ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN SAINT RAYMOND

Fonctions séparément analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 1 (1990), p. 79-101

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_1_79_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 1 (1990), 79-101

FONCTIONS SÉPARÉMENT ANALYTIQUES

par Jean SAINT RAYMOND

Le but de cet article est d'étudier les fonctions de deux variables réelles qui sont séparément analytiques. A la différence du cas des fonctions de variables complexes, pour lesquelles le théorème bien connu de Hartogs-Osgood assure qu'elles sont analytiques, des exemples classiques, comme la fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ prolongée par 0 en $(0, 0)$, montrent que ces fonctions ne sont pas nécessairement analytiques, ni même continues.

Notre principal résultat concernant les fonctions séparément analytiques définies sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$ est le suivant :

Si f est séparément analytique sur Ω, il existe un fermé F de Ω tel que f soit analytique sur $\Omega \backslash F$ et que les deux projections $\pi_1(F) = \{x : \exists y\ (x, y) \in F\}$ et $\pi_2(F) = \{y : \exists x\ (x, y) \in F\}$, qui sont réunions dénombrables de compacts, soient de capacité logarithmique nulle.

Inversement, si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et F un fermé de Ω vérifiant la condition ci-dessus, on construit une fonction séparément analytique sur Ω dont le domaine d'analyticité est l'ouvert $\Omega \backslash F$, ce qui montre que la condition ci-dessus est optimale.

Le referee nous a signalé que les méthodes utilisées ici permettent d'étendre ces résultats à des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ et séparément analytiques, en remplaçant, pour les projections F_1 et F_2 de l'ensemble singulier, polaires par pluripolaires dans $\mathbf{C}^m$ et $\mathbf{C}^n$. Toutefois, par souci de clarté et de simplicité, nous nous limiterons au cas des fonctions de deux variables réelles.

Mots-clés : Fonctions analytiques – Capacité logarithmique – Ensembles polaires.
Classification A.M.S. : 26E05 – 26B05 – 31A05.

Nous remercions M. Hervé ainsi que le referee d'une version antérieure de ce papier, qui nous ont fait connaître les travaux de J. Siciak sur les fonctions séparément analytiques.

Pour toutes les notions de théorie du potentiel utilisées ici, nous renvoyons à [B]. Citons seulement l'énoncé suivant, qui n'y figure pas explicitement, et qui sera utile :

THÉORÈME 1. — *Si (v_n) est une suite localement minorée de fonctions surharmoniques continues définies sur l'ouvert Ω de $\mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, la fonction $v = \inf_n v_n$ est continue en dehors d'un K_σ polaire.*

La fonction v est s.c.s., et égale, d'après le théorème de Cartan, à une fonction s.c.i. w inférieure à v, en dehors d'un ensemble polaire E. On a donc :

$$E \supset E_1 = \{x \in \Omega : w(x) \neq v(x)\} = \bigcup_n \{x \in \Omega : v(x) - w(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Il en résulte que E_1 est une réunion dénombrable de compacts polaires. De plus, si x appartient à $\Omega \setminus E_1$ et $\varepsilon > 0$, $\{y : v(y) < v(x) + \varepsilon\}$ est un voisinage ouvert de x puisque v est s.c.s., et

$$\begin{aligned} \{y : v(y) > v(x) - \varepsilon\} &= \{y : v(y) > w(x) - \varepsilon\} \\ &\supset \{y : w(y) > w(x) - \varepsilon\} \end{aligned}$$

est un voisinage de x puisque w est s.c.s. Donc v est continue en x.

1. Fonctions séparément analytiques.

Si f est une fonction analytique au voisinage d'un intervalle compact I de $\mathbf{R}$, il est bien connu que pour tout x_0 de I, il existe deux constantes M et $\rho > 0$ telles que, pour tout $n \geq 0$, on ait

$$\left|\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\right| \leq M.n!\rho^{-n}.$$

La quantité $Q(f, x_0) = \inf_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\right|\right)^{-1/n}$ est donc strictement positive, et f se prolonge en une fonction holomorphe sur le disque de centre x_0 et de rayon $Q(f, x_0)$.

THÉORÈME 2. — *Si f est analytique au voisinage d'un intervalle compact I de $\mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto Q(f, x)$ est 2–lipschitzienne sur I.*

Soient $x_0 \in I$ et $\lambda = Q(f, x_0)$. Il existe donc $\delta > 0$ et une suite (a_n) avec, pour $|h| < \delta$:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty a_n h^n \quad \text{et} \quad |a_n| \leq \lambda^{-n} \text{ pour } n \geq 1$$

d'où

$$\frac{1}{p!}|f^{(p)}(x_0 + h)| \leq \sum_0^\infty \lambda^{-n-p} \frac{(n+p)!}{n!p!} |h|^n = \lambda^{-p}\left(1 - \frac{|h|}{\lambda}\right)^{-p-1}$$
$$\leq \frac{\lambda^p}{(\lambda - |h|)^{2p}} \quad \text{si } p \geq 1$$

et

$$Q(f, x_0 + h) \geq \frac{(\lambda - |h|)^2}{\lambda} \geq \lambda - 2|h|,$$

ce qui montre que $Q(f, .)$ est 2–lipschitzienne sur I. □

Il en résulte que, si f est analytique au voisinage d'un intervalle compact I, la quantité

$$Q(f, I) = \inf\{Q(f, x) : x \in I\}$$

est strictement positive. Nous allons maintenant l'exprimer à l'aide des différences finies de f. Si f est une fonction définie sur I et $h \in \mathbf{R}$, on pose

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$$

qui est définie pouvu que x et $x+h$ soient dans I. On définit inductivement, pour $n \geq 1$

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{n-1} f)(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j f(x + jh)$$

pourvu que x et $x + nh$ appartiennent à l'intervalle I.

Le théorème suivant est classique.

THÉORÈME 3. — *Si f est de classe C^n sur l'intervalle I,*

$$\sup_I |f^{(n)}| = \sup\{|h^{-n} \Delta_h^n f(x)| : x \in I,\ x + nh \in I\}.$$

On en déduit aisément :

THÉORÈME 4. — *Soit f une fonction sur l'intervalle compact $I = [a, b]$. Pour que f soit analytique et vérifie $Q(f, I) \geq \rho$, il faut et il suffit que*

$$\rho \leq \inf\left\{|h| \cdot \left|\frac{1}{n!}\Delta_h^n f(x)\right|^{-1/n} : n \geq 1,\ x \in I,\ x + nh \in I\right\}.$$

Le seul point non trivial est que f est C^∞ dès que $|\Delta_h^n f(x)|$ reste majoré par $n!|h|^n \cdot \rho^{-n}$ pour $n \geq 1$ et h assez petit. Pour cela, on utilise une suite (φ_k) de fonctions C^∞, positives, d'intégrale 1 et à support dans $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$. Alors la suite $(f * \varphi_k)_{k \geq p}$ est, par le théorème d'Ascoli, relativement compacte dans $C^\infty([a+\frac{1}{p}, b-\frac{1}{p}])$, et sa seule valeur d'adhérence possible est la restriction de f à $[a+\frac{1}{p}, b-\frac{1}{p}]$, d'où le fait que f est C^∞ sur $]a, b[$.

