ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ABDELHAK AZHARI

Sur la conjecture de Chudnovsky-Demailly et les singularités des hypersurfaces algébriques

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 1 (1990), p. 103-116

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_1_103_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 1 (1990), 103-116

SUR LA CONJECTURE DE CHUDNOVSKY-DEMAILLY ET LES SINGULARITES DES HYPERSURFACES ALGEBRIQUES

par Abdelhak AZHARI

1. Introduction.

Le travail de E. Bombieri [1] sur la transcendance des valeurs des fonctions méromorphes, a ouvert la voie à l'étude des degrés d'hypersurfaces algébriques à singularités données. En liaison avec cette question, M. Waldschmidt a introduit un invariant algébrique $\omega_t(S)$ défini comme suit :

DÉFINITION 1. — *Soit S un ensemble fini non vide de $\mathbf{C}^n$. Pour tout entier positif t , on définit $\omega_t(S)$ comme étant le plus petit des degrés des hypersurfaces algébriques ayant en chaque point de S une singularité d'ordre $\geq t$, c'est-à-dire :*

$$\omega_t(S) = \min\{\deg P\ ,\ P \in \mathbf{C}[z_1,\dots,z_n]\ ,\ P \not\equiv 0\ ,\ D^\tau P(\sigma) = 0 \text{ pour tout } \sigma \in S \text{ et } \tau \in \mathbf{N}^n\ ,\ |\tau| < t\}\ .$$

En utilisant la théorie des estimations L^2 de Hörmander et des théorèmes d'existence pour l'opérateur $\overline{\partial}$, dus à E. Bombieri [1] et H. Skoda [6], M. Waldschmidt [7] obtient l'estimation :

$$(*) \qquad \frac{\omega_{t_1}(S)}{t_1+n-1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}\ .$$

Mots-clés : Croisements normaux - Degré d'hypersurface - Estimations L^2 - Holomorphe - Plurisousharmonique - Singularités - Transversalité.
Classification A.M.S. : 32J25.

Cette estimation est fine asymptotiquement quand $t_1, t_2 \to +\infty$, mais non optimale pour des valeurs fixées de t_1 . G.V. Chudnovsky [2] conjecture l'inégalité :

$$(**) \qquad \frac{\omega_1(S)+n-1}{n} \leq \frac{\omega_t(S)}{t} ,$$

qu'il prouve dans le cas $n = 2$, en utilisant la théorie de l'intersection.

J.–P. Demailly [3] aboutit au même résultat $(**)$ dans le cas $n = 2$ par des méthodes analytiques (utilisant des formules de Jensen en plusieurs variables), et pour $n > 2$ dans le cas où S contient un polytope complet à

$$\binom{\omega_1(S)+n-1}{n}$$

sommets. Dans ce même article [3] est formulée la conjecture plus générale :

$$\frac{\omega_{t_1}(S)+n-1}{t_1+n-1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2} .$$

H. Esnault et E. Viehweg [5] prouvent par des méthodes de géométrie projective complexe l'inégalité :

$$\frac{\omega_{t_1}(S)+1}{t_1+n-1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2} \quad \text{pour } n \geq 2 .$$

Dans cet article, nous nous proposons d'améliorer l'estimation $(*)$, en utilisant les estimations L^2 et les théorèmes d'existence pour l'opérateur $\overline{\partial}$ sur un fibré vectoriel holomorphe semi–positif, dus à J.–P. Demailly [4].

Comme nous allons le voir, cette méthode permet d'apporter des contributions substantielles en direction de la conjecture de Chudnovsky–Demailly.

Je tiens à remercier Monsieur Jean–Pierre Demailly pour ses suggestions et ses remarques qui ont contribué à améliorer la rédaction de ce travail.

2. Enoncé des théorèmes principaux.

Dans ce travail, nous allons nous placer dans $\mathbf{P}^n$ plutôt que $\mathbf{C}^n$ car la démonstration fera intervenir le choix d'un hyperplan à l'infini générique.

Nous utilisons les notations suivantes :

Notation. — Soit P un polynôme homogène de $\mathbf{C}[\zeta_0, \ldots, \zeta_n]$.

1) On désigne par $\widehat{P}$ le polynôme non homogène associé à P, défini par :

$$P(\zeta_0,\ldots,\zeta_n)=\zeta_0^{\deg P}\widehat{P}\Big(\frac{\zeta_1}{\zeta_0},\ldots,\frac{\zeta_n}{\zeta_0}\Big) \text{ sur l'ouvert } V_0=\{[\zeta]\in\mathbf{P}^n\ :\zeta_0\neq 0\}.$$

On a donc $\widehat{P}(z_1,\ldots,z_n)=P(1,z_1,\ldots,z_n)$.

