ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

KRZYSZTOF KURDYKA
GILLES RABY

Densité des ensembles sous-analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 3 (1989), p. 753-771
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_753_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 753–771

DENSITÉ DES ENSEMBLES SOUS-ANALYTIQUES

par K. KURDYKA & G. RABY

0. Introduction.

Soit Y une partie de $\mathbb{R}^n$ dont le volume k−dimensionnel est fini. Désignons par $B(y, r)$ la boule euclidienne ouverte de rayon r centrée au point y de $\mathbb{R}^n$, et notons σ_k le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^k$. On dit que Y *a une densité en* y lorsque la fonction $r \mapsto \mathrm{vol}_k(Y \cap B(y,r))/\sigma_k r^k$ a une limite en zéro. Cette limite $\theta_k(Y, y)$ est alors appelée densité de Y en y.

Dans le cas où Y est un sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^n$ de dimension pure p, P. Lelong [Le] a montré que $\theta_{2p}(Y, y)$ existe en tout point y de Y, et d'après le théorème de P. Thie [Th] ce nombre est un entier égal à la multiplicité de Y en y (voir aussi J.P. Demailly [D]).

Quand Y est un ensemble sous-analytique réel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k en y, deux problèmes se posent :

(I) le nombre $\theta_k(Y, y)$ existe-t-il?

(II) lorsque $\theta_k(Y, y)$ existe, quelle est son interprétation géométrique et comment varie-t-il en fonction de y?

Dans le paragraphe 1, après avoir rappelé la notion de cône tangent, nous étudions la décomposition en graphes d'un ensemble sous-analytique. Cette décomposition joue un rôle essentiel dans les paragraphes suivants.

Mots-clés : Cône tangent – Densité – Sous-analytique – Volume.
Classification A.M.S. : 32B15, 32B20.

Le paragraphe 2 apporte une réponse positive au problème (I) : on montre l'existence de $\theta_k(Y,y)$ dès que Y est un ensemble sous-analytique de dimension k en y.

Le paragraphe 3 est consacré à l'interprétation géométrique de la densité. Nous définissons dans ce paragraphe le cône tangent pur à un ensemble sous-analytique, chaque composante connexe de ce cône tangent est affectée d'une multiplicité entière. On montre alors que la densité s'exprime, comme dans le cas complexe (voir [Th]), en fonction de ces multiplicités et du volume des composantes connexes du cône tangent pur.

Dans le paragraphe 4 nous abordons le problème de la variation de la densité. Par exemple, si Y est un sous-ensemble analytique réel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k alors $\theta_k(Y,y)$ est un entier lorsque y est en dehors d'un ensemble sous-analytique de dimension au plus $k-2$. On donne enfin un exemple d'ensemble semi-algébrique sur lequel la fonction densité n'a aucun caractère sous-analytique.

1. Préliminaires.

Un sous-ensemble Y de $\mathbb{R}^n$ est appelé sous-analytique si tout point x de $\mathbb{R}^n$ possède un voisinage U tel que $U \cap Y$ est l'image d'un ensemble semi-analytique relativement compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour les propriétés des ensembles semi-analytiques et sous-analytiques nous renvoyons le lecteur à [Lo], [G], [DLS], [K] et [P] ou à [H], [Ta] et [BM].

1.1. DÉFINITION. — *Si y est un point de $\mathbb{R}^n$, on appelle* cône tangent *à Y en y l'ensemble $C_y(Y)$ défini par (cf. par exemple [F]) :*

$$C_y(Y) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0, \exists z \in Y, \exists \lambda \in [0,+\infty[\ ;\ \|z-y\| < \varepsilon \text{ et } \|\lambda(z-y) - u\| < \varepsilon\}\ .$$

Il résulte de cette définition que $C_y(Y)$ est un cône fermé égal à $C_y(\overline{Y})$.

1.2. LEMME. — *Soit Y un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$. Le cône tangent à Y en y est sous-analytique de dimension au plus* $\dim_y Y$.