Nous énonçons maintenant des conditions pour qu'une fonction séparément analytique soit analytique au voisinage d'un point. Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction séparément analytique sur Ω. Pour $(x, y) \in \Omega$ on notera

$$Q'(f, x, y) = Q(f(., y), x) = \inf\left\{\left|\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, y)\right|^{-1/n} : n \geq 1\right\}$$

$$Q''(f, x, y) = Q(f(x, .), y) = \inf\left\{\left|\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x, y)\right|^{-1/n} : n \geq 1\right\}.$$

On sait que si f est analytique en (x_0, y_0), il existe $\delta > 0$ et V voisinage de (x_0, y_0) tels que, pour $(x, y) \in V$, on ait

$$Q'(f, x, y) \geq \delta \quad \text{et} \quad Q''(f, x, y) \geq \delta.$$

Inversement, il résulte des travaux de J. Siciak, ([S1], [S2], voir aussi [H]) qu'on a le théorème suivant :

THÉORÈME 5 (Siciak). — *Soit f une fonction définie sur un voisinage ouvert convexe ω de (x_0, y_0) dans $\mathbf{R}^2$, et séparément analytique. On suppose que pour un $\eta > 0$ on a*

$$\begin{cases} 0 < \rho_2 < \inf\{Q''(f, x, y_0) : |x - x_0| < \eta\} \\ 0 < \rho_1 < \rho_1' = \inf\{Q''(f, x_0, y) : |y - y_0| < \eta\}. \end{cases}$$

Alors il existe un $\alpha > 0$, ne dépendant que de $\eta, \rho_1, \rho_1', \rho_2$ tel que f se prolonge en une fonction holomorphe sur le polydisque $B = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 : |z - x_0| < \rho_1$ et $|w - y_0| < \alpha\}$.

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 6. — *Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction séparément analytique sur Ω. Alors f est analytique au voisinage d'un* *point (x_0, y_0) de Ω si et seulement si $Q'(f,x,y)$ et $Q''(f,x,y)$ sont minorés par un $\delta > 0$ au voisinage de (x_0, y_0).*

2. Domaine d'analyticité.

Dans toute cette partie, Ω désignera un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f une fonction séparément analytique sur Ω. On appellera *domaine d'analyticité* de f l'ensemble Ω' des points de Ω au voisinage desquels f est analytique, et *ensemble singulier* de f le fermé $F = \Omega\backslash\Omega'$ de Ω. On va prouver que les deux projections $F_1 = \{x \in \mathbf{R} : \exists y\ (x,y) \in F\}$ et $F_2 = \{y \in \mathbf{R} : \exists x\ (x,y) \in F\}$ sont recouvertes par une famille dénombrable de compacts de $\mathbf{R}$ de capacité logarithmique nulle. En particulier F_1 et F_2 sont d'intérieur vide, et Ω' est dense dans Ω.

Fixons d'abord deux intervalles compacts I et J tels que $I \times J \subset \Omega$. Alors, pour $x \in I$, on pose

$$q''(x) = Q(f(x,.), J) = \inf_{y\in J} Q''(f,x,y) > 0,$$

et pour $y \in J$, on pose

$$q'(y) = Q(f(.,y), I) = \inf_{x\in I} Q'(f,x,y) > 0.$$

Il résulte du théorème 1.4 que

$$q'(y) = \inf \left\{ |h|\cdot \left| \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j f(x+jh,y) \right|^{-1/n} : n \geq 1,\ x \in I,\ x+nh \in I \right\}$$

donc que q' est semi-continue supérieurement sur J, puisque f est séparément continue. De même q'' est semi-continue supérieurement sur I.

Il en résulte que les ensembles $E'_p = \{x \in \overset{\circ}{I} : q''(x) \geq \frac{1}{p}\}$ sont fermés dans $\overset{\circ}{I}$ et recouvrent, pour $p \in \mathbf{N}$, l'ouvert $\overset{\circ}{I}$. D'après le théorème de Baire, la réunion U des intérieurs des E'_p est un ouvert dense dans $\overset{\circ}{I}$.

De même, les ensembles

$$E''_p = \{y \in \overset{\circ}{J} : q'(y) \geq \frac{1}{p}\}$$

sont fermés et recouvrent $\overset{\circ}{J}$. Et la réunion V des intérieurs des E''_p est un ouvert dense dans $\overset{\circ}{J}$.

LEMME 1. — *Le domaine d'analyticité de f contient $(U \times V)$.*

Si $(x,y) \in (U \times V)$, il existe p_1 et p_2 tels que $E'_{p_1} \times E''_{p_2}$ soit un voisinage de (x,y) dans Ω. Il résulte alors du corollaire 1.6 que f est analytique au voisinage de (x,y), puisque, si $\omega = E'_{p_1} \times E''_{p_2}$, on a

$$\forall (x',y') \in \omega \qquad Q'(f,x',y') \geq \frac{1}{p_2} \quad \text{et} \quad Q''(f,x',y') \geq \frac{1}{p_1}.$$

□

COROLLAIRE 2. — *Le domaine d'analyticité Ω' de f est dense dans Ω.*

Si ω est un ouvert non vide de Ω, (x_0,y_0) un point de ω, I et J deux intervalles ouverts tels que

$$(x_0,y_0) \in I \times J \subset \overline{I} \times \overline{J} \subset \omega,$$

les ouverts U et V de I et J définis plus haut sont non vides et $\omega \cap \Omega'$ contient l'ouvert non vide $(U \times V)$. Donc $\Omega' \cap \omega \neq \emptyset$, ce qui prouve que Ω' est dense dans Ω.

LEMME 3. — *Avec les notations précédentes, $U \times J$ est contenu dans le domaine d'analyticité Ω' de f, ainsi que $I \times V$.*

Soient $x_0 \in U$, $y_0 \in J$, et $p \in \mathbf{N}$ tel que E'_{p-1} soit un voisinage de x_0. Il existe, puisque V est dense dans J, un $y_1 \in V$ tel que $|y_0 - y_1| < \dfrac{1}{p}$. Alors $(x_0,y_1) \in U \times V \subset \Omega'$, d'après le lemme 1. Par conséquent, il existe, en vertu du corollaire 1.6 un $\varepsilon > 0$ et un $\delta > 0$ tels que

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |y - y_1| < \varepsilon \Rightarrow Q'(f,x,y) \geq \delta.$$

Si, de plus, $x \in E'_{p-1}$ et $y \in J$, on a

$$Q''(f,x,y) \geq q''(x) \geq \frac{1}{p-1}.$$

On a donc, au voisinage de (x_0,y_1)

$$Q'(f,x,y) \geq \delta \quad \text{et} \quad Q''(f,x,y) \geq \frac{1}{p-1}.$$

Si ω est un voisinage ouvert convexe de $\{x_0\} \times J$ contenu dans Ω, il résulte du théorème 1.5 qu'existent un $\alpha > 0$ et une fonction analytique f_1 sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_1 - \dfrac{1}{p}, y_1 + \dfrac{1}{p}[= R$ qui coïncide avec f sur $\omega \cap R$, qui est un voisinage de (x_0,y_0).

