

MICHEL BALAZARD

## **Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 40, n° 2 (1990), p. 255-270

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1990\\_\\_40\\_2\\_255\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_2_255_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# UNIMODALITÉ DE LA DISTRIBUTION DU NOMBRE DE DIVISEURS PREMIERS D'UN ENTIER

par Michel BALAZARD

## 1. Introduction.

Soit  $\omega(n)$  le nombre de diviseurs premiers de l'entier positif  $n$  :

$$\omega(n) = \sum_{p|n} 1,$$

où la lettre  $p$  désigne un nombre premier générique.

Nous noterons  $\pi(x, k)$  le nombre des entiers  $n$  vérifiant :

$$1 \leq n \leq x \quad \text{et} \quad \omega(n) = k.$$

Ainsi  $\pi(1\,000, 0) = 1$  ;  $\pi(1\,000, 1) = 194$  ;  $\pi(1\,000, 2) = 505$  ;  
 $\pi(1\,000, 3) = 277$  ;  $\pi(1\,000, 4) = 23$  et  $\pi(1\,000, k) = 0$  pour  $k \geq 5$ . La  
suite 1, 194, 505, 277, 23 est unimodale : elle croît, atteint un maximum,  
puis décroît. De façon générale, une suite  $(u_k)$  de réels positifs ou nuls,  
définie pour  $k$  appartenant à un intervalle d'entiers, est dite unimodale  
s'il existe  $k_0$  tel que  $u_k \leq u_{k+1}$  si  $k < k_0$  et  $u_k \geq u_{k+1}$  si  $k \geq k_0$ .

Erdős a conjecturé en 1948 (cf. [5], p. 62) que pour tout  $x$  assez  
grand la suite  $\pi(x, k)$  est unimodale, ainsi que les suites

$$\rho(x, k) := \#\{n : 1 \leq n \leq x, n \text{ sans facteur carré et } \omega(n) = k\}$$

et

$$\sigma(x, k) := \#\{n : 1 \leq n \leq x \text{ et } \Omega(n) = k\}$$

---

*Mots-clés* : Unimodalité - Diviseurs premiers.

*Classification A.M.S.* : 11 N.

où  $\Omega(n) = \sum_{p^v \parallel n} v$  désigne le nombre total de facteurs dans la décomposition de  $n$  en produit de nombres premiers.

Le but de cet article est de confirmer la conjecture d'Erdős.

**THÉORÈME.** —  $\pi(x, k)$ ,  $\rho(x, k)$  et  $\sigma(x, k)$  sont pour  $x$  assez grand des fonctions unimodales de  $k$ .

Dans [2] (théorème 3) nous avons démontré l'unimodalité de  $\sigma(x, k)$  pour  $x$  assez grand, grâce aux arguments suivants :

1) Si  $k > \frac{\log x}{\log 3}$ , tout entier  $n$  compté dans  $\sigma(x, k)$  est pair et  $\frac{n}{2}$  est compté dans  $\sigma(x, k-1)$ , donc  $\sigma(x, k) \leq \sigma(x, k-1)$  ;

2) On a l'équivalence asymptotique :

$$\frac{\sigma(x, k+1)}{\sigma(x, k)} \sim \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\log \log x}{k}\right)$$

valable uniformément quand  $\frac{x}{2^k}$  tend vers l'infini ; elle est déduite d'une estimation de  $\sigma(x, k)$  due à l'auteur, Delange et Nicolas (cf. [3]) ;

3) On a une formule asymptotique plus précise, valable pour  $k \leq (2-\varepsilon) \log \log x$ , permettant de déceler une valeur  $k'_0$  telle que  $\sigma(x, k) < \sigma(x, k+1)$  si  $k < k'_0$  et  $\sigma(x, k) > \sigma(x, k+1)$  si  $k > k'_0$  (le  $k'_0$  de notre définition d'une suite unimodale est alors égal à  $k'_0$  ou  $k'_0+1$ ).

Pour démontrer l'unimodalité de  $\pi(x, k)$ , la même approche conduit à d'importantes difficultés. Observons d'abord que  $\pi(x, k)$  est non nul si et seulement si

$$2 \cdot 3 \dots p_k \leq x,$$

où  $p_j$  désigne le  $j$ -ième nombre premier. La résolution en  $k$  de cette inégalité donne  $k \leq K$ , où  $K = K(x)$  est l'entier défini par l'encadrement  $\theta(p_K) \leq \log x < \theta(p_{K+1})$ ,  $\theta$  désignant la fonction de Tchebychev  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ . En utilisant le théorème des nombres premiers sous

les formes

$$\theta(y) = y + O_\varepsilon(y \exp(-(\log y)^{3/5-\varepsilon})) \quad (\varepsilon > 0)$$