Remarques. — La démonstration ci-dessous montre que si Y est semi-analytique, alors $C_y(Y)$ est un cône semi-analytique et donc semi-algébrique (*cf.* par exemple [R]). On peut avoir $\dim C_y(Y) < \dim_y Y$ comme le montre l'exemple

$$Y = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 | u^2 + v^2 = w^3\} \text{ où } C_0(Y) = \{0\} \times \{0\} \times [0,+\infty[\ .$$

Pour montrer le lemme, il suffit de remarquer que l'ensemble A_y défini par :

$$A_y = \{(u,z) \in \mathbb{R}^n \times Y | z \neq y \text{ et } u\|z-y\| = \|u\| \cdot (z-y)\}$$

est sous-analytique et de dimension au plus $1 + \dim_y Y$ en $(0,y)$. Par suite, comme on a $C_y(Y) \times \{y\} = \overline{A}_y \cap (\mathbb{R}^n \times \{y\}) \subset \overline{A}_y \backslash A_y, C_y(Y)$ est sous-analytique et de dimension au plus $\dim_y Y$.

1.3. *Remarque.* — Le lemme de sélection d'une courbe (*cf.* [BM]ou [H]) appliqué à A_y montre que si $\dim_y Y > 0$, alors un vecteur u de norme 1 est dans $C_y(Y)$ si et seulement si il existe $\gamma\ :]-1,+1[\to \mathbb{R}^n$ une application analytique telle que :

$$\gamma(0) = y\ ,\quad \gamma(]0,1[\subset Y\backslash\{y\}\ ,\quad u = \lim_{t\to 0\ ;\ t>0} \frac{\gamma(t)-y}{\|\gamma(t)-y\|}\ .$$

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, une sous-variété analytique (non nécessairement fermée). Supposons qu'il existe un ouvert U d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^k$ et qu'il existe une application analytique $\varphi : U \to E^\perp$ à valeurs dans l'orthogonal de E tels que Γ soit le graphe de φ dans $E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^n$. Alors on dit que Γ est un *morceau $\varepsilon-$analytique* dès que la dérivée de φ est bornée par ε, c'est-à-dire que $\|D_u\varphi\| \leq \varepsilon$ pour tout u de U.

1.4. PROPOSITION. — *Soit Y un ensemble sous-analytique borné de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe des ensembles sous-analytiques disjoints $\Gamma_1^\varepsilon, \ldots, \Gamma_N^\varepsilon$ contenus dans Y tels que :*

i) $\dim Y \backslash \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i^\varepsilon < k$;

ii) *les Γ_i^ε sont des morceaux $\varepsilon-$analytiques de dimension k .*

Remarque. — La décomposition d'un ensemble sous-analytique borné Y en morceaux $\varepsilon-$analytiques montre que :

$$\mathrm{vol}_k(Y) < +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{vol}_{k+1}(Y) = 0 \quad \text{pour} \quad k = \dim Y\ .$$

En particulier, on a $\mathrm{vol}_k(\overline{Y}) = \mathrm{vol}_k(Y)$; ($\mathrm{vol}_k(Y)$ désigne la $k-$mesure de Hausdorff de Y, *cf.* [F]).

En enlevant à Y l'ensemble de ses points singuliers, on peut supposer que Y est une sous-variété analytique de dimension pure k. On a alors une application $\tau : Y \to G_k(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans la grassmanienne des k-plans de $\mathbb{R}^n$, qui à $y \in Y$ associe le plan tangent T_yY à Y en y.

Pour $\varepsilon > 0$ et $E \in G_k(\mathbb{R}^n)$, désignons par G_E^ε l'ouvert semi-algébrique :

$$G_E^\varepsilon = \{u + f(u) \mid f \in L(E, E^\perp),\ \|f\| < \varepsilon\} ,$$

$G_k(\mathbb{R}^n)$ étant compacte, il existe $E_1, \ldots, E_q$ dans $G_k(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{1 \le i \le q} G_{E_i}^\varepsilon .$$

La proposition se déduit alors des deux lemmes suivants :

1.5. LEMME ([V] ou [Lo2] et [DW]). — *L'application $\tau : Y \to G_k(\mathbb{R}^n)$ est sous-analytique* (en particulier les ensembles V_i^ε définis par $V_i^\varepsilon = \{y \in Y | T_yY \in G_{E_i}^\varepsilon\}$ sont sous-analytiques).