Donc f est analytique au voisinage de (x_0, y_0), c'est-à-dire $U \times J \subset \Omega'$. On voit de même que $I \times V \subset \Omega'$. □

COROLLAIRE 4. — *Si F est l'ensemble singulier de la fonction séparément analytique f, les projections F_1 et F_2 de F sont maigres.*

Il existe deux suites d'intervalles ouverts bornés (I_k) et (J_k) telles que,

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_k I_k \times J_k \\ \text{et} \\ \forall k\ \overline{I}_k \times \overline{J}_k \subset \Omega. \end{cases}$$

Si U_k et V_k sont les ouverts denses de I_k et J_k définis comme plus haut, il résulte du lemme 3 que

$$\forall k \begin{cases} F \cap (I_k \times J_k) \subset (I_k \backslash U_k) \times J_k \\ F \cap (I_k \times J_k) \subset I_k \times (J_k \backslash V_k). \end{cases}$$

Donc $F_1 \subset \bigcup_k (\overline{I}_k \backslash U_k)$ et $F_2 \subset \bigcup_k (\overline{J}_k \backslash V_k)$, ce qui achève la démonstration car, pour tout k, les compacts $\overline{I}_k \backslash U_k$ et $\overline{J}_k \backslash V_k$ sont rares dans $\mathbf{R}$. □

LEMME 5. — *Soient F_1 et F_2 les projections de l'ensemble singulier F, C_2 une partie dense de $\mathbf{R}$ et $x_0 \in F_1$. Alors il existe un $\beta \in C_2$ tel que la fonction $q_\beta : x \mapsto Q''(f, x, \beta)$ soit définie au voisinage de x_0 et discontinue en x_0.*

Soient y_0 tel que $(x_0, y_0) \in F$ et ω un voisinage convexe de (x_0, y_0) relativement compact dans Ω. Alors $\overline{\omega} \cap F$ est compact. Sa deuxième projection $K_2 = \{y : \exists x\ (x, y) \in \overline{\omega} \cap F\}$ est donc un compact contenu dans F_2, donc rare.

Soit $\delta = Q''(f, x_0, y_0) > 0$. D'après le théorème 1.2, Q'' est 2–lipschitzienne en y. Alors

$$W = \left]y_0 - \frac{\delta}{4}, y_0 + \frac{\delta}{4}\right[\cap \{y : (x_0, y) \in \omega\} \cap (\mathbf{R} \backslash K_2)$$

est un ouvert non vide, donc contient un $\beta \in C_2$. Et on a

$$q_\beta(x_0) = Q''(f, x_0, \beta) \geq Q''(f, x_0, y_0) - 2|y_0 - \beta| > \delta - 2 \cdot \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}.$$

Puisque $(x_0, \beta) \in \omega$ et $\beta \notin K_2$, on a $(x_0, \beta) \notin F$.

Il existe donc, un $\varepsilon > 0$ et un $\rho > 0$ tels que

$$|y - \beta| < \varepsilon \Rightarrow Q'(f, x_0, y) > \rho.$$

Si q_β était continue en x_0, il existerait un ε' tel que $|x - x_0| < \varepsilon' \Rightarrow q_\beta(x) > q_\beta(x_0) - \dfrac{\delta}{4} > \dfrac{\delta}{4}$.

On pourrait alors conclure du théorème 1.5, l'existence d'un $\alpha > 0$ et d'une fonction analytique f_1 sur $R =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]\beta - \frac{\delta}{4}, \beta + \frac{\delta}{4}[$ coïncidant avec f sur $\omega \cap R$, qui est un voisinage de (x_0, y_0). Ceci entraînerait que $(x_0, y_0) \notin F$, contrairement au choix de y_0. Donc q_β est discontinue en x_0. □

LEMME 6. — *Si F_1 et F_2 sont les deux projections de l'ensemble singulier F de f, si $\beta \notin F_2$, la fonction $q_\beta : x \mapsto Q''(f, x, \beta)$ définie sur l'ouvert $\Omega_\beta = \{x : (x, \beta) \in \Omega\}$ est continue en dehors de la réunion d'une famille dénombrable de compacts de Ω_β de capacité nulle.*

Pour tout x de Ω_β, $(x, \beta) \notin F$ puisque $\beta \notin F_2$. Il existe donc $\delta_x > 0$ et $\rho_x > 0$ et une série entière $S_x(z, w)$ convergeant dans le polydisque $\{(z, w) : |z| < \delta_x \text{ et } |w| < \rho_x\}$ tels que, pour z et w réels et assez petits, on ait :

$$f(x + z, \beta + w) = S_x(z, w).$$

Par le théorème de Lindelöf, on peut extraire du recouvrement $]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}[$ de Ω_β un sous-recouvrement dénombrable. Il suffit donc de démontrer que, sur $[x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}]$, q_β est continue en dehors de la réunion d'une famille dénombrable de compacts de capacité nulle. Soit $\sum\limits_{m,\ell} a_{m,\ell} z^m w^\ell$ la série entière S_x. Elle converge normalement sur le polydisque compact $\{(z, w) : |z| \leq \frac{\delta_x}{2} \text{ et } |w| \leq \frac{\rho_x}{2}\}$, donc y est bornée par un $M < +\infty$. On a donc

$$S_x(z, w) = \sum_{\ell=0}^{\infty} w^\ell \Big(\sum_m a_{m,\ell} z^m \Big) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell(z) \cdot w^\ell$$

où $C_\ell(z)$ est la série entière $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m,\ell} z^m$ qui converge normalement sur le disque compact $\left\{ z : |z| \leq \dfrac{\delta_x}{2} \right\}$.

Les inégalités de Cauchy, appliquées à la fonction $w \mapsto S_x(z,w)$, donnent :

$$|C_\ell(z)| \leq M \cdot \left(\frac{\rho_x}{2}\right)^{-\ell}$$

donc

$$|C_\ell(z)|^{1/\ell} \leq M^{1/\ell} \cdot \frac{2}{\rho_x} \leq \frac{2(M+1)}{\rho_x} \quad \text{si } \ell \geq 1.$$

De plus, si h est réel, avec $|h| \leq \dfrac{\delta_x}{2}$,

$$\begin{aligned} q_\beta(x+h) &= \inf\left\{\left|\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^x}(x+h,\beta)\right|^{1/n} : n \geq 1\right\} \\ &= \inf\left\{|C_n(x+h)|^{-1/n} : n \geq 1\right\}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout ℓ, la fonction $z \mapsto \log|C_\ell(z)|^{-1/\ell}$ est surharmonique sur le disque $D\big(0, \dfrac{\delta_x}{2}\big)$, minorée par $M_1 = \log \dfrac{\rho_x}{2(M+1)}$, et continue à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$. La suite

$$g_m(z) = \inf\left\{\log\left(|C_\ell(z)|^{-1/\ell}\right) : 1 \leq \ell \leq m\right\}$$

est donc une suite décroissante de fonctions surharmoniques sur $D\big(0, \dfrac{\delta_x}{2}\big)$, continues à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ et uniformément minorées, qui décroît vers la fonction

$$g(z) = \inf\left\{\log\left(|C_\ell(z)|^{-1/\ell}\right) : \ell \geq 1\right\}.$$

Et on a, pour h réel avec $|h| \leq \dfrac{\delta_x}{2}$

$$g(h) = \log q_\beta(x+h).$$

Donc g est discontinue en tout point h pour lequel $q_\beta(x+h)$ est discontinu. Et, d'après le théorème 1, les points de discontinuité de g sont recouverts par une suite de compacts de capacité nulle, ce qui termine la démonstration. □

THÉORÈME 7. — *Si f est une fonction séparément analytique sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$, si F_1 et F_2 sont les projections de l'ensemble singulier de f, F_1 et F_2 sont réunions dénombrables de compacts de capacité nulle.*

Il suffit de le prouver pour F_1. Puisque Ω est réunion d'une suite (P_n) de compacts, F_1 est la réunion des projections des compacts $P_n \cap F$, donc réunion dénombrable de compacts. Il suffit donc de prouver que F_1 est recouvert par une suite de compacts de capacité nulle. Mais si C_2 est une partie dénombrable dense de $\mathbf{R}\backslash F_2$, et si, pour chaque $\beta \in C_2$, $(K_{\beta,m})_{m\in\mathbf{N}}$

est une suite de compacts de capacité nulle de Ω_β recouvrant l'ensemble des points de discontinuité de q_β, en vertu du lemme 6, il résulte du lemme 5 que

$$F_1 \subset \bigcup \{K_{\beta,m} : m \in \mathbf{N},\ \beta \in C_2\},$$

ce qui achève la démonstration.