et

$$\pi(y) = \ell i(y) + O_\varepsilon(y \exp(-(\log y)^{3/5-\varepsilon})) \quad (\varepsilon > 0)$$

où  $\ell i$  désigne le logarithme intégral, on obtient successivement

$$p_k = \log x + O_\varepsilon(\log x \cdot \exp(-(\log \log x)^{3/5-\varepsilon}))$$

et  $K(x) = \pi(p_k) = \ell i(\log x) + O_\varepsilon(\log x \cdot \exp(-(\log \log x)^{3/5-\varepsilon}))$ , pour tout  $\varepsilon$  positif. On a en particulier, pour tout entier  $N$  positif ou nul :

$$K(x) = \frac{\log x}{\log \log x} \left( 0! + \frac{1!}{\log \log x} + \dots + \frac{N!}{(\log \log x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\log \log x)^{N+1}}\right) \right).$$

Les trois étapes de la démonstration de l'unimodalité de  $\sigma(x, k)$  s'adaptent comme suit au cas de  $\pi(x, k)$ .

i) Nous décrivons au paragraphe 2 un argument combinatoire similaire à celui du 1), mais plus élaboré. Malheureusement, il ne donne que le résultat suivant :

$$\pi(x, k+1) \leq \pi(x, k) \quad \text{si} \quad k \geq \frac{\log x}{\log \log x} \left( 1 + \frac{c}{\log \log x} \right)$$

et

$$x \geq x_0(c),$$

$c$  étant une constante arbitraire  $> 1 - \log 2 = 0,30685\dots$

ii) Posons  $F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left( 1 + \frac{z}{p-1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^z$ . La formule classique de Sathe-Selberg (cf. [9]) est

$$(1) \quad \pi(x, k) = \frac{x}{\log x} F\left(\frac{k}{\log \log x}\right) \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!} \left( 1 + O_B\left(\frac{1}{\log \log x}\right) \right)$$

uniformément pour  $1 \leq k \leq B \log \log x$ ,  $B$  positif fixé. Cette formule permet de démontrer l'existence d'une constante absolue  $C$  telle que, si  $x \geq x_0(B)$  :

$$\pi(x, k) < \pi(x, k+1) \quad \text{si} \quad k \leq \log \log x - C$$

et

$$\pi(x, k) > \pi(x, k+1) \quad \text{si} \quad \log \log x + C \leq k \leq B \log \log x.$$

D'autre part, grâce à une méthode nouvelle fondée sur la méthode du col, Hildebrand et Tenenbaum ont démontré dans [7] la relation

$$(2) \quad \frac{\pi(x, k+1)}{\pi(x, k)} = \frac{L}{k} \left( 1 + O_D\left(\frac{\log L}{L}\right) \right),$$

uniformément pour  $1 \leq k \leq D(\log x)(\log \log x)^{-2}$ ,  $D > 0$  fixé, où  $L = \log \log x - \log k - \log \log(k+1)$ . Cela prouve que, si  $x \geq x_0(D)$ , l'inégalité  $\pi(x, k) > \pi(x, k+1)$  est valable si

$$\log \log x + C \leq k \leq D(\log x)(\log \log x)^{-2}.$$

iii) La même méthode que dans [2] permet de préciser le  $O_B((\log \log x)^{-1})$  de (1) à partir de la formule de Selberg :

$$\sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = zF(z)x(\log x)^{z-1} + O_B(x(\log x)^{\operatorname{Re} z - 2}),$$

uniformément pour  $x \geq 2$  et  $|z| \leq B$ . On lève ainsi l'incertitude sur le signe de  $\pi(x, k+1) - \pi(x, k)$  dans l'intervalle  $|k - \log \log x| < C$ . Le plus petit entier  $k_0$  réalisant le maximum de  $\pi(x, k)$  a l'expression

$$k_0 = \log \log x + F'(1) + \Delta(x),$$

où  $\liminf \Delta(x) = 0$  et  $\limsup \Delta(x) = 1$  quand  $x$  tend vers l'infini.

Il est intéressant de constater que  $k_0 = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + \Delta_0(x)$ , où  $\liminf \Delta_0(x) = -1$  et  $\limsup \Delta_0(x) = 0$  quand  $x$  tend vers l'infini. En particulier, si  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$  est à une distance  $\geq \varepsilon > 0$  de l'entier le plus proche et si  $x \geq x_0(\varepsilon)$ ,  $k_0$  est la partie entière de  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$  (cf. [3] pour plus de détails). On a le même résultat pour  $\rho(x, k)$  et  $\sigma(x, k)$  en remplaçant  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$  par  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p+1}$  et  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p-1}$  respectivement.