2) Soit S une partie finie non vide de $\mathbf{P}^n$ et t un élément de $\mathbf{N}^*$. On pose

$$\omega_t(S)=\min\{\deg P\ ,\ P\in\mathbf{C}[\zeta_0,\ldots,\zeta_n]\ ,\ P\not\equiv 0\ ,\ D^\tau P(\sigma)=0 \\ \text{pour tout } \sigma\in S \text{ et } \tau\in\mathbf{N}^{n+1}\ ,\ |\tau|<t\}\ .$$

3) On désigne par Λ_t l'ensemble des polynômes qui réalisent la condition 2), c'est-à-dire

$$\Lambda_t=\{P\in\mathbf{C}[\zeta_0,\ldots,\zeta_n],\ P\not\equiv 0,\ D^\tau P(\sigma)=0 \text{ pour tout } \sigma\in S \text{ et } \tau\in\mathbf{N}^{n+1}, \\ |\tau|<t \text{ et } \deg P=\omega_t(s)\}.$$

On note par ailleurs

$$a_t=\min\{\dim\Sigma_P|P\in\Lambda_t\}$$

où Σ_P est l'ensemble des points singuliers non à croisements normaux du diviseur de P, c'est-à-dire si $P=P_1^{k_1}P_2^{k_2}\ldots P_N^{k_N}$ la décomposition de P en polynômes irréductibles P_i, Σ_P est l'ensemble des points de $P^{-1}(0)$ en lesquels $dP_{i_1},\ldots,dP_{i_k}$ ne sont pas linéairement indépendantes, où $P_{i_1},\ldots,P_{i_k}$ sont les facteurs qui s'annulent au point considéré.

THÉORÈME 1. — *Soient S une partie finie non vide de $\mathbf{P}^n$, t_1 et t_2 des éléments de $\mathbf{N}^*$. Alors :*

$$\frac{\omega_{t_1}(S)+n-a_{t_2}-1}{t_1+n-1}\leq\frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}.$$

Remarque. — Comme $a_{t_2}\leq n-2$, on a que $(n-a_{t_2}-1)\geq 1$ et ainsi le théorème 1 redonne le résultat de H. Esnault et E. Viehweg [5], par une méthode analytique sans doute plus élémentaire.

DÉFINITION 2. — *Soit S une partie finie non vide de $\mathbf{P}^n$ et soit $(t,D)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$. On considère l'espace vectoriel de dimension finie :*

$$E_S(D,t)=\{P\in\mathbf{C}[z_0,\ldots,z_n];\deg P\leq D \text{ et } P \text{ s'annule à l'ordre} \geq t \text{ sur } S\}.$$

Soit $V_S(D,t)$ la variété des zéros communs des polynômes de $E_S(D,t)$ (celle-ci contient la partie S). Pour tout entier $a=0,1,\ldots,n-1$, on définit un invariant algébrique :

$$\omega_t^a(S)=\min\{D\in\mathbf{N}^*:\dim_{\mathbf{C}}V_S(D,t)\leq a\}\ .$$

De cette définition, on déduit aisément les propriétés suivantes :

i) $\omega_t^{n-1}(S) = \omega_t(S)$;

ii) $D \mapsto V_S(D,t)$ est décroissante;

iii) $t \mapsto V_S(D,t)$ est croissante;

iv) $V_S(D,t) = S$ pour $D \geq D_0 = D_0(S,t)$ assez grand;

v) $V_S(D_1 + D_2, t_1 + t_2) \subseteq V_S(D_1, t_1) \cup V_S(D_2, t_2)$;

vi) $\omega_{t_1+t_2}^a(S) \leq \omega_{t_1}^a(S) + \omega_{t_2}^a(S)$.

Démonstration. — i) Pour tout polynôme P non nul s'annulant à l'ordre au moins t sur S , on a $\dim_{\mathbf{C}} Z_P = n-1$, ce qui permet d'affirmer que :

$$\omega_t^{n-1}(S) = \omega_t(S) .$$

ii), iii) et v) sont évidentes, vi) se déduit de v).

iv) Tout ensemble fini S étant algébrique, on peut écrire $S = Z(Q_1, \ldots, Q_p)$ où les polynômes $Q_j \in \mathbf{C}[\zeta_0, \ldots, \zeta_n]$. Soit $x \notin S$. Les polynômes $Q_1^t, \ldots, Q_p^t$ s'annulant à l'ordre $\geq t$ sur S et il existe un indice i tel que $Q_i^t(x) \neq 0$. Si $D \geq D_0 = \max\limits_{1 \leq j \leq p} (\deg Q_j^t)$, il existe un polynôme $P = A_i Q_i^t$ homogène de degré D tel que $P(x) \neq 0$, donc $x \notin V_S(D,t)$. Par conséquent $V_S(D,t) = S$ (de dimension zéro) si $D \geq D_0$.