3. Construction de fonctions séparément analytiques.

On va maintenant montrer que, si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et F un fermé de Ω dont les projections sont recouvertes par une réunion dénombrable de compacts de capacité nulle, il existe une fonction séparément analytique sur Ω dont l'ensemble singulier est F, c'est-à-dire que la condition nécessaire donnée par le théorème 2.7 est aussi suffisante.

LEMME 1. — *Si X est la réunion d'une suite (X_p) de compacts de $]-1,1[$ de capacité nulle, il existe une suite (a_k) de fonctions holomorphes sur le disque unité* $\mathbf{D}$ *de* $\mathbf{C}$, *bornées par 1 en module telles que*

i) $\forall z \in X \quad |a_k(z)|^{1/k} \to 0$ *quand* $k \to \infty$

ii) $\forall z \in \mathbf{D}\backslash\mathbf{R} \quad |a_k(z)|^{1/k} \to 1$ *quand* $k \to \infty$.

Puisque X_p est polaire, il existe pour tout p une mesure de probabilité μ_p sur X_p telle que

$$V_{\mu_p}(z) = \int_{X_p} \log\left|\frac{1-xz}{z-x}\right| d\mu(x) \ \text{ soit } +\infty$$

en tout point de X_p. Alors si μ est la mesure de probabilité $\mu = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p-1}\mu_p$, la fonction

$$V_\mu(z) = \int \log\left|\frac{1-xz}{z-x}\right| d\mu(x) \ \text{ est } +\infty \text{ en tout point de } X,$$

positive sur $\mathbf{D}$, et continue sur $\mathbf{D}\backslash\mathbf{R}$, majorée en $z = s+it$ par $\log\left|\frac{2}{t}\right|$.

Munissons $X^{\mathbf{N}}$ de la loi de probabilité P pour laquelle toutes les coordonnées sont indépendantes et de même loi μ. Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, $\int |x^m| d\mu(x) < +\infty$. Il résulte donc de la loi des grands nombres que, presque sûrement

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j^m = \int x^m d\mu(x).$$

On a donc, presque sûrement

$$\forall m \in \mathbf{N} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j^m = \int x^m d\mu(x).$$

Pour une telle suite (x_k) dans $X^{\mathbf{N}}$, la suite de mesures de probabilité

$$\mu_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{x_j}$$

vérifie donc

$$\forall m \in \mathbf{N} \qquad \lim_{k\to\infty} \int x^m d\mu_k(x) = \int x^m d\mu(x)$$

donc converge vaguement vers μ dans les mesures sur $[-1,1]$.

Fixons donc une telle suite (x_k), et posons

$$K = \{\mu\} \cup \{\mu_k : k \in \mathbf{N}\}$$

qui est compact pour la topologie vague. Définissons, pour $p \in \mathbf{N}$ et $1 > \varepsilon > 0$, une fonction f_ε sur $X_p \times K$

$$f_\varepsilon(z,\nu) = \int \log \frac{|1-zx|}{\varepsilon + |z-x|} d\nu(x).$$

Les fonctions f_ε sont continues sur $X_p \times K$ et tendent vers $V_\nu(z)$. Par conséquent, pour $\theta < +\infty$

$$\{(z,\nu) \in X_p \times K : \forall \varepsilon > 0 \quad f_\varepsilon(z,\nu) \leq \theta\}$$

est un compact disjoint de $X_p \times \{\mu\}$, dont la projection sur K est un compact disjoint de $\{\mu\}$. Il existe donc un k_0 tel que

$$\forall z \in X_p \quad \forall k \geq k_0 \qquad \sup_{\varepsilon>0} f_\varepsilon(z,\mu_k) = V_{\mu_k}(z) > \theta.$$

Donc, pour tout $\theta < +\infty$ et tout p, il existe un k_0 tel que

$$\forall z \in X_p \quad \forall k \geq k_0 \qquad V_{\mu_k}(z) > \theta.$$

On peut donc définir une suite $\ell(q)$ croissante telle que $\ell(q) \geq 2$ et

$$\forall z \in \bigcup_{p\leq q} X_p \quad \forall \ell \geq \ell(q) \qquad V_{\mu_\ell}(z) > q^2.$$

Et si on définit la suite $\eta(k)$ par

$$\eta(k) = \frac{1}{q} \quad \text{si} \quad q\cdot\ell(q) \leq k < (q+1)\cdot\ell(q+1)$$

puis

$$a_k(z) = \prod_{j\leq k\cdot\eta(k)} \frac{z-x_j}{1-x_j z}$$

la suite $\eta(k)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, et les fonctions a_k sont holomorphes bornées par 1 en module sur $\mathbf{D}$. De plus,

$$\begin{aligned}\log|a_k(z)|^{1/k} &= \frac{1}{k}\sum_{j\leq k\cdot\eta(k)}\log\left|\frac{z-x_j}{1-x_jz}\right| \\ &= \frac{\ell}{k}V_{\mu_\ell}(z)\end{aligned}$$

si ℓ est la partie entière de $k\cdot\eta(k)$.

Alors si $z = s + it \in \mathbf{D}\backslash\mathbf{R}$

$$0 \leq V_{\mu_\ell}(z) \leq \log\left|\frac{2}{t}\right|$$

et

$$\frac{\ell}{k} \leq \frac{k\cdot\eta(k)}{k} = \eta(k)$$

d'où

$$\lim_{k\to\infty}\log|a_k(z)|^{1/k} = 0 \quad \text{si } z \in \mathbf{D}\backslash\mathbf{R}$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty}|a_k(z)|^{1/k} = 1.$$

Et si $z \in X$, il existe p tel que $z \in X_p$. Alors, si $q \geq p$ et $q\cdot\ell(q) \leq k < (q+1)\ell(q+1)$, on a $\eta(k) = \dfrac{1}{q}$ donc $k\cdot\eta(k) = \dfrac{k}{q} \geq \ell(q)$ et $\ell \geq \ell(q)$. On en déduit $V_{\mu_\ell}(z) \geq q^2$, et $\dfrac{\ell}{k} \geq \dfrac{k(\eta(k)) - 1}{k} = \eta(k) - \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{q\cdot\ell(q)} \geq \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{2q} = \dfrac{1}{2q}$ d'où

$$\log|a_k(z)|^{1/k} \leq \frac{-1}{2q}\cdot q^2 = -\frac{q}{2}$$

et

$$\lim_{k\to\infty}|a_k(z)|^{1/k} = 0.$$

□

LEMME 2. — *Il existe une fonction φ continue sur le disque unité compact $\overline{\mathbf{D}}$ et holomorphe dans $\mathbf{D}$ et une mesure de probabilité λ sur $[-1,1]$ telles que la fonction φ^* définie sur $\overline{\mathbf{D}}$ par*

$$\varphi^*(z) = \int\log|z-it|d\lambda(t) - \mathcal{R}e\,\varphi(z)$$

vérifie

$$\begin{cases}\varphi^*(z) = 0 & \text{si } \mathcal{R}e\, z \geq 0 \\ \varphi^*(z) = \pi\cdot\mathcal{R}e(z^3) & \text{si } \mathcal{R}e\, z \leq 0.\end{cases}$$