En résumé, si  $D$  et  $\eta$  sont des nombres réels positifs fixés, nous savons qu'il existe  $x_0 = x_0(D, \eta)$  tel que, si  $x \geq x_0(D, \eta)$ ,  $\pi(x, k)$  est unimodale pour  $1 \leq k \leq D(\log x)(\log \log x)^{-2}$  (le maximum étant atteint pour  $k = k_0 = \log \log x + O(1)$ ) et

$$\pi(x, k+1) \leq \pi(x, k) \quad \text{si} \quad k \geq \frac{\log x}{\log \log x} \left( 1 + \frac{1 - \log 2 + \eta}{\log \log x} \right).$$

Pour terminer la démonstration de l'unimodalité de  $\pi(x, k)$  on peut essayer d'étendre le domaine de validité de la relation (2). Nous laisserons ouverte cette importante question. Notre approche, indépendante des méthodes et des résultats de l'article [7] de Hildebrand et

Tenenbaum, est fondée sur des résultats d'Alladi et un raisonnement par récurrence sur  $k$ , comme nous l'expliquons au paragraphe 3. Les paragraphes 4 et 5 sont dévolus aux détails de la démonstration.

Je remercie les mathématiciens avec lesquels j'ai souvent discuté de ce problème, notamment Paul Erdős, Jean-Louis Nicolas et Gérard Tenenbaum. Cette recherche a été effectuée en grande partie alors que j'étais visiteur à l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de Hongrie. J'y ai bénéficié d'excellentes conditions de travail et d'utiles conversations avec Gabor Halász, Imre Ruzsa et Andras Sárközy : qu'ils en soient remerciés.

## 2. Un argument combinatoire.

Nous démontrons dans ce paragraphe que  $\rho(x, k) \leq \rho(x, k-1)$  si  $k \geq \frac{\log x}{\log \log x} \left(1 + \frac{c}{\log \log x}\right)$  et  $x \geq x_0(c)$ , où  $c$  est une constante arbitraire  $> 1 - \log 2 = 0,306\ 85\dots$

On peut adapter cet argument pour montrer que  $\pi(x, k)$  a la même propriété ; le raisonnement est nettement plus compliqué mais sans idée vraiment nouvelle par rapport au cas de  $\rho(x, k)$ .

Le lemme essentiel est le suivant :

LEMME 1. — Soit  $E$  un ensemble à  $N$  éléments et  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des parties de  $E$  ayant  $k$  éléments. Si  $k > \frac{N}{2}$ , il existe une injection  $\varphi$  de  $\mathcal{E}_k$  dans  $\mathcal{E}_{k-1}$  telle que  $\varphi(A) \subset A$  pour tout  $A \in \mathcal{E}_k$ .

Cela résulte de la solution du « problèmes des mariages » comme l'ont montré Erdős et Nicolas dans [6] (proposition 6).

Notons  $P(x, k)$  l'ensemble des  $n \leq x$ , sans facteur carré, tels que  $\omega(n) = k$  et posons  $f(k) = p_1 p_3 \cdots p_{2k-1}$ , où  $p_j$  désigne le  $j$ -ème nombre premier. Nous construisons par récurrence sur  $k$  une injection  $i_k$  de  $P(f(k), k)$  dans  $P(f(k), k-1)$  telle que  $i_k(n)$  divise toujours  $n$ .

Posons  $i_1(2) = 1$ . Supposons maintenant  $i_k$  définie ; l'ensemble des  $n$  sans facteur carré, tels que  $\omega(n) = k + 1$ , et dont tous les diviseurs premiers sont  $\leq p_{2k+1}$ , est en bijection avec l'ensemble des parties à  $k + 1$  éléments de  $\{1, 2, \dots, 2k + 1\}$ . D'après le lemme 1, on peut associer

injectivement à chacun de ces nombres  $n$  l'un de ses diviseurs  $m$  tels que  $\omega(m) = k$  : on pose  $i_{k+1}(n) = m$ . Maintenant, si le plus grand facteur premier  $p$  d'un élément  $n$  de  $P(f(k+1), k+1)$  est supérieur à  $p_{2k+1}$ ,  $n/p$  appartient à  $P(f(k), k)$  et on peut poser  $i_{k+1}(n) = pi_k(n/p)$ . On vérifie facilement que  $i_{k+1}$  a les propriétés requises.