THÉORÈME 2. — *Soient S une partie finie non vide de $\mathbf{P}^n$, t_1, t_2 deux éléments quelconques de $\mathbf{N}^*$ et a appartenant à $\mathbf{N}$. Alors :*

$$\frac{\omega_{t_1}^a(S) + n - a - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}^a(S)}{t_2} .$$

Tous ces résultats seront démontrés ici à l'aide d'un théorème d'existence de fonctions holomorphes que nous rappelons ci-dessous.

3. Théorème d'existence de Demailly.

Dans ce paragraphe, on énonce une version faible (cas des fibrés triviaux) d'un théorème d'existence de Demailly [4] sur les fibrés vectoriels holomorphes, qui contient un résultat dû à Hörmander–Bombieri et Skoda [6] .

PROPOSITION 1. — *Soient* φ *une fonction plurisousharmonique dans* $\mathbf{C}^n$ *et* $Y = \{z \in \mathbf{C}^n \ ; \ G_1(z) = G_2(z) = \cdots = G_k(z) = 0\}$ *un ensemble analytique de dimension complexe p* (G_i *est une fonction analytique pour* $1 \leq i \leq k$) *et soit* $G = (G_1, \ldots, G_k)$. *Soit* $U = \{z \in \mathbf{C}^n \ : \ |G(z)| < 1\}$ *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$ *et f une fonction holomorphe sur U telle que :*

$$\int_U |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty \ .$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction F holomorphe sur* $\mathbf{C}^n$ *qui coïncide avec f sur l'ensemble analytique Y et telle que :*

$$\int_{\mathbf{C}^n} \frac{|F(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1+|G(z)|^2)^{n-p+\varepsilon}} d\lambda(z) \leq C(p,\varepsilon) \int_U |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z)$$

où $C(p,\varepsilon) = \sup(1, \frac{1}{2^p - 1}) + \frac{(p+1)^2}{\varepsilon}$.

Esquisse de la démonstration. — On cherche un prolongement F de f sous la forme

$$F = \lambda(|G(z)|^2) f - u$$

où $G = (G_1, \ldots, G_k)$ et λ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans l'intervalle $]-\infty \ ; \ 1[$ telle que : $\lambda = 1$ au voisinage de 0 et $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ avec $u = 0$ sur l'ensemble $Y = G^{-1}(0)$.

L'holomorphie de F équivaut à la condition $\overline{\partial} F = 0$, c'est-à-dire à

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = v & (\underline{*}) \\ v = \overline{\partial}(\lambda(|G(z)|^2) f) \ . \end{cases}$$

On résoud l'équation ($\underline{*}$) à l'aide des estimations L^2 de Hörmander, en utilisant le poids $\varphi(z) + 2(n-p)\log|G(z)|$. Il en résulte une solution u telle que $|u(z)|^2 |G(z)|^{-2(n-p)}$ soit localement sommable sur $\mathbf{C}^n$.

Comme toute solution u de l'équation ($\underline{*}$) est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et comme $|G(z)| \leq C d(z, Y)$ au voisinage de tout point, cette condition de sommabilité locale assure l'annulation de u sur Y .

Remarque. — Cette proposition contient le résultat de Hörmander–Bombieri–Skoda, c'est le cas où $Y = \{z_1 - z_1^0 = \cdots = z_n - z_n^0 = 0\} = \{z_0\}$ et $f = 1$:

COROLLAIRE 1. — *Soit* φ *une fonction plurisousharmonique dans un ouvert pseudo-convexe* Ω *de* $\mathbf{C}^n$ *telle que* $e^{-\varphi}$ *soit sommable au* *voisinage de* $z_0 \in \Omega$ *. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *, il existe une fonction holomorphe* F *sur* Ω *telle que* $F(z_0) = 1$ *et*

$$\int_\Omega \frac{|F(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1+|z|^2)^{n+\varepsilon}} d\lambda(z) < +\infty .$$

4. Démonstration du théorème 1.

Soit P un élément de Λ_{t_2} tel que $\dim_{\mathbf{C}} \Sigma_P = a_{t_2} = a$. Par un argument classique de dimension, il existe une sous-variété linéaire Y de $\mathbf{P}^n$ de dimension complexe $(n-a-1)$ qui vérifie

$$Y \cap \Sigma_P = \emptyset.$$

De même, on peut prendre un hyperplan à l'infini H_∞ générique tel que $H_\infty \cap S = \emptyset$.