En particulier,
$$|\varphi^*(z)| \leq \pi \quad \text{si} \quad z \in \overline{\mathbf{D}}.$$

La fonction φ définie sur $\mathbf{D}$ par
$$\varphi(z) = z^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log(z^2+1) - \frac{i}{2}z^3 \log\frac{1+iz}{1-iz} - \frac{\pi}{2}z^3$$
est holomorphe et se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\mathbf{D}}$. Si on note λ la probabilité sur $[-1,1]$ de densité $\frac{3t^2}{2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, on a $\mathcal{R}e\,\varphi(z) = \int \log|z-it|d\lambda(t)$ pour $z \in \overline{\mathbf{D}}$ et $\mathcal{R}e\,z \geq 0$. Et puisque $\varphi(-z) = \varphi(z) + \pi z^3$, on a, pour $z \in \overline{\mathbf{D}}$ et $\mathcal{R}e\,z \leq 0$
$$\int \log|z-it|d\lambda(t) = \mathcal{R}e\,\varphi(-z) = \mathcal{R}e\,\varphi(z) + \pi\mathcal{R}e\,(z^3)$$
d'où le résultat annoncé. □

LEMME 3. — *Si X_k est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi λ, et si G est une fonction sur $\mathbf{R}$ de carré λ-intégrable, la variable aléatoire maximale*
$$m = \sup\left\{\left|\frac{1}{k}(G\circ X_1 + G\circ X_2 + \cdots + G\circ X_k)\right| : k \geq 1\right\}$$
est d'espérance majorée par $7\left[\int |G(t)|^2 d\lambda(t)\right]^{1/2}$.

Si on pose $Y_k = G\circ X_k - \int G(t)d\lambda(t)$, les Y_k sont des variables indépendantes centrées, de même loi, dont la variance
$$\mathbf{E}(|Y_k|^2) = \mathbf{E}(|G\circ X_k|^2) - \left|\int G(t)d\lambda(t)\right|^2$$
est majorée par $\mathbf{E}(|G\circ X_k|^2) = \int |G(t)|^2 d\lambda(t)$.

La suite $S_k = Y_1 + \frac{Y_2}{2} + \cdots + \frac{Y_k}{k}$ est donc une martingale bornée dans L^2 puisque
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|S_k|^2) &= \sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}\left(\left|\frac{Y_j}{j}\right|^2\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2}\right)\cdot \int |G(t)|^2 d\lambda(t) \\ &\leq \frac{\pi^2}{6}\int |G(t)|^2 d\lambda(t).\end{aligned}$$

L'inégalité de Burkholder donne donc :
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\sup|S_k|) &\leq \left[\mathbf{E}(\sup_k |S_k|^2)\right]^{1/2} \leq 2\sup_k \left[\mathbf{E}(|S_k|^2)\right]^{1/2} \\ &\leq \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\int |G(t)|^2 d\lambda\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Et puisque

$$S_k - \frac{S_1 + \cdots + S_{k-1}}{k} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_k}{k}$$

on obtient

$$\sup_k \left| \frac{Y_1 + \cdots + Y_k}{k} \right| \leq 2 \sup_k |S_k|.$$

Enfin

$$\frac{G \circ X_1 + \cdots + G \circ X_k}{k} = \int G(t) d\lambda(t) + \frac{Y_1 + \cdots + Y_k}{k}$$

d'où

$$\begin{aligned} m = \sup_k \left| \frac{G \circ X_1 + \cdots + G \circ X_k}{k} \right| &\leq \left| \int G(t) d\lambda(t) \right| + 2 \sup |S_k| \\ &\leq \left[\int |G(t)|^2 d\lambda(t) \right]^{1/2} + 2 \sup |S_k|. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathbf{E}(m) \leq \left[\int |G(t)|^2 d\lambda(t) \right]^{1/2} \left(1 + 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \leq 7 \left(\int |G(t)|^2 d\lambda(t) \right)^{1/2}.$$

□

LEMME 4. — *Soit Ω' un ouvert du carré $]-1,1[\times]-1,1[$. Il existe une suite (ψ_k) de fonctions holomorphes sur $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$ et une fonction continue g de $\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{D}}$ dans $\mathbf{R}$ telles que*

i) *$g(x,y) = 0$ si $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] \setminus \Omega'$.*

ii) *$g(x,y) < 0$ si $(x,y) \in \Omega'$.*

iii) *Tout point frontière de Ω' dans $[-1,1] \times [-1,1]$ est adhérent à l'ouvert $\{(z,w) : g(z,w) > 0\}$.*

iv) *$\forall \eta > 0$, il existe un $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que*

$$\forall k \geq k_0,\ \forall (z,w) \in \mathbf{D}^2 \quad \log\left(|\psi_k(z,w)|^{1/k}\right) \leq g(z,w) + \eta.$$

v) *Il existe une partie Z dense de $\mathbf{D}^2$ pour laquelle*

$$\forall (z,w) \in Z \quad \lim_{k \to \infty} |\psi_k(z,w)|^{1/k} = e^{g(z,w)}.$$

Il existe une famille de disques euclidiens D_j de centres (x_j, y_j) dans $R =]-1,1[\times]-1,1[$ et de rayons $r_j > 0$ dont la réunion est l'ouvert Ω'. Et on pose, pour $(z,w) \in \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{D}}$

$$p_j(z,w) = \frac{1}{9}\left[(z - x_j)^2 + (w - y_j)^2 - r_j^2\right]$$

et

$$g(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \varphi^* \circ p_j(z,w)$$

où φ^* est la fonction définie au lemme 2.

On vérifie sans peine que, pour $(z,w) \in \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{D}}$,

$$|p_j(z,w)| = \frac{1}{9}\left|z^2 + w^2 - 2z \cdot x_j - 2 \cdot w \cdot y_j + (x_j^2 + y_j^2 - r_j^2)\right| \leq \frac{8}{9}$$

et que g est continue sur $\overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{D}}$.

Si $(x,y) \in R$, les $p_j(x,y)$ sont tous réels, et $\varphi^* \circ p_j(x,y)$ est 0 si $p_j(x,y) \geq 0$, c'est-à-dire si (x,y) n'est pas dans le disque D_j et $\varphi^* \circ p_j(x,y)$ est < 0 si $p_j(x,y) < 0$, c'est-à-dire si (x,y) est intérieur au disque D_j. Il en résulte que, sur R, g vaut 0 hors de Ω' et est < 0 sur Ω'. Donc les conditions i) et ii) sont vérifiées.