Si  $x \leq f(k)$ , et si on restreint  $i_k$  à  $P(x, k)$ , on obtient directement  $\rho(x, k) \leq \rho(x, k-1)$ . L'inégalité  $x \leq f(k)$  s'écrit aussi :

$$(3) \quad \sum_{j=1}^k \log p_{2j-1} \geq \log x.$$

En utilisant l'approximation

$$\log p_n = \log n + \log \log n + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right),$$

on voit que (3) s'écrit :

$$k \left( \log k + \log \log k + \log 2 - 1 + O\left(\frac{\log \log k}{\log k}\right) \right) \geq \log x$$

et la résolution en  $k$  de cette dernière inégalité donne bien

$$k \geq \frac{\log x}{\log \log x} \left( 1 + \frac{1 - \log 2 + o(1)}{\log \log x} \right), \quad (x \rightarrow +\infty).$$

### 3. Plan de la démonstration du théorème.

Notre idée principale est de considérer  $\pi(x, k)$  comme cas particulier de la fonction de trois variables :

$$\pi(x, t, k) := \# \{n : 1 \leq n \leq x, (p|n) \Rightarrow (p > t), \omega(n) = k\}.$$

On a bien  $\pi(x, k) = \pi(x, t, k)$  pour  $t < 2$ . L'intérêt de cette extension réside dans l'équation fonctionnelle

$$(4) \quad \pi(x, t, k+1) = \sum_{\substack{p > t \\ \alpha \geq 1}} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}, p, k\right)$$

sur laquelle est fondée notre raisonnement.

La démonstration de (4) est simple : tout entier  $n$  compté dans  $\pi(x, t, k+1)$  s'écrit de manière unique  $n = p^\alpha m$  où  $p > t$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $m \leq x/p^\alpha$ ,  $m$  n'a que des diviseurs premiers  $> p$  et  $\omega(m) = k$ .

Alladi a étudié dans [1] la distribution des valeurs de  $\omega(n)$  quand  $n$  décrit l'ensemble  $S(x, t)$  des entiers  $n \leq x$  dont tous les diviseurs premiers sont  $> t$ . Il a notamment donné des formules asymptotiques pour la loi locale  $\pi(x, t, k)$  quand  $k$  est du même ordre de grandeur que la valeur moyenne de  $\omega(n)$ ,  $n \in S(x, t)$ , à savoir  $\log u + O(1)$ , où  $u = \log x / \log t$ . Nous donnerons au paragraphe 4 une présentation des résultats d'Alladi, modifiés afin de les rendre directement applicables à notre problème.

En nous appuyant sur (4), nous donnerons au paragraphe 5 un raisonnement par récurrence sur  $k$  prouvant le résultat suivant : si  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels donnés tels que  $1 < \lambda < \mu$ , il existe un entier positif  $k_1 = k_1(\lambda, \mu)$  tel que

$$(5) \quad \pi(x, t, k+1) \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k)$$

dès que

$$x \geq t \geq \frac{3}{2}$$

et

$$k \geq \mu \log u + k_1.$$

En faisant  $t = \frac{3}{2}$  on obtient l'unimodalité de  $\pi(x, k)$ , compte tenu de la situation décrite dans l'introduction. On a d'ailleurs la relation  $\pi(x, k+1) = o(\pi(x, k))$  quand  $x$  et  $k/\log \log x$  tendent vers l'infini.

Nous omettrons la démonstration de l'unimodalité de  $\rho(x, k)$  : elle est tout à fait similaire à celle faite pour  $\pi(x, k)$ . Le raisonnement par récurrence est alors nettement simplifié, du fait que seul l'exposant  $\alpha = 1$  intervient dans l'équation fonctionnelle analogue à (4) (cf. [3]).

#### 4. Lois locales pour $\omega(n)$ , $n \in S(x, t)$ .

Nous utilisons dans ce paragraphe le travail d'Alladi [1]. Signalons d'abord qu'il étudie en fait la quantité

$$\tilde{\pi}(x, t, k) := \# \{n : 1 \leq n \leq x, (p|n) \Rightarrow (p \geq t), \omega(n) = k\}.$$

Comme  $\pi(x, t, k)$  est la limite à droite  $\tilde{\pi}(x, t+0, k)$ , nous citerons directement les conséquences de ses résultats pour la fonction  $\pi(x, t, k)$ .

Son analyse repose naturellement sur l'étude du polynôme générateur

$$S_z(x, t) = \sum_{n \in S(x, t)} z^{\omega(n)}$$

dont le comportement asymptotique est appréhendé de deux façons différentes selon que  $t$  est « petit » (méthode de Selberg) ou « grand » (méthode de l'équation fonctionnelle). Nous commençons par les petites valeurs de  $t$ .