1.6. LEMME ([G] ou [DLS1]). — *Soit $p : \mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp \to E$ la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$. Si V est un ensemble sous-analytique borné de $\mathbb{R}^n$ sans point singulier, tel que $p|V$ est un difféomorphisme local, alors la fonction $u \mapsto \operatorname{card}(V \cap p^{-1}(u))$ est bornée sur E .*

En effet le lemme 1.6 montre que, (*cf.* par exemple [S]), il existe un sous-analytique $S_i^\varepsilon \subset V_i^\varepsilon$ tel que $\dim S_i^\varepsilon < \dim V_i^\varepsilon$ et tel que $V_i^\varepsilon \backslash S_i^\varepsilon$ est une réunion finie d'ensembles sous-analytiques graphes de fonctions analytiques à domaines dans E_i^ε ; ces graphes sont donc des morceaux ε-analytiques. Ainsi $Y \backslash \bigcup_{i=1}^{q} S_i^\varepsilon$ est une réunion finie de morceaux ε-analytiques $\Gamma_j'^\varepsilon$, $(1 \le j \le N)$ sous-analytiques dans $\mathbb{R}^n$. La proposition 1.4 s'en déduit immédiatement.

Remarquons que les fonctions ayant pour graphes les Γ_i^ε ne sont pas en général globalement lipschitziennes ni même continues au bord. Nous allons montrer qu'en un point du bord elles n'ont qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences. Montrons pour cela la proposition suivante qui sera utilisée par la suite.

1.7. PROPOSITION. — *Soit Γ un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$, graphe d'une application φ analytique sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^k$ à dérivée bornée* *par ε. Si $z \in \overline{\Gamma}$ alors on a :*

$$C_z(\Gamma) \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid \|y\| \leq \varepsilon \|x\|\} .$$

Démonstration. — On peut supposer que z est l'origine de $\mathbb{R}^n$. Soit donc $u = (x,y)$ un vecteur de $C_0(\Gamma)$ de norme 1. D'après 1.3 il existe une application analytique $\gamma :]-1,+1[\to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(]0,1[) \subset \Gamma \backslash \{0\}$ et $u = \lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$. Ecrivons $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$; on a alors pour $t > 0$:

$$\|\gamma_2(t)\| = \|\varphi(\gamma_1(t))\| \leq \lambda(t) \cdot \sup_{x \in U} \|D_u \varphi\| \leq \varepsilon \cdot \lambda(t)$$

où $\lambda(t)$ désigne la longueur de l'arc $\gamma_1[0,1]$. D'où :

$$\|y\| = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|\gamma_2(t)\|}{\|\gamma(t)\|} \leq \lim_{t \to 0^+} \varepsilon \frac{\lambda(t)}{\|\gamma(t)\|} = \varepsilon \|x\| \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(t)}{\|\gamma_1(t)\|} .$$

La proposition résulte donc du fait que γ_1 est analytique et donc que $\frac{\lambda(t)}{\|\gamma_1(t)\|}$ tend vers 1.

1.8. COROLLAIRE. — *Avec les notations précédentes, supposons Γ borné. Si $x \in \overline{U}$, alors φ n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérences au point x .*

Sinon la dimension de $\overline{\Gamma} \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k})$ serait non nulle, donc il existerait un z de $\overline{\Gamma}$ tel que $C_z(\overline{\Gamma} \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k})) \neq \{0\}$, ce qui contredirait la proposition 1.7.

2. Densité d'un ensemble sous-analytique.

Le volume d'un ouvert sous-analytique se comporte comme celui de son cône tangent en ce sens que l'on a la proposition suivante :

2.1. PROPOSITION. — *Un ouvert Ω sous-analytique dans $\mathbb{R}^n$ a une densité en tout point y de $\mathbb{R}^n$ et on a :*

$$\lim_{r \to 0} \mathrm{vol}_n \frac{(\Omega \cap B(y,r))}{r^n} = \mathrm{vol}_n(B(1) \cap C_y(\Omega))$$

où $B(1)$ est la boule euclidienne de rayon 1 centrée à l'origine.

Démonstration. — Lorsque C est un cône (de sommet 0) dans $\mathbb{R}^n$ on a : $\mathrm{vol}_n(C \cap B(r)) = r^n \, \mathrm{vol}_n(C \cap B(1))$ pour tout $r > 0$. Plaçons-nous donc en un point $y \in \overline{\Omega}$ que l'on suppose être l'origine de $\mathbb{R}^n$, et considérons le cône C_ε engendré par $\Omega \cap B(\varepsilon)$. La fonction $\varepsilon \mapsto \mathrm{vol}_n(C_\varepsilon \cap B(1))$ est décroissante, d'où :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_n \frac{(C_\varepsilon \cap B(\varepsilon))}{\varepsilon^n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_n(C_\varepsilon \cap B(1)) = \mathrm{vol}_n(B(1) \bigcap_{\varepsilon>0} C_\varepsilon) .$$