Puisque φ^* est sous-harmonique et que les (p_j) sont holomorphes, la fonction g est plurisousharmonique. Si (x_0, y_0) est un point frontière de Ω' dans R, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, δ_1 et δ_2 avec $|\delta_1| < \varepsilon$ et $\delta_2 < \varepsilon$ tels que $(x_0 + \delta_1, y_0 + \delta_2) \in \Omega'$. Alors

$$0 = g(x_0, y_0) \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot g\big(x_0 + \delta_1 e^{i\theta_1}, y_0 + \delta_2 e^{i\theta_2}\big)$$

et puisque $g\big(x_0 + \delta_1 e^{i\theta_1}, y_0 + \delta_2 e^{i\theta_1}\big) < 0$ pour (θ_1, θ_2) voisin de $(0,0)$ la fonction g prend des valeurs > 0 en certains points (z,w) vérifiant $|z - x_0| < \varepsilon$ et $|w - y_0| < \varepsilon$. Donc (x_0, y_0) est adhérent à $\{(z,w) | g(z,w) > 0\}$, ce qui prouve iii).

Si (t_k) est une suite de points de $[-1,1]$, on définit

$$\lambda_k = \frac{1}{k}\big(\varepsilon_{t_1} + \cdots + \varepsilon_{t_k}\big)$$

qui est une mesure de probabilité sur $[-1,1]$, et

$$\psi_k(z,w) = \prod_{\ell \cdot 2^j \leq k} (p_j(z,w) - it_\ell) e^{-\varphi \circ p_j(z,w)}$$

qui est une fonction holomorphe sur $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$.

On choisit un ensemble dénombrable dense Z dans $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$. On munit $[-1,1]^{\mathbf{N}}$ de la probabilité P pour laquelle les coordonnées sont indépendantes et de même loi λ. On va montrer que, P-presque sûrement, la suite (ψ_k) satisfait les conditions cherchées.

D'abord, comme dans le lemme 1, en vertu de la loi des grands nombres, on a presque sûrement, pour tout entier n

$$\int t^n d\lambda_k(t) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} t_j^n \to \int t^n d\lambda(t)$$

c'est-à-dire que la suite (λ_k) converge vaguement vers λ.

Si (λ_k) converge vaguement vers λ, l'ensemble

$$K = \{\theta\cdot\lambda : 0 \le \theta \le 1\} \cup \{\theta\cdot\lambda_k : 0 \le \theta \le 1 \text{ et } k \in \mathbf{N}\}$$

est un compact vague de mesures positives. Et si on note F_s la fonction continue définie sur $K^{\mathbf{N}} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ par

$$F_s((\nu_j), z, w) = \sum_0^\infty 2^{-j}\Big[\int \log\big(\frac{1}{s} + |p_j(z,w) - it|\big) - \mathcal{R}e\,\varphi\circ p_j(z,w)\Big]d\nu_j(t)$$

le compact de $K^{\mathbf{N}} \times \overline{\mathbf{D}} \times \overline{\mathbf{D}}$ défini, pour $\eta > 0$, par

$$T = \big\{((\nu_j), z, w) : \forall s \in \mathbf{N} \quad F_s((\nu_j), z, w) \ge g(z,w) + \eta\big\}$$

ne contient aucun point de $\{\underline{\lambda}\} \times \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ puisque

$$\lim_{s\to\infty} F_s(\underline{\lambda}, z, w) = g(z,w),$$

si on note $\underline{\lambda}$ la suite constante $(\lambda, \lambda, \ldots)$.

La projection sur $K^{\mathbf{N}}$ de T_η est donc un compact disjoint de $\{\underline{\lambda}\}$. Il existe donc un voisinage V_η de $\underline{\lambda}$ tel que $\forall (z,w) \in \mathbf{D} \times \mathbf{D}$, $\forall (\nu_j) \in V_\eta$,

$$g(z,w) + \eta > \sum_0^\infty 2^{-j}\Big[\int (\log|p_j(z,w) - it| - \mathcal{R}e\,\varphi\circ p_j(z,w))d\nu_j(t)\Big].$$

Si on pose

$$\nu_{j,k} = \Big(\sum_{2^j\cdot r \le k} \varepsilon_{t_r}\Big)\cdot\frac{2^j}{k} \in K$$

on a

$$\lim_{k\to\infty} \nu_{j,k} = \lambda \text{ pour tout } j$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} (\nu_{j,k})_j = \underline{\lambda}$$

et il existe k_0 tel que $k \ge k_0 \Rightarrow (\nu_{j,k})_j \in V_\eta$, ce qui achève de prouver la condition iv), pourvu que λ_k tende vers λ, si on remarque que

$$\log|\psi_k(z,w)|^{1/k} = \sum_0^\infty 2^{-j}\Big[\int (\log|p_j(z,w) - it| - \mathcal{R}e\,\varphi\circ p_j(z,w)d\nu_{j,k}(t)\Big].$$

Soit enfin $(z,w) \in Z$. Si on note

$$G_j(t) = \log|p_j(z,w) - it| - \mathcal{R}e\,\varphi \circ p_j(z,w),$$

on vérifie sans peine qu'il existe, puisque φ est bornée, une constante γ indépendante de $j \in \mathbf{N}$ telle que

$$|G_j(t)| \leq \gamma - \log|t-\beta| \quad \text{où } \beta = \mathcal{I}(p_j(z,w))$$

donc que

$$\int G_j^2(t)d\lambda(t) \leq \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} t^2(\gamma^2 - 2\gamma\log|t-\beta| + \log^2|t-\beta|)dt$$

est majoré par une constante $\gamma_0 < +\infty$, indépendante de $j \in \mathbf{N}$.

Il résulte de la loi des grands nombres que, $P-$presque sûrement,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} G_j(t_r) = \lim_{k\to\infty}\int G_j(t)d\lambda_k(t) = \int G_j(t)d\lambda(t) = \varphi^* \circ p_j(z,w).$$

Il résulte aussi du lemme 3 que l'espérance de

$$m_j = \sup_k \left|\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} G_j(t_r)\right|$$

est majorée par $7\cdot\left(\int G_j^2(t)d\lambda(t)\right)^{1/2} = 7\cdot\sqrt{\gamma_0}$. Donc

$$\mathbf{E}\Big(\sum_0^\infty 2^{-j}m_j\Big) = \sum_0^\infty 2^{-j}\mathbf{E}(m_j) \leq \sum_0^\infty 2^{-j}\cdot 7\cdot\sqrt{\gamma_0} \leq 14\sqrt{\gamma_0} < +\infty.$$

Donc, presque sûrement $\sum_0^\infty 2^{-j}m_j < +\infty$. On peut donc trouver une suite (t_k) telle que, simultanément

- λ_k tende vaguement vers λ
- $\int G_j(t)d\lambda_k(t) \to \varphi^* \circ p_j(z,w)$ pour tout $(z,w) \in Z$
- $\sum_0^\infty 2^{-j}m_j < +\infty$ pour tout $(z,w) \in Z$.