LEMME 2. — Soit  $R > 0$ . On a uniformément pour  $\frac{3}{2} \leq t < \exp((\log x)^{2/5})$  et  $|z| \leq R$ ,

$$S_z(x, t) = zg(z, t) \frac{x}{\log x} u^z + O_R\left(\frac{x}{\log x} u^{\operatorname{Re} z - 1}\right)$$

où  $u = \frac{\log x}{\log t}$  et

$$g(z, t) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \left\{ (\log t)^z \prod_{p \leq t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \right\} \prod_{p > t} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 + \frac{z}{p-1}\right).$$

*Démonstration.* — C'est le théorème 1 de [1], présenté ici de façon à insister sur le rôle de la variable  $u$ .

LEMME 3. — La fonction  $g(z, t)$  est une fonction entière de  $z$ , bornée uniformément par rapport à  $t$  dans tout domaine borné de valeurs de  $z$  (il en est donc de même pour ses dérivées);  $g(z, t)$  est minorée par une constante positive  $c(R)$  indépendante de  $t$  dans tout segment  $0 \leq z \leq R$ .

*Démonstration.* — Cela résulte simplement des relations

$$\sum_{p \leq t} \log \left(1 - \frac{1}{p}\right) = -\log \log t + O(1)$$

et

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^z \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) = 1 + O_R(p^{-2}) \quad (|z| \leq R).$$

Nous laissons les détails au lecteur.

LEMME 4. — Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe pour  $|z| \leq R$  et  $v$  un réel positif. On pose  $f(z)e^{vz} = c_0 + c_1z + \dots$

Alors on a, pour  $k \leq vR$  :

$$\left| c_k - f\left(\frac{k}{v}\right) \frac{v^k}{k!} \right| \leq 2M \frac{v^k}{k!} \frac{k}{v^2} \quad \text{où} \quad M = \sup_{|z| \leq R} |f''(z)|.$$

*Démonstration.* — Ce lemme est classique dans la méthode de Selberg (voir [9] et, pour cet énoncé précis, [8] lemme 3).

LEMME 5. — Soit  $R > 0$ . On a uniformément pour  $\frac{3}{2} \leq t < \exp((\log x)^{2/5})$ ,  $x \geq 3$  et  $1 \leq k \leq R \log u$

$$\pi(x, t, k) = g(r, t) \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \left( 1 + O_R\left(\frac{1}{\log \log x}\right) \right); \left( r = \frac{k-1}{\log u} \right).$$

*Remarque.* — Cette formule nous paraît plus naturelle que celle donnée par Alladi ([1] theorem 6) car nous comparons  $\pi(x, t, k)$  à la loi de Poisson de paramètre  $\log u$  au lieu de  $\log \log x$ . De plus, elle fournit un équivalent asymptotique uniforme pour  $\pi(x, t, k)$  dans le domaine  $\frac{3}{2} \leq t < \exp((\log x)^{2/5})$  et  $1 \leq k \leq R \log u$ , ce qui n'était pas le cas dans [1].

*Démonstration.* — Écrivons

$$(6) \quad S_z(x, t) = zg(z, t) \frac{x}{\log x} u^z + Q(x, z, t) \frac{x}{\log x} u^{z-1}.$$

D'après le lemme 2,  $Q(x, z, t)$  est une fonction entière de  $z$  bornée uniformément par rapport à  $t$  et  $x$  ( $\frac{3}{2} \leq t < \exp((\log x)^{2/5})$ ) dans tout domaine borné de valeurs de  $z$ . La relation (6) donne

$$\pi(x, t, k) = \frac{x}{\log x} (c_{k-1} + c'_k)$$

où  $c_{k-1}$  (resp.  $c'_k$ ) est le coefficient de  $z^{k-1}$  (resp.  $z^k$ ) dans le développement de  $g(z, t)u^z$  (resp.  $Q(x, z, t)u^{z-1}$ ) suivant les puissances de  $z$ . Le lemme 4 donne alors, pour  $1 \leq k \leq R \log u$ ,

$$c_{k-1} = g(r, t) \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} + O_R\left(\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{k-1}{(\log u)^2}\right)$$

et  $c'_k = Q\left(x, r + \frac{1}{\log u}, t\right) u^{-1} \frac{(\log u)^k}{k!} + O_R\left(u^{-1} \frac{(\log u)^k}{k!} \frac{k}{(\log u)^2}\right),$

où  $r = \frac{k-1}{\log u}$ . Comme  $\log u \gg \log \log x$  dans la zone considérée, et comme  $g(r, t) \geq c(R) > 0$  d'après le lemme 3, le lemme 5 découle de ces estimations.