On choisit dans la carte affine $\mathbf{P}^n \backslash H_\infty \simeq \mathbf{C}^n$, des coordonnées affines $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ telles que l'équation de la sous–variété $Y \cap \mathbf{C}^n$ s'écrive :

$$Y \cap \mathbf{C}^n = \{z \in \mathbf{C}^n \ ; \ z_1 = z_2 = \cdots = z_{a+1} = 0\} .$$

Dans la suite, on applique la proposition 1 sur l'ouvert de $\mathbf{C}^n$

$$U_\rho = \{z \in \mathbf{C}^n \ : \ |\tilde{z}| < \rho\}$$

où $\tilde{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{a+1})$ et $\rho \in \mathbf{R}^{+*}$.

Soit la fonction plurisousharmonique φ définie dans $\mathbf{C}^n$ par :

$$\varphi(z) = 2\theta \log|\widehat{P}(z_1, \dots, z_n)| + \beta \log(1+|z|^2)$$

où θ est un réel strictement supérieur à $\alpha = \dfrac{t_1+n-1}{t_2}$ et $\beta \in \mathbf{R}^+$. On construit tout d'abord une fonction f holomorphe dans l'ouvert U_ρ et telle que :

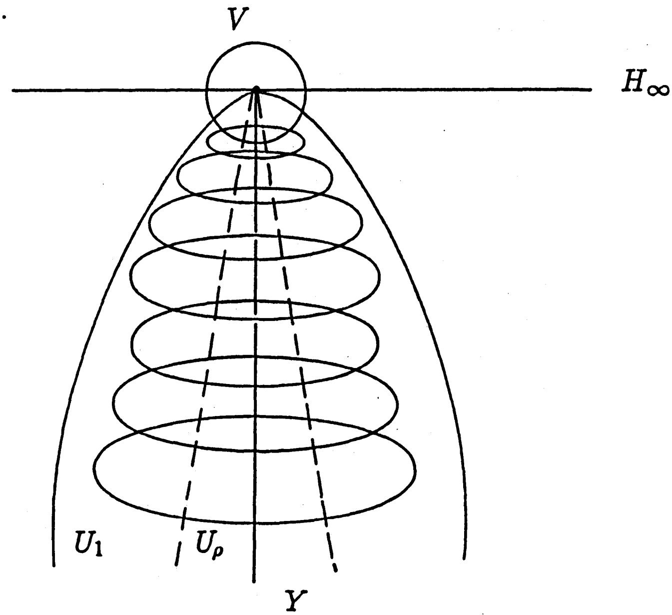
$$(+) \qquad \int_{U_\rho} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}^n$.

Dans ce but, on considère la fonction f holomorphe dans U_ρ définie par :

$$f(z) = \prod_{j=1}^{N} |P_j(1, z_1, z_2, \dots, z_n)|^{[\theta k_j]}$$

Pour démontrer la convergence de l'intégrale (+) sur un certain voisinage cylindrique U_ρ de Y , il suffit de vérifier que pour tout point z^0 de Y dans $\mathbf{P}^n$, il existe un voisinage V de z^0 tel que l'intégrale (+) converge sur $V \cap U_1$.



En effet Y est compacte, donc elle sera recouverte par un nombre fini de tels voisinages, et pour ρ assez petit U_ρ est contenu dans la réunion de ces voisinages.

Pour cela, on distingue deux cas, suivant que le point z^0 appartient à $Y \cap \mathbf{C}^n$ ou que z^0 appartient à l'hyperplan à l'infini H_∞ .

1. Convergence de l'intégrale de $|f|^2e^{-\varphi}$ au voisinage d'un point z^0 de $Y \cap \mathbf{C}^n$.

Le problème se pose uniquement si $z^0 \in Z_P = \{[\zeta] \in \mathbf{P}^n : P(\zeta_0, \dots, \zeta_n) = 0\}$. Puisque $z^0 \in Y$ et $Y \cap \Sigma_P = \emptyset$, le polynôme P est à croisements normaux en z^0 : si $\{P_{i_j}\}_{1 \le j \le k}$ sont les facteurs irréductibles du polynôme P qui s'annulent au point z^0 et $P_{i_j}(z^0) \neq 0$ pour $k < j \le N$, alors $\{dP_{i_1}(z^0), \dots, dP_{i_k}(z^0)\}$ est un système libre.