Alors, pour $(z,w) \in Z$

$$\log|\psi_k(z,w)|^{1/k} - g(z,w) = \sum_0^\infty 2^{-j}\Big[\frac{2^j}{k}\sum_{r\leq\frac{k}{2^j}} G_j(t_r) - \varphi^* \circ p_j(z,w)\Big].$$

Pour tout k, tout j, on a :

$$\Big|\frac{2^j}{k}\sum_{r\le\frac{k}{2^j}} G_j(t_r)\Big| = \Big|\frac{\ell}{k/2^j}\cdot\Big(\frac{1}{\ell}\sum_{r=1}^{\ell} G_j(t_r)\Big)\Big|$$

$$\le m_j \qquad \text{si } \ell \text{ est la partie entière } [\tfrac{k}{2^j}] \text{ de } \frac{k}{2^j}.$$

Donc, puisque $|\varphi^* \circ p_j(z,w)| \le \pi$

$$\Big|\frac{2^j}{k}\sum_{r\le\frac{k}{2^j}} G_j(t_r) - \varphi^*\circ p_j(z,w)\Big| \le \pi + m_j.$$

Et puisque $\sum_0^\infty 2^{-j}(\pi+m_j) = 2\pi + \sum_0^\infty 2^{-j}m_j < +\infty$, il existe, pour $\varepsilon > 0$ donné, un N tel que $\sum_{N+1}^\infty 2^{-j}(\pi+m_j) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Il existe alors k_0 tel que

$$\forall \ell \ge k_0,\quad \forall j \le N \quad \Big|\frac{1}{\ell}\sum_{r=1}^{\ell} G_j(t_r) - \varphi^*\circ p_j(z,w)\Big| < \frac{\varepsilon}{6}$$

et que

$$\forall j \le N \quad \frac{m_j}{k_0} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Alors, si $k \ge k_0 \cdot 2^N$, on a, pour $j \le N$

$$\ell = [k\cdot 2^{-j}] \ge [k\cdot 2^{-N}] \ge k_0,$$

d'où

$$\Big|\frac{1}{\ell}\sum_{r=1}^{\ell} G_j(t_r) - \varphi^*\circ p_j(z,w)\Big| < \frac{\varepsilon}{6}$$

et

$$\Big|\frac{2^j}{k}\cdot\sum_{r=1}^{\ell} G_j(t_r) - \frac{1}{\ell}\sum_{r=1}^{\ell} G_j(t_r)\Big| \le \frac{1}{\ell}\cdot\Big|\sum_{1}^{\ell} G_j(t_r)\Big|\cdot\Big|\frac{2^j\cdot\ell - k}{k}\Big|$$

$$\le m_j\frac{2^j}{k} \le \frac{m_j\cdot 2^j}{k_0\cdot 2^N} \le \frac{m_j}{k_0} \le \frac{\varepsilon}{6}$$

donc

$$\Big|\frac{2^j}{k}\cdot\sum_{r=1}^{\ell} G_j(t_r) - \varphi^*\circ p_j(z,w)\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pour } 0 \le j \le N$$

et
$$\sum_{j=0}^{N} 2^{-j} \Big| \frac{2^j}{k} \cdot \sum_{r=1}^{\ell} G_j(t_r) - \varphi^* \circ p_j(z,w) \Big| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \sum_{0}^{N} 2^{-j} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

c'est-à-dire, que pour $k \geq k_0 \cdot 2^N$
$$\begin{aligned} |\log |\psi_k(z,w)|^{1/k} - g(z,w)| &\leq \sum_{j=0}^{N} 2^{-j} \Big| \frac{2^j}{k} \sum_{1}^{\ell} G_j(t_r) - \varphi^* \circ p_j(z,w) \Big| \\ &\quad + \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-j} (\pi + m_j) \\ &< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$
Donc, pour tout $(z,w) \in Z$, $g(z,w) = \lim_{k \to \infty} (\log |\psi_k(z,w)|^{1/k})$.

Ceci montre que la condition v) est réalisée. □

En associant à tout élément A de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ des parties de $\mathbf{N}$ sa fonction caractéristique, on identifie $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ à $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$, et on le munit de la topologie produit, pour laquelle $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ est compact et métrisable.

LEMME 5. — *Soient ω et ω_1 deux ouverts de $\mathbf{C}^2$, avec $\omega \subset \omega_1$, et (z_0, w_0) un point de ω_1 adhérent à ω. On suppose que (g_k) est une suite de fonctions holomorphes sur ω_1, vérifiant*
$$\sum_{k \in \mathbf{N}} |g_k(z,w)| < +\infty \quad \textit{pour tout } (z,w) \in \omega.$$
Alors, ou bien la série (g_k) est normalement convergente au voisinage de (z_0, w_0), ou bien il existe une partie maigre M de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ telle que, si $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus M$, la série $\sum_{k \in A} g_k$, qui converge sur ω, ne se prolonge pas en une fonction holomorphe au voisinage de (z_0, w_0).

Soit R_n l'ensemble des $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ pour lesquels la série $\sum_{k \in A} g_k$ se prolonge en une fonction holomorphe bornée par n sur le polydisque $\mathbf{D}(z_0, \frac{1}{n}) \times \mathbf{D}(w_0, \frac{1}{n}) = B_n$. Si T_n est l'ensemble des fonctions holomorphes bornées par n sur le polydisque B_n, qui est compact d'après le théorème de Montel, l'ensemble
$$\Big\{ (A,h) \in \mathcal{P}(\mathbf{N}) \times T_n : \forall (z,w) \in \omega \cap B_n \quad h(z,w) = \sum_{k \in A} g_k(z,w) \Big\}$$
est fermé, donc compact, et sa projection R_n est compacte dans $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

Si tous les R_n sont rares, $M = \bigcup_n R_n$ satisfait la conclusion. Et si R_{n_0} est d'intérieur non vide dans $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, il existe un entier k_0 et une partie A_0 de $[0, k_0]$ tels que

$$A \cap [0, k_0] = A_0 \Rightarrow A \in R_{n_0}.$$

On en déduit aisément que, quitte à augmenter n_0, on peut supposer $R_{n_0} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ et $B_{n_0} \subset \omega_1$.

Alors, pour toute partie finie A de $\mathbf{N}$, et tout (z, w) de B_{n_0}, le prolongement à B_{n_0} de $\sum_{k \in A} g_k$ est égal à $\sum_{k \in A} g_k$; donc on a pour toute partie finie A $|\sum_{k \in A} g_k(z, w)| \leq n_0$.

On en déduit que $\sum_{k \in \mathbf{N}} |g_k(z, w)| \leq 4n_0$.

Alors, si $\delta < \dfrac{1}{n_0}$, et

$$\gamma_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot \left|g_k\left(z_0 + \delta e^{i\theta_1}, w_0 + \delta e^{i\theta_2}\right)\right|$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbf{N}} \gamma_k &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot \sum \left|g_k\left(z_0 + \delta e^{i\theta_1}, w_0 + \delta e^{i\theta_2}\right)\right| \\ &\leq 4n_0 < +\infty\end{aligned}$$

et pour $|z - z_0| \leq \dfrac{\delta}{2}$ et $|w - w_0| \leq \dfrac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned}|g_k(z, w)| &= \left|\frac{\delta^2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta_2 \cdot \frac{g_k\left(z_0 + \delta e^{i\theta_1}, w_0 + \delta e^{i\theta_2}\right) e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}}{\left(z_0 + \delta e^{i\theta_1} - z\right)\left(w_0 + \delta e^{i\theta_2} - w\right)}\right| \\ &\leq \delta^2 \cdot \gamma_k \frac{1}{\frac{\delta}{2} \cdot \frac{\delta}{2}} = 4\gamma_k\end{aligned}$$

d'où la convergence normale de la série (g_k) au voisinage de (z_0, w_0). □

THÉORÈME 6. — *Si Ω est un ouvert de $]-1,1[\times]-1,1[= R$, si F est un fermé de Ω dont les projections sont recouvertes par une suite de compacts de capacité nulle, il existe une fonction séparément analytique sur Ω dont l'ensemble singulier est F.*

Soit $\Omega' = \Omega \backslash F$. Puisque Ω' est ouvert, il existe une fonction g et une suite (ψ_k) de fonctions holomorphes vérifiant les conditions du lemme 4.