Posons $Z = \bigcap_{\varepsilon>0} C_\varepsilon$; alors $C_0(\Omega)$ contient Z et on obtient donc :

$$(*) \qquad \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathrm{vol}_n \frac{(\Omega \cap B(\varepsilon))}{\varepsilon^n} \leq \mathrm{vol}_n(B(1) \cap Z) \leq \mathrm{vol}_n(B(1) \cap C_0(\Omega)) .$$

Soit maintenant $z \in Z\backslash\{0\}$. Alors $]0, z[\cap\Omega$ est un ensemble sous-analytique ayant 0 pour point adhérent, donc $\alpha(z) = \inf\{\lambda > 0 \mid \lambda z \notin \Omega\}$ est strictement positif et le segment $]0, \alpha(z)\cdot z[$ est contenu dans Ω. Par conséquent, si l'on pose :

$$Z_\varepsilon = \{z \in Z\backslash\{0\} \mid \|\alpha(z)\cdot z\| \geq \varepsilon\}$$

on définit ainsi un cône dont la trace sur $B(\varepsilon)$ est contenue dans $\Omega \cap B(\varepsilon)$ et on a : $Z\backslash\{0\} = \bigcup_{\varepsilon>0} Z_\varepsilon$. On en déduit donc que :

$$\mathrm{vol}_n(\Omega \cap B(\varepsilon)) \geq \mathrm{vol}_n(Z_\varepsilon \cap B(\varepsilon)) = \varepsilon^n \mathrm{vol}_n(B(1)) \cap Z_\varepsilon)$$

et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_n(B(1) \cap Z_\varepsilon) = \mathrm{vol}_n(B(1) \cap Z) ;$$

ce qui montre que :

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathrm{vol}_n \frac{(\Omega \cap B(\varepsilon))}{\varepsilon^n} \geq \mathrm{vol}_n(B(1) \cap Z) .$$

Cette dernière inégalité, ajoutée à $(*)$, prouve donc que Ω a une densité en 0 et que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_n \frac{(\Omega \cap B(\varepsilon))}{\varepsilon^n} = \mathrm{vol}_n(B(1) \cap Z) .$$

Puisque $C_0(\Omega) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{C}_\varepsilon$ on a donc :

$$\mathrm{vol}_n(B(1) \cap C_0(\Omega)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_n(B(1) \cap \overline{C}_\varepsilon) .$$

D'autre part, par définition de Z , on a :

$$\mathrm{vol}_n(B(1) \cap Z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{vol}_n(B(1) \cap C_\varepsilon) .$$

Il suffit maintenant pour conclure de remarquer que C_ε est sous-analytique; donc, d'après la remarque de la proposition 1.4, on a :

$$\mathrm{vol}_n(B(1) \cap C_\varepsilon) = \mathrm{vol}_n(B(1) \cap \overline{C}_\varepsilon) .$$

2.2. THÉORÈME. — *Un ensemble sous-analytique Y de $\mathbb{R}^n$ a une densité en tout point. C'est-à-dire que si $y \in \mathbb{R}^n$ et si* $\dim_y Y = k$ *alors la fonction* $r \mapsto \mathrm{vol}_k(Y \cap B(y,r))/r^k$ *a une limite en* 0.

La démonstration utilise le lemme suivant qui montre d'ailleurs qu'une sous-variété de classe C^1 admet le nombre 1 pour densité en chacun de ses points.

2.3. LEMME. — *Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ une application localement lipschitzienne de rapport ε définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^k$. Soit $a \in \overline{U}$ tel que φ ait une limite b en a. Alors on a pour tout $r > 0$:*

$$\mathrm{vol}_k\Big(U' \cap B\Big(a, \frac{r}{1+\varepsilon}\Big)\Big) \leq \mathrm{vol}_k(\Gamma \cap B(a,b),r) \leq (1.\varepsilon)^k \, \mathrm{vol}_k(U \cap B(a,r))$$

où Γ est le graphe de φ et où $U' = \{x \in U \mid \|\varphi(x) - b\| \leq \varepsilon \|x - a\|\}$.

