - \psi_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \ .$$

On obtient alors l'acyclicité de ce complexe $\widehat{E}^3_{2,0}$ en introduisant l'opérateur d'homotopie envoyant $\varphi_{ir} \wedge \omega$ sur 0 et $\psi_{ir} \wedge \omega$ sur $\varphi_{ir} \wedge \omega$.

De même, le produit tensoriel $M_2 \otimes L$ est un sous-complexe de $\widehat{E}^3_{2,0}$ avec une différentielle déterminée par les relations suivantes (dans lesquelles les sommations sont sur l'indice k) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_0\,\lambda_{rs} =& \mu_{rs} + \mu_{sr} - \sum \lambda_{ks} \wedge \theta_{kr} - \sum \lambda_{rk} \wedge \theta_{ks} - \lambda_{rs} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \ , \\
\mathrm{d}_0\,\mu_{rs} =& (-1)^r(\delta_{rs} - 1)\nu + \sum \mu_{ks} \wedge \theta_{kr} + \sum \mu_{rk} \wedge \theta_{ks} \\
& + \mu_{rs} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \ , \\
\mathrm{d}_0\,\nu =& -2\nu \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \ , \\
\mathrm{d}_0\,\sigma^{rs}_{ij} =& \tau^{rs}_{ij} + \sum \sigma^{ks}_{ij} \wedge \theta_{kr} + \sum \sigma^{rk}_{ij} \wedge \theta_{ks} - \sum (\delta_{i1}\sigma^{rs}_{1k} + \delta_{i2}\sigma^{rs}_{k2}) \wedge \theta_{jk} \\
& - \sum (\delta_{j1}\sigma^{rs}_{1k} + \delta_{j2}\sigma^{rs}_{k2}) \wedge \theta_{ik} + \sigma^{rs}_{ij} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\
& + \mu_{rs} \wedge (\delta_{i2}\theta_{j1} + \delta_{j2}\theta_{i1}) + \lambda_{rs} \wedge (\theta_{j1} \wedge \theta_{i2} + \theta_{i1} \wedge \theta_{j2}) \ , \\
\mathrm{d}_0\,\tau^{rs}_{ij} =& -\sum \tau^{ks}_{ij} \wedge \theta_{kr} - \sum \tau^{rk}_{ij} \wedge \theta_{ks} + \sum (\delta_{i1}\tau^{rs}_{1k} + \delta_{i2}\tau^{rs}_{k2}) \wedge \theta_{jk} \\
& + \sum (\delta_{j1}\tau^{rs}_{1k} + \delta_{j2}\tau^{rs}_{k2}) \wedge \theta_{ik} - \tau^{rs}_{ij} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\
& + (-1)^r(1 - \delta_{rs})\nu \wedge (\delta_{i2}\theta_{j1} + \delta_{j2} \wedge \theta_{i1}) \\
& - \mu_{sr} \wedge (\theta_{j1} \wedge \theta_{i2} + \theta_{i1} \wedge \theta_{j2}) \ , \\
\mathrm{d}_0\,\varepsilon_{ir} =& \eta_{ir} - \sum \varepsilon_{ik} \wedge \theta_{kr} + \sum \varepsilon_{kr} \wedge \theta_{ik} - \varepsilon_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\
& - \sum (\delta_{i1}\sigma^{kr}_{1k} + \delta_{i2}\sigma^{kr}_{k2}) + \delta_{i2}\mu_{1r} + \lambda_{r1} \wedge \theta_{i2} - \lambda_{r2} \wedge \theta_{i1} \ , \\
\mathrm{d}_0\,\eta_{ir} =& \sum \eta_{ik} \wedge \theta_{kr} - \sum \eta_{kr} \wedge \theta_{ik} + \eta_{ir} \wedge (\theta_{11} + \theta_{22}) \\
& + \sum (\delta_{i1}\tau^{kr}_{1k} + \delta_{i2}\tau^{kr}_{k2}) + \mu_{r1} \wedge \theta_{i2} - \mu_{r2} \wedge \theta_{i1} - \delta_{i2}\delta_{r2}\nu \ .
\end{aligned}$$

Ces expressions montrent que les produits tensoriels $M'_2 \otimes L$ et $M''_2 \otimes L$, où M'_2 et M''_2 sont les sous-espaces de M_2 engendrés respectivement par les éléments $\lambda_{rs}, \mu_{rs}, \nu, \sigma^{rs}_{ij}, \tau^{rs}_{ij}$ et $\lambda_{rs}, \mu_{rs}, \nu$, déterminent une filtration décroissante du sous-complexe $M_2 \otimes L$. On obtient alors l'acyclicité de ce sous-complexe en vérifiant, grâce à un argument analogue à celui utilisé précédemment dans le cas de $\widehat{E}^3_{2,0}$, celle des complexes $(M_2/M_2') \otimes L$, $(M_2'/M_2'') \otimes L$ et $M_2'' \otimes L$ (pour ce dernier, on considère l'opérateur d'homotopie envoyant $\lambda_{rs} \wedge \omega$ sur 0, $\mu_{rs} \wedge \omega$ sur $\frac{1}{2}\lambda_{rs} \wedge \omega$ et $\nu \wedge \omega$ sur $\frac{1}{2}(\mu_{12} - \mu_{21}) \wedge \omega)$.

Enfin, la différentielle dans le complexe quotient $\widehat{E}^2_{2,0}/(M_2 \otimes L)$ est déterminée par les deux relations

$$\mathrm{d}_0' \beta_{rs} = \gamma_{rs} + \sum_k \beta_{ks} \wedge \theta_{kr} + \sum_k \beta_{rk} \wedge \theta_{ks} \ ,$$

$$\mathrm{d}_0' \gamma_{rs} = -\sum_k \gamma_{ks} \wedge \theta_{kr} - \sum_k \gamma_{rk} \wedge \theta_{ks} \ .$$

Par conséquent, de même que précédemment, ce complexe est acyclique.

Regroupant ces résultats, on en déduit l'acyclicité du complexe $\widehat{E}^2_{2,0}$, puis le fait que le terme $E_{2,1} = H^*(E_{2,0})$ de la suite spectrale associée à la filtration de F_2 se réduit à sa composante homogène $E^1_{2,1}$, elle-même isomorphe à la cohomologie de Gelfand–Fuks $H^*(\mathfrak{a}_2)$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels en 2 variables. De sorte que, en codimension 2, on obtient de cette façon une nouvelle construction des classes caractéristiques d'un feuilletage ayant un fibré normal trivialisé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.N. BERNSTEIN & B.I. ROSENFELD, Homogeneous spaces of infinite dimensional Lie algebras and the characteristic classes of foliations, Uspekhi Mat. Nauk, 28-4,(1973), 103–138 – Russian Math. Surveys, 28-4, (1973), 107–142.

[2] R. BOTT & A. HAEFLIGER, On characteristic classes of Γ-foliations, Bull. Amer. Math. Soc., 78, (1972), 1039–1044..

[3] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 1 et 2, Hermann, (1971) et (1972).

[4] D.B. FUKS, Characteristic classes of foliations, Uspekhi Mat. Nauk, 28-2, (1973) 3–17 – Russian Math. Surveys, 28-2, (1973), 1–16.

[5] C. GODBILLON, Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, Séminaire Bourbaki, exposé n°421, Lecture Notes in Math., 383 (1974), 69–87.

[6] C. GODBILLON & J. VEY, Un invariant des feuilletages de codimension 1, C.R. Acad. Sci. Paris, 273 (1971), 92–95.

Strasbourg, mai 1990.