Passons maintenant aux grandes valeurs de  $t$ . Nous définissons par récurrence une suite de fonctions  $f_k$  :

$$f_1(u) = 1 \quad \text{pour } u > 1$$

et

$$f_{k+1}(u) = \int_k^{u-1} f_k(v) \frac{dv}{v} \quad \text{pour } u > k+1, \quad k = 1, 2, \dots$$

LEMME 6. — Si  $k \geq 1$  et  $u > k+1$ , on a :

- i)  $f_{k+1}(u) = \int_{1 < v_k < v_{k-1} < \dots < v_1 < u-k} dv_1 \dots dv_k / (v_1 + k - 1)(v_2 + k - 2) \dots (v_{k-1} + 1)v_k$
- ii)  $\frac{1}{k!} (\log(u-1) - \log k)^k \leq f_{k+1}(u) \leq \frac{1}{k!} (\log(u-k))^k$
- iii)  $\log u \cdot f_k(u) \geq k f_{k+1}(u)$ .

*Démonstration.* — i) est évidente ; ii) découle de i) et de l'encadrement  $v_1 v_2 \dots v_k \leq (v_1 + k - 1)(v_2 + k - 2) \dots v_k \leq (v_1 + k - 1)(v_2 + k - 1) \dots (v_k + k - 1)$ .

La démonstration de iii) s'inspire d'un argument d'Erdős dans [5] ; il démontrait que

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) = k+1}} \frac{1}{n} \leq \frac{\log \log x + O(1)}{k+1} \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) = k}} \frac{1}{n}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \log u \cdot f_k(u) &= \int_1^u \frac{dv_1}{v_1} \int_{1 < v_k < \dots < v_2 < u-k+1} dv_2 \dots dv_k / (v_2 + k - 2) \dots v_k \\ &\geq \int_{\substack{1 < v_k < \dots < v_2 < u-k \\ 1 < v_1 < u-k}} dv_1 \dots dv_k / v_1 (v_2 + k - 2) \dots v_k \\ &= \int_{1 < v_1 < v_k < \dots < v_2 < u-k} + \int_{1 < v_k < v_1 < v_{k-1} < \dots < v_2 < u-k} + \dots \\ &+ \int_{1 < v_k < v_{k-1} < \dots < v_3 < v_1 < v_2 < u-k} + \int_{1 < v_k < \dots < v_2 < v_1 < u-k} \end{aligned}$$

Dans chacune de ces  $k$  intégrales, les variables peuvent être renommées  $v_1, \dots, v_k$  de sorte que  $1 < v_k < v_{k-1} < \dots < v_2 < v_1 < u - k$  et l'intégrande est alors  $\geq 1/(v_1+k-1)(v_2+k-2) \dots v_k$  d'où le résultat.

LEMME 7. — Soit  $R > 0$ . On a uniformément pour  $x \geq 3$ ,  $\exp\{(\log \log x)^3\} < t < \sqrt{x}$  et  $|z| \leq R$  :

$$S_z(x, t) = \frac{x}{\log x} \left( M_z(u) + O_R \left( \frac{u^{|z|}}{\log x} \right) \right)$$

où  $M_z(u) = \sum_{1 \leq k < u} f_k(u) z^k$ .

*Démonstration.* — C'est le théorème 3 de [1].

LEMME 8. — Soit  $R > 0$ . On a uniformément pour  $x \geq 3$ ,  $\exp\{(\log \log x)^3\} < t < x^{1/\max(2, k)}$  et  $1 \leq k \leq R \log u$  :

$$\pi(x, t, k) = f_k(u) \frac{x}{\log x} + O_R \left( \frac{x}{\log^2 x} \sqrt{k} \frac{(\log u)^k}{k!} \right).$$

*Remarque.* — Alladi donne ([1], theorem 7) une formule pour  $\pi(x, t, k)$ , asymptotique à condition que  $u$  tende vers l'infini. La formule ci-dessus est plus précise pour les valeurs bornées de  $u$ , qui sont importantes dans notre raisonnement du paragraphe 5.

*Démonstration.* — En intégrant sur  $|z| = r$ , le lemme 7 et la formule intégrale de Cauchy prouvent que

$$\pi(x, t, k) = \frac{x}{\log x} f_k(u) + O_R \left( \frac{x}{\log^2 x} u^r r^{-k} \right),$$

pour tout  $r \leq R$ ,  $x \geq 3$ ,  $\exp\{(\log \log x)^3\} < t < x^{1/k}$ , ( $t < x^{1/2}$  si  $k=1$ ).

Le choix optimal  $r = \frac{k}{\log u}$  et la formule de Stirling donnent le résultat.

## 5. Le raisonnement par récurrence.

Dans ce paragraphe,  $\lambda$  et  $\mu$  désignent deux nombres réels fixés tels que  $1 < \lambda < \mu$ . Toutes les constantes qui interviennent dans ce paragraphe, littérales  $(x_1, R, u_1, M, \varepsilon)$  ou implicites dans les  $O$ ,  $\ll$  et les « assez grand » sont des fonctions de  $\lambda$  et  $\mu$  seulement. Nous définissons

$\pi(x, t, k)$  pour  $x$  et  $t$  réels,  $k$  entier, tels que  $x > 1$ ,  $t \geq 3/2$  et  $k \geq 0$ ;  $x$  et  $t$  définissent  $u = \frac{\log x}{\log t} (> 0)$ .