Par un changement de coordonnées, il existe un voisinage V dans lequel les $\{P_{i_j}\}_{1\leq j\leq k}$ sont les fonctions coordonnées $z \in \mathbf{C}^n \mapsto z_j$, et on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{V\cap U_\rho} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \\ &= \int_{V\cap U_\rho} \prod_{j=1}^{N} |P_j(1,z_1,\ldots,z_n)|^{2([\theta k_j]-\theta k_j)}(1+|z|^2)^{-\beta} d\lambda(z) \\ &= \int_{V\cap U_\rho} \prod_{1\leq j\leq k} |z_j|^{2\eta_j}(1+|z|^2)^{-\beta} \prod_{j>k} |P_{i_j}(1,z_1,\ldots,z_n)|^{2\eta_j} d\lambda(z) \\ &\leq C \int_{V\cap U_\rho} \prod_{1\leq j\leq k} |z_j|^{2\eta_j} d\lambda(z) < +\infty \end{aligned}$$

avec $\eta_j = [\theta k_j] - \theta k_j > -1$ et où la constante C est une borne pour les inverses $P_{i_j}^{-1}$ sur V, $j > k$.

2. Convergence de l'intégrale de $|f|^2 e^{-\varphi}$ au voisinage d'un point z^0 de $Y \cap H_\infty$.

D'après le théorème de Bertini, on peut choisir la sous-variété linéaire Y et l'hyperplan à l'infini H_∞ en sorte que $Y \cap H_\infty$ soit transverse à toutes les intersections $Z_{P_{i}} \cap \ldots \cap Z_{P_{i_k}}$ (et bien sûr, $Y \cap \Sigma_P = \emptyset$).

Si $(\zeta_0, \zeta_1 \ldots \zeta_n)$ désigne les coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^n$ choisies comme au début, les coordonnées du point $z^0 \in Y \cap H_\infty$ vérifient :

$$\zeta_0^0 = \zeta_1^0 = \zeta_2^0 = \cdots = \zeta_{a+1}^0 = 0 .$$

Donc z^0 est dans l'un des ouverts $W_i = \{[\zeta] \in \mathbf{P}^n \ : \zeta_i \neq 0\}$ pour $i > a+1$. On suppose par la suite, par exemple, que $\zeta_n^0 \neq 0$.

Montrons qu'il existe un voisinage Ω de z^0 tel que

$$\int_{U_1\cap\Omega} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty .$$

Sur l'ouvert $W_n \ni z^0$, on utilise le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} w_j = \dfrac{\zeta_j}{\zeta_n} = \dfrac{z_j}{z_n} & 1 \leq j \leq n \\ w_0 = \dfrac{1}{z_n} . \end{cases}$$

On a d'une part

$$dw_0 \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_i \wedge \cdots \wedge dw_{n-1} = \pm \frac{1}{z_n^{n+1}} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n ,$$

d'où

$$d\lambda(z) = |z_n|^{2(n+1)} d\lambda(w) = |w_0|^{-2(n+1)} d\lambda(w) ,$$

et d'autre part, pout tout indice $1 \leq j \leq N$:

$$\begin{aligned} P_j(1, z_1, \ldots, z_n) &= \widehat{P}_j(z_1, \ldots, z_n) \\ &= z_n^{\delta_j} P_j(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, 1) \text{ où } \delta_j = \deg P_j \\ &= w_0^{-\delta_j} P_j(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, 1) \ . \end{aligned}$$

En notant $\widetilde{w} = (w_1, \ldots, w_{a+1})$, il vient :

$$\begin{aligned} J &= \int_{U_1 \cap \Omega} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \\ &= \int_{\{|\widetilde{z}|<1\} \cap \Omega} \prod_{j=1}^{N} |P_j(1, z_1, \ldots, z_n)|^{2\eta_j} (1 + |z|^2)^{-\beta} d\lambda(z) \\ &= \int_{\{|\widetilde{w}|<|w_0|\} \cap \Omega} |w_0|^{-2\Sigma_{j=1}^N \delta_j \eta_j} \prod_{j=1}^{N} |P_j(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, 1)|^{2\eta_j} \\ &\qquad \left(\frac{|w_0|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 + 1}{|w_0|^2} \right)^{-\beta} |w_0|^{-2(n+1)} d\lambda(w) \\ &= \int_{\{|\widetilde{w}|<|w_0|\} \cap \Omega} \prod_{j=1}^{N} |P_j(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}, 1)|^{2\eta_j} |w_0|^{2\beta - 2\Sigma_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} \\ &\qquad (|w_0|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 + 1)^{-\beta} d\lambda(w) \ . \end{aligned}$$