Si F_1 et F_2 sont les projections de F, F_1 et F_2 sont maigres, puisque un intervalle de $\mathbf{R}$ n'est pas de capacité nulle. Il en résulte que F est rare dans Ω, donc que tout point de F est un point frontière de Ω'.

Il existe, d'après le lemme 1, deux suites (a_k) et (b_k) de fonctions holomorphes bornées par 1 sur le disque $\mathbf{D}$ telles que

– si $x \in F_1$ $\quad \lim\limits_{k\to\infty} |a_k(x)|^{1/k} = 0$

– si $y \in F_2$ $\quad \lim\limits_{k\to\infty} |b_k(y)|^{1/k} = 0$

– si $z \in \mathbf{D}\backslash\mathbf{R}$ $\quad \lim\limits_{k\to\infty} |a_k(z)|^{1/k} = \lim\limits_{k\to\infty} |b_k(z)|^{1/k} = 1.$

Soit $\omega = \{(z,w) \in \mathbf{D}\times\mathbf{D} : g(z,w) < 1\}$.

Si on pose $g_k(z,w) = a_k(z)\cdot b_k(w)\cdot \psi_k(z,w)$, on a

$$|g_k(z,w)|^{1/k} \le |\psi_k(z,w)|^{1/k}.$$

Alors, par la propriété iv), on a, au voisinage de tout $(z_0,w_0) \in \omega$,

$$|\psi_k(z,w)|^{1/k} \le \gamma < 1 \quad \text{pour } k \ge k_0$$

d'où

$$|g_k(z,w)| \le \gamma^k$$

et la série (g_k) converge normalement sur tout compact de ω.

Si $x \in F_1$, on a

$$|g_k(x,w)|^{1/k} \le |a_k(x)|^{1/k}\cdot|\psi_k(x,w)|^{1/k}$$

et puisque g est bornée, il résulte de iv) que

$$\sup_{k\in\mathbf{N},(z,w)\in\overline{\mathbf{D}}\times\overline{\mathbf{D}}} |\psi_k(z,w)|^{1/k} < +\infty$$

donc, pour k assez grand, on aura

$$\forall w \in \mathbf{D} \quad |g_k(x,w)|^{1/k} \le \gamma < 1$$

puisque $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k(x)|^{1/k} = 0$.

Donc la série $g_k(x,.)$ converge normalement sur $\mathbf{D}$. Et de même, si $y \in F_2$, la série $g_k(.,y)$ converge normalement sur $\mathbf{D}$.

On va maintenant choisir un $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ pour que tout point de F soit dans l'ensemble singulier de

$$f(z,w) = \sum_{k\in A} g_k(z,w).$$

Si $(x_0, y_0) \in F$, (x_0, y_0) est point frontière de Ω', donc adhérent à l'ouvert $\{(z, w) : g(z, w) > 0\}$. Il existe donc dans tout voisinage de (x_0, y_0) un point (z', w') de Z tel que $g(z', w') > 0$, $z' \notin \mathbf{R}$ et $w' \notin \mathbf{R}$.

Alors

$$\lim_{k \to \infty} |g_k(z', w')|^{1/k} = 1 \times 1 \times e^{g(z', w')} > 1$$

d'où

$$\lim_{k \to \infty} |g_k(z', w')| = +\infty.$$

La série (g_k) n'est donc pas normalement convergente au voisinage du point (z_0, w_0) de $\overline{\omega}$.

Il existe donc, d'après le lemme 5, un ensemble maigre M de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ tel que $\sum_{k \in A} g_k$ ne se prolonge pas en une fonction holomorphe au voisinage de (z_0, w_0) si $A \notin M$.

Si on choisit une suite dense (z_j, w_j) dans F, il correspond une suite (M_j) d'ensembles maigres de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$. Et si A est choisi hors de l'ensemble maigre $\bigcup_j M_j$, la série $\sum_{k \in A} g_k$ ne se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage d'aucun point de F.

Cette fonction $f(z, w) = \sum_{k \in A} g_k(z, w)$ est donc définie par une série normalement convergente sur tout compact de ω, et f est donc holomorphe sur ω.

Cette série converge aussi uniformément sur $\{x\} \times \mathbf{D}$ si $x \in F_1$ et sur $\mathbf{D} \times \{y\}$ si $y \in F_2$. Et puisque $\Omega \subset \omega \cup (F_1 \times \mathbf{D}) \cup (\mathbf{D} \times F_2)$, la série converge en tout point de Ω.

Si $x \in F_1$, $f(x, .)$ est holomorphe sur $\mathbf{D}$. Et si $x \notin F_1$ $\{y : (x, y) \in \Omega\} \subset \{y : (x, y) \in \omega\}$. Donc f est, pour tout x, analytique en y, et de même, pour tout y, analytique en x. La fonction f est analytique en tout point de $\Omega' \subset \omega$, et ne se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage d'aucun point de F, donc n'est analytique en aucun point de F. Ceci montre que F est l'ensemble singulier de f. □

THÉORÈME 7. — *Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et F un fermé de Ω dont les projections sont de capacité nulle, il existe une fonction séparément analytique f sur Ω dont l'ensemble singulier est égal à F.*

La fonction Ψ de $\mathbf{R}^2$ dans $]-1,1[\times]-1,1[$ définie par

$$\Psi(x,y) = (\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x, \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} y)$$

est un homéomorphisme. Donc $\widetilde{\Omega} = \Psi(\Omega)$ est un ouvert de $]-1,1[^2$ et $\widetilde{F} = \Psi(F)$ un fermé de $\widetilde{\Omega}$, dont les projections $\widetilde{F_1}$ et $\widetilde{F_2}$ sont les images des projections F_1 et F_2 de F par la fonction $x \mapsto \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$, qui est lipschitzienne. Donc les capacités de $\widetilde{F_1}$ et de $\widetilde{F_2}$ sont nulles. Il existe donc, d'après le théorème 6, une fonction séparément analytique $\tilde{f}$ sur $\widetilde{\Omega}$ dont l'ensemble singulier est $\widetilde{F}$. Et, clairement, la fonction $f = \tilde{f} \circ \Psi$ a les propriétés cherchées.

BIBLIOGRAPHIE

[B] M. BRELOT, Eléments de la théorie classique du potentiel, C.D.U., Paris, 1969.

[C] H. CARTAN, Théorie du potentiel newtonien. Energie, Capacité. Suites de potentiels, Bull. Soc. Math. France, (1945), 74–106.

[H] M. HERVÉ, Analytic and plurisubharmonic functions, Lecture Notes in Math., 198 (1971), Springer-Verlag.

[S1] J. SICIAK, Analyticity and separate analyticity of functions defined on lower dimensional subsets of $\mathbf{C}^n$, Zeszyty Naukowe U.J., 13 (1969), 53–70.

[S2] J. SICIAK, Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbf{C}^n$, Annales Pol. Math., 22 (1969), 145–171.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1988,
révisé le 18 mai 1989.

Jean SAINT RAYMOND,
Equipe d'analyse
U.A. n° 754 au C.N.R.S.
Université Paris VI
Tour 46 – 4ème étage
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05.