LEMME 9. — Il existe un nombre réel  $x_1 \geq 3$  tel que les conditions  $x \geq x_1$  et  $\mu \log u \leq k < \mu \log u + 1$  entraînent :

$$\pi(x, t, k+1) \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k).$$

*Démonstration.* — Si  $k = 0$  on a  $\log u \leq 0$  donc  $x \leq t$  et

$$\pi(x, t, 1) = 0 \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, 0).$$

On peut donc supposer  $k \geq 1$ . D'autre part, si  $t \geq x^{1/k+1}$  on a :

$$\pi(x, t, k+1) = 0 \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k).$$

On peut donc supposer  $t < x^{1/k+1}$ , c'est-à-dire  $u > k + 1$ . On en déduit que  $1 \leq k < k + 1 \leq R \log u$  avec  $R = \mu + \frac{2}{\log 2}$ .

Ces remarques étant faites, nous étudions trois cas suivant l'ordre de grandeur de  $t$ . Commençons par supposer  $\frac{3}{2} \leq t < \exp\{(\log x)^{2/5}\}$ .

Le lemme 5 nous donne

$$\begin{aligned} \pi(x, t, k+1) &= g\left(r + \frac{1}{\log u}, t\right) \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^k}{k!} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log \log x}\right)\right) \\ \pi(x, t, k) &= g(r, t) \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log \log x}\right)\right) \end{aligned}$$

avec  $r = \frac{k-1}{\log u}$ . D'après le lemme 3 on a :

$$\begin{aligned} g\left(r + \frac{1}{\log u}, t\right) &= g(r, t) + O\left(\frac{1}{\log u}\right) \\ &= g(r, t) \left(1 + O\left(\frac{1}{\log \log x}\right)\right), \end{aligned}$$

donc  $\frac{\pi(x, t, k+1)}{\pi(x, t, k)} = \frac{\log u}{k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log \log x}\right)\right) < \frac{1}{\lambda}$  si  $x$  est assez grand.

Maintenant, si  $\exp\{(\log x)^{2/5}\} \leq t < x^{1/k+1}$ , on a d'après le lemme 8 :

$$\pi(x, t, k+1) = f_{k+1}(u) \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x} \sqrt{k} \frac{(\log u)^k}{k!}\right)$$

et

$$\pi(x, t, k) = f_k(u) \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x} \sqrt{k} \frac{(\log u)^k}{k!}\right),$$

d'où

$$(7) \quad \pi(x, t, k) - \lambda \pi(x, t, k+1) \\ = \frac{x}{\log x} (f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u)) + O\left(\frac{x}{\log^2 x} \sqrt{k} \frac{(\log u)^k}{k!}\right).$$

Supposons d'abord  $u$  assez grand, disons  $u \geq u_1$ . Nous aurons, d'après le lemme 6 :

$$\begin{aligned} f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u) &\geq f_{k+1}(u) \left( \frac{k}{\log u} - \lambda \right) \\ &\geq (\mu - \lambda) \frac{(\log(u-1) - \log k)^k}{k!} \\ &= (\mu - \lambda) \frac{(\log u + O(\log \log u))^k}{k!} \\ &= \frac{(\log u)^{k+O(1)}}{k!} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \pi(x, t, k) - \lambda \pi(x, t, k+1) \\ &\geq \frac{x}{\log x} \frac{(\log u)^{k+O(1)}}{k!} \left( 1 + O\left( \sqrt{k} \frac{(\log u)^{O(1)}}{\log x} \right) \right), \\ &> 0 \text{ si } x \text{ est assez grand,} \end{aligned}$$

puisque  $k \ll \log u \ll \log \log x$ .