Soient $(P_{ij})_{1 \leq j \leq k}$ les facteurs irréductibles s'annulant en z^0. Comme par construction $Y \cap H_\infty$ est transverse à $\bigcap_{1 \leq j \leq k} Z_{P_{ij}}$, le système $\{dw_0 , dw_1, \ldots, dw_{a+1} , dP_{ij}\}$ est libre au point z^0 . On peut choisir $P_j(w_0, \ldots, w_{n-1}, 1)$ comme nouvelle coordonnée w_{a+j+1} pour $j \geq 1$ au voisinage Ω du point z^0, ce qui donne :

$$\begin{aligned} J &= \int_{\{|\widetilde{w}|<|w_0|\} \cap \Omega} |w_0|^{2\beta - 2\Sigma_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} \prod_{j=1}^{k} |w_{j+1+a}|^{2\eta_j} \\ &\qquad \prod_{j \notin I_{z^0}} |P_j(w_0, \ldots, w_{n-1}, 1)|^{2\eta_j} (|w_0|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 + 1)^{-\beta} d\lambda(w) \\ &\leq C_1 \int_{\substack{\{|\widetilde{w}|<|w_0|\} \\ |w_i| \leq M \ , \ i > a+1 \\ |w_0| < \varepsilon}} |w_0|^{2\beta - 2\Sigma_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} d\lambda(w) \ . \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on aura $J < +\infty$ dès que

$$\int_{|w_0|<\varepsilon} |w_0|^{2\beta - 2\Sigma_{j=1}^N \delta_j \eta_j - 2(n+1)} |w_0|^{2(a+1)} d\lambda(w) < +\infty$$

et pour cela, il suffit que $2\beta - 2(n-a) - 2\sum_{j=1}^{N}\delta_j\eta_j > -2$ et $\beta \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\beta > \Big(\sum_{j=1}^{N}\delta_j([\theta k_j] - \theta k_j) + (n-a-1)\Big)_+ .$$

où X_+ désigne $\sup(X,0)$.

D'après la proposition 1, il existe une fonction F holomorphe dans $\mathbf{C}^n$ telle que :

$$F_{|Y\cap\mathbf{C}^n} = f \text{ où } Y\cap\mathbf{C}^n = \{z\in\mathbf{C}^n : z_1 = z_2 = \cdots = z_{a+1} = 0\}$$

et de plus :

$$L = \int_{\mathbf{C}^n}\frac{|F(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1+|\widetilde{z}|^2)^{a+1+\varepsilon}}d\lambda(z) < +\infty ,$$

c'est-à-dire :

$$(++)\ \ L = \int_{\mathbf{C}^n}|F(z)|^2|\widehat{P}(z)|^{2\theta}(1+|z|^2)^{-\beta}(1+|\widetilde{z}|^2)^{-a-1-\varepsilon}d\lambda(z) < +\infty .$$

Soit $\zeta\in\mathbf{C}^n$ et $\Delta(\zeta,r)$ un polydisque de centre ζ et de rayon $r>0$. La fonction $\zeta\mapsto|F(\zeta)|^2$ étant sous-harmonique, alors on a :

$$\begin{aligned}|F(\zeta)|^2 &\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Delta(\zeta,r))}\int_{\Delta(\zeta,r)}|F(z)|^2 d\lambda(z)\\ &\leq \frac{L}{\frac{\pi^n}{n!}r^{2n}}\sup_{z\in\Delta(\zeta,r)}\Big(|\widehat{P}(z_1,\ldots,z_n)|^{2\theta}(1+|z|^2)^{\beta}(1+|\widetilde{z}|^2)^{a+1+\varepsilon}\Big)\end{aligned}$$

d'où

$$|F(\zeta)| \leq C_1 r^{-n}\sup_{z\in\Delta(\zeta,r)}\Big(|P(1,z_1,\ldots,z_n)|^{\theta}(1+|z|)^{\beta}(1+|\widetilde{z}|)^{a+1+\varepsilon}\Big),$$

où C_1 est une constante indépendante de ζ et de r. On choisit $|\zeta-\sigma| = r$ avec $0<r<1$ (σ étant un élément arbitraire de S). Alors, pour ζ assez voisin de σ, on obtient la majoration :

$$|\widehat{P}(z)| \leq C_2|z-\sigma|^{t_2} \leq C_2(2|\zeta-\sigma|)^{t_2}$$

d'où $|F(\zeta)| \leq C_3|\zeta-\sigma|^{\theta t_2 - n}$. Ceci permet d'affirmer que F admet un zéro d'ordre $\geq t_1$ en chaque point de S, car $\theta t_2 - n > t_1 - 1$.

Maintenant pour $|\zeta| = R$, $r = R/2$, l'inégalité précédente sur $|F(\zeta)|$ entraîne que

$$\sup_{|\zeta|=R}|F(\zeta)| \leq C_4 R^{\theta.\deg P+\beta-n+a+1+\varepsilon}.$$

Donc, F est un élément de $\mathbf{C}[z_1,\ldots,z_n]$ vérifiant :

$$\deg F \leq \theta.\omega_{t_2}(S) + \beta - n + a + 1 + \varepsilon.$$

Choisissons $\theta = \alpha + \varepsilon$. Puisque $\omega_{t_1}(S) \leq \deg F$, on obtient à la limite quand ε tend vers 0 et quand β tend vers sa valeur limite inférieure :

$$\omega_{t_1}(S) + \min\left(\sum_{j=1}^{N} \delta_j(\alpha k_j - [\alpha k_j]), n - a - 1\right) \leq \alpha\omega_{t_2}(S)$$

où $\alpha = \dfrac{(t_1 + n - 1)}{t_2}$. On peut supposer sans perte de généralité (remarque ci-dessous) que :

$$\sum_{j=1}^{N} \delta_j(\alpha k_j - [\alpha k_j]) \geq n - 1,$$

ce qui donne :

$$\frac{\omega_{t_1}(S) + n - a - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}.$$

Remarque. — Si $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \delta_j(\alpha k_j - [\alpha k_j]) < n - 1$, on a :

$$\frac{\omega_{t_1}(S) + n - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}(S)}{t_2}$$

c'est-à-dire que la conjecture de Chudnovsky-Demailly est vérifiée dans ce cas.

En effet, soit P un élément de Λ_{t_2}, $P = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_N^{k_N}$ sa décomposition en facteurs irréductibles et $\delta_j = \deg P_j$.

On considère le polynôme

$$Q = \prod_{j=1}^{N} P_j^{[\alpha k_j]} \quad \text{où } \alpha = \frac{(t_1 + n - 1)}{t_2},$$

alors on a :

$$\deg Q = \sum_{j=1}^{N} \delta_j [\alpha k_j] = \alpha \sum_{j=1}^{N} \delta_j k_j - \Delta = \alpha\omega_{t_2}(S) - \Delta$$

et Q s'annule en chaque point σ de S à l'ordre T tel que

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{j=1}^{N} [\alpha k_j].\operatorname{ord}_\sigma(P_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \alpha k_j.\operatorname{ord}_\sigma(P_j) - \sum_{j=1}^{N} (\alpha k_j - [\alpha k_j]).\operatorname{ord}_\sigma(P_j) \\
&\geq \alpha t_2 - \Delta \\
&\geq t_1 + n - 1 - \Delta
\end{aligned}$$

d'où :

$$T \geq t_1 + p,$$

où p est le plus petit entier supérieur ou égal à $(n - 1 - \Delta)$. Toute dérivée R d'ordre p de Q est un polynôme qui s'annule au moins à l'ordre t_1 en chaque point de S et

$$\deg R \leq \frac{t_1 + n - 1}{t_2}\omega_{t_2}(S) - (n - 1),$$

d'où

$$\omega_{t_1}(S) + (n - 1) \leq \frac{t_1 + n - 1}{t_2}\omega_{t_2}(S),$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Démonstration du théorème 2.

Soit $\{P_j\}_{1 \leq j \leq m}$ une base de $E_S(D_2, t_2)$. Soit $x \notin V_S(D_2, t_2)$ un point fixé. On choisit un hyperplan H_∞ ne passant pas par x . Il existe une sous-variété linéaire Y_x de $\mathbf{P}^n$ passant par x et de dimension $(n - a - 1)$ telle que :

$$Y_x \cap V_S(D_2, t_2) = Y_x \cap \bigcap_{j=1}^{m} Z_{P_j} = \emptyset .$$

Après un changement de coordonnées affines $z = (z_1, \ldots, z_n)$, l'équation de la sous-variété $Y_x \cap \mathbf{C}^n$ devient :

$$Y_x \cap \mathbf{C}^n = \{z \in \mathbf{C}^n \ : \ z_1 = z_2 = \cdots = z_{a+1} = 0\} .$$

On considère la fonction plurisousharmonique définie par :

$$\varphi(z) = \theta \log \left(\sum_{j=1}^{m} |P_j(1, z_1, \ldots, z_n)|^2 \right)$$

où θ est un réel $> \dfrac{t_1 + n - 1}{t_2}$. On applique le théorème d'existence (Proposition 1), sur l'ouvert de $\mathbf{C}^n$:

$$U_\rho = \{z \in \mathbf{C}^n \ : \ |\widetilde{z}| < \rho\}$$

où $\widetilde{z} = (z_1, \ldots, z_{a+1})$ et où ρ est un nombre réel positif assez petit, à la fonction holomorphe $f \equiv 1$ sur U_ρ . Montrons que :

$$J = \int_{U_\rho} |f(z)|^2 e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) < +\infty .$$

En effet :

$$J = \int_{U_\rho} e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) = \int_{U_\rho} \left(\sum_{j=1}^{m} |P_j(1, z_1, \dots, z_n)|^2 \right)^{-\theta} d\lambda(z) .$$