Enfin, si  $u < u_1$ , on peut utiliser (7) sous la forme

$$\pi(x, t, k) - \lambda \pi(x, t, k+1) \geq \frac{x}{\log x} (f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u)) - M \frac{x}{\log^2 x},$$

où  $M$  est une constante positive. Pour chaque entier  $k$ ,  $1 \leq k < u_1 - 1$ , notons  $I_k$  l'intervalle, éventuellement vide,  $]k+1, \exp(k/\mu)]$ . D'après le lemme 6 la fonction  $f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u)$  est continue sur  $I_k$ , strictement positive, et sa limite en  $k+1$  est  $f_k(k+1) > 0$ . On en déduit l'existence d'une constante  $\varepsilon > 0$  telle que :

$$f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u) \geq \varepsilon$$

si

$$k \geq 1, k+1 < u \leq u_1 \quad \text{et} \quad k \geq \mu \log u.$$

Il en résulte que :

$$\pi(x, t, k) - \lambda \pi(x, t, k+1) \geq \frac{x}{\log x} \left( \varepsilon - \frac{M}{\log x} \right) > 0 \quad \text{si } x \text{ est assez grand.}$$

LEMME 10. — *Les conditions  $t \geq x_1$  et  $k \geq \mu \log u$  entraînent*

$$\pi(x, t, k+1) \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k).$$

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 0$ , on a  $u \leq 1$  donc  $\pi(x, t, 1) = 0 \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, 0)$ .

Supposons le résultat vrai pour l'entier  $k$  et démontrons-le pour l'entier  $k+1$ . Nous supposons donc  $k+1 \geq \mu \log u$ . On a :

$$\pi(x, t, k+2) = \sum_{\substack{p > t \\ \alpha \geq 1, p^\alpha < x}} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}, p, k+1\right).$$

Si  $k \geq \mu \log u$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à chaque terme de la somme car  $\frac{x}{p^\alpha} > 1$ ,  $p > t \geq x_1$  et

$$k \geq \mu \log \left( \frac{\log(x/p^\alpha)}{\log p} \right).$$

On obtient alors :

$$\pi(x, t, k+2) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{p > t \\ \alpha \geq 1, p^\alpha < x}} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}, p, k\right) \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k+1)$$

où la dernière inégalité n'est stricte que si  $k = 0$  et si  $x$  est une puissance d'un nombre premier  $> t$ .

Il reste le cas où  $\mu \log u \leq k + 1 < \mu \log u + 1$ . Si  $x < x_1 \leq t$ , on a  $\pi(x, t, k+2) = 0 \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k+1)$ , et si  $x \geq x_1$  le lemme 9 s'applique (à l'entier  $k+1$  au lieu de  $k$ ).

Nous démontrons (5), et donc le théorème, dans le lemme suivant.

LEMME 11. — *La condition  $k \geq \mu \log u + \pi(x_1)$  entraîne*

$$\pi(x, t, k+1) \leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k).$$

*Démonstration.* — On peut supposer  $x \geq t$  et, vu le lemme 10,  $t < x_1$ . Notons  $a$  un entier positif générique tel que :

$$p|a \Rightarrow t < p \leq x_1.$$

Nous aurons  $\omega(a) \leq \pi(x_1) \leq k$  et

$$\pi(x, t, k+1) = \sum_{a < x} \pi\left(\frac{x}{a}, x_1, k+1 - \omega(a)\right).$$

Comme  $\frac{x}{a} > 1$  et

$$\begin{aligned} k - \omega(a) &\geq \mu \log u + \pi(x_1) - \omega(a) \\ &\geq \mu \log \left( \frac{\log(x/a)}{\log x_1} \right), \end{aligned}$$

le lemme 10 nous donne

$$\begin{aligned} \pi(x, t, k+1) &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{a < x} \pi\left(\frac{x}{a}, x_1, k - \omega(a)\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \pi(x, t, k) \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. ALLADI, The distribution of  $v(n)$  in the sieve of Eratosthenes, *Quart. J. Math. Oxford*, (2), 33 (1982), 129-148.
- [2] M. BALAZARD, Comportement statistique du nombre de facteurs premiers des entiers, *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1987-1988*, Birkhäuser, C. Goldstein éd., 1-21.

- [3] M. BALAZARD, Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres, à paraître au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux.
- [4] M. BALAZARD, H. DELANGE et J.-L. NICOLAS, Sur le nombre de facteurs premiers des entiers, C.R.A.S., 306 série I (1988), 511-514.
- [5] P. ERDÖS, On the integers having exactly  $k$  prime factors, Ann. of Math., 49 (1948), 53-66.
- [6] P. ERDÖS et J.-L. NICOLAS, Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres, Bull. Sci. Math., (2), 100 (1976), 301-320.
- [7] A. HILDEBRAND et G. TENENBAUM, On the number of prime factors of an integer, Duke Math. J., 56 (1988), 471-501.
- [8] J.-L. NICOLAS, Autour de formules dues à A. Selberg, Colloque Hubert Delange, Publications Mathématiques d'Orsay, 1982.
- [9] A. SELBERG, Note on a paper by L. G. Sathe, J. Indian Math. Soc., 18 (1954), 83-87.

Manuscrit reçu le 8 juin 1989,  
révisé le 26 février 1990.

Michel BALAZARD,  
Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences  
123, rue Albert-Thomas  
87060 Limoges Cedex.