Or les polynômes homogènes de degré D_2 : $P_1, P_2 \dots P_m, z_1^{D_2} \dots z_{a+1}^{D_2}$ n'ont pas de zéros communs dans $\mathbf{P}^n$, d'après le choix de Y_x . Comme la fonction continue :

$$(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) \stackrel{\Phi}{\longmapsto} \sum_{j=1}^{m} |P_j(\zeta_0, \dots, \zeta_n)|^2 + |\zeta_1|^{2D_2} + \dots + |\zeta_{a+1}|^{2D_2}$$

atteint un minimum $C > 0$ sur la sphère $S = \{\zeta \in \mathbf{C}^{n+1} : |\zeta| = 1\}$, on en déduit $\Phi(\zeta) \geq C|\zeta|^{2D_2}$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$ par homogénéité, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} |P_j(1, z_1, \dots, z_n)|^2 &\geq C(1 + |z|^2)^{D_2} - (|z_1|^{2D_2} + \dots + |z_{a+1}|^{2D_2}) \\ &\geq C_1(1 + |\underline{z}|^2)^{D_2} \text{ sur } U_\rho . \end{aligned}$$

pour ρ assez petit, où $\underline{z} = (z_{a+1}, \dots, z_n)$. Par suite

$$J = \int_{U_\rho} e^{-\varphi(z)} d\lambda(z) \leq C_1 \int_{U_\rho} (1 + |\underline{z}|^2)^{-\theta D_2} d\lambda(z) < +\infty ,$$

en effet

$$\theta D_2 > t_2 \cdot \frac{t_1 + n - 1}{t_2} = t_1 + n - 1 > n - a - 1 .$$

D'après la proposition 2, il existe une fonction F_x holomorphe dans $\mathbf{C}^n$ et telle que :

$$F_{x|Y_x \cap \mathbf{C}^n} = 1 \text{ et } \int_{\mathbf{C}^n} \frac{|F_x(z)|^2 e^{-\varphi(z)}}{(1 + |\widetilde{z}|^2)^{a+1+\varepsilon}} d\lambda(z) < +\infty .$$

Par les mêmes arguments que ceux de la démonstration du théorème 2, on peut affirmer que F_x est un polynôme,

$$\deg F_x \leq \alpha\ \omega_{t_2}^a(S) - (n - a - 1) ,$$

et que F_x s'annule à un ordre $\geq t_1$ sur S .

Soit $\widetilde{F}_x$ le polynôme homogène associé à F_x . Alors $\widetilde{F}_x(1, x) = F_x(x) = 1$. Si D_1 désigne la partie entière de $\alpha\ \omega_{t_2}^a(S) - (n - a - 1)$, alors $\deg \widetilde{F}_x \leq D_1$, donc il existe un polynôme $\widetilde{G}_x \in E_S(D_1, t_1)$ multiple de $\widetilde{F}_x$ tel que $\widetilde{G}_x(1, x) \neq 0$, par suite $x \notin V_S(D_1, t_1)$. Comme ce résultat est vrai pour tout point $x \notin V_S(D_2, t_2)$ on en déduit que :

$$V_S(D_1; t_1) \subset V_S(D_2, t_2) ,$$

d'où $\dim_{\mathbb{C}} V_S(D_1, t_1) \leq a$. Par conséquent, on a :

$$\omega_{t_1}^a(S) \leq D_1 \leq \frac{t_1 + n - 1}{t_2}\omega_{t_2}^a(S) - (n - a - 1) ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\omega_{t_1}^a(S) + n - a - 1}{t_1 + n - 1} \leq \frac{\omega_{t_2}^a(S)}{t_2} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMBIERI, Algebraic values of meromorphic maps, Invent. Math., 10 (1970), 267–287 et 11, 163–166.

[2] G.-V. CHUDNOVSKY, Singular points on complex hypersurfaces and multi-dimensional Schwarz lemma, Séminaire Delange–Pisot–Poitou, 19, 1978.

[3] J.–P. DEMAILLY, Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), 75–102.

[4] J.–P. DEMAILLY, Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi–positif au–dessus d'une variété kählérienne complète, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4e série, 15 (1982), 457–511.

[5] H. ESNAULT, E. VIEHWEG, Sur une minoration du degré d'hypersurfaces s'annulant en certains points, Math. Ann., 263 (1983), 75–86.

[6] H. SKODA, Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et applications arithmétiques, Séminaire P. Lelong–H. Skoda (Analyse) 1975/76, Lecture Notes in Math., Springer, 578 (1977), 314–323.

[7] M. WALDSCHMIDT, Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque, S.M.F., 69–70 (1979).

Manuscrit reçu le 30 octobre 1989.

Abdelhak AZHARI,
Rue 141, n°55
Aïn Chok
Casablanca 02 (Maroc).