En effet, si $p : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ désigne la projection canonique et si $q : U \to \mathbb{R}^n$ est l'application $q(x) = (x, \varphi(x))$ on a :

$$\Gamma \cap B((a,b),r) \subset q(U \cap B(a,r))$$

et

$$U' \cap B\Big(a + \frac{r}{1+\varepsilon}\Big) \subset p(\Gamma \cap B(a,b),r)) \ .$$

De plus, p et q sont localement lipschitziennes de rapport respectif 1 et $1+\varepsilon$ donc :

$$\mathrm{vol}_k \, p(\Gamma \cap B((a,b),r) \leq \mathrm{vol}_k(\Gamma \cap B(a,b),r)) \ ,$$
$$\mathrm{vol}_k \, q(U \cap B(a,r)) \leq (1+\varepsilon)^k \, \mathrm{vol}_k(U \cap B(a,r)) \ ,$$

ce qui montre le lemme.

Soit maintenant Y un ensemble sous-analytique de dimension k en $y \in \overline{Y}$. On peut supposer que $y = 0$ et que Y est borné et de dimension k. Pour $\varepsilon > 0$, considérons les $\Gamma_1^\varepsilon, \dots, \Gamma_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ intervenant dans la décomposition en morceaux $\varepsilon-$analytiques.

Pour tout $r > 0$ on a :

$$\mathrm{vol}_k(Y \cap B(r)) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mathrm{vol}_k(\Gamma_1^\varepsilon \cap B(r)) \ .$$

Les Γ_i^ε sont des graphes des fonctions $\varphi_i^\varepsilon : U_i^\varepsilon \to E_i^{\varepsilon\perp}$ à domaines U_i^ε ouverts sous-analytiques de $E_i^\varepsilon \in G_k(\mathbb{R}^n)$. On peut supposer que $0 \in \overline{\Gamma}_i^\varepsilon$ pour tout i et, d'après 1.8, que $\lim\limits_0 \varphi_i^\varepsilon = 0$.

Il résulte de la proposition 2.1 que chaque U_i^ε a une densité en 0. De plus, avec les notations de la démonstration de 2.1, si U est l'un des ouverts U_i^ε on a :

$$Z_\lambda \cap B(\lambda) \subset U' \text{ pour } \lambda > 0 \quad (Z_\lambda \cap B(\lambda) \text{ est étoilé en } 0) \ ;$$

donc :

$$Z \subset C_0(U') \subset C_0(U) \ ,$$

et par suite :

$$\mathrm{vol}_n(B(1) \cap C_0(U)) = \mathrm{vol}_n(B(1) \cap C_0(U')) \ .$$

Le lemme 2.3 donne alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varepsilon' > 0$:

$$\frac{\lambda(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^k} \leq \underline{\lim}_{r \to 0} \frac{\mathrm{vol}_k(Y \cap B(r))}{r^k} \leq \overline{\lim}_{r \to 0} \frac{\mathrm{vol}_k(Y \cap B(r))}{r^k} \leq (1+\varepsilon')^k \lambda(\varepsilon')$$

où

$$\lambda(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \frac{\mathrm{vol}_k(U_i^\varepsilon \cap B(r))}{r^k} = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mathrm{vol}_k(C_0(U_i^\varepsilon) \cap B(1)) \ .$$

Il suffit maintenant pour conclure de remarquer que $\lambda(\varepsilon) \leq (1+\varepsilon)^k 2^k \lambda(1)$ et donc que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (1+\varepsilon)^k \lambda(\varepsilon) - \frac{\lambda(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^k} = 0 \ .$$

2.4. *Remarque.* — Supposons que Γ soit un morceau ε−analytique, graphe d'une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ à dérivée bornée par ε sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^k$. La démonstration précédente montre que si $0 \in \overline{U}$ et si $\lim_0 \varphi = 0$ alors on a :

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^k} \theta_k(U, 0) \leq \theta_k(\Gamma, (0,0)) \leq (1+\varepsilon)^k \theta_k(U, 0) \ .$$

2.5. *Exemples.* — En les points y réguliers de dimension k de Y on a $\theta_k(Y, y) = 1$. Par contre, aux points singuliers, la densité peut prendre une valeur quelconque, ainsi :
pour $Y = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid w^2 = \alpha(u^2+v^2)\}$ et $\alpha > 0$,

$$\theta_2(Y, 0) = 2(1+\alpha)^{-1/2} \ ,$$

pour $Y = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid w^3 = u^2+v^2\}$,

$$\theta_2(Y, 0) = 0 \ .$$

3. Cône tangent pur et densité.

Nous introduisons ici la notion de cône tangent pur à un ensemble sous-analytique Y. Ce cône est un ouvert dense de la partie régulière de dimension k du cône tangent ($k = \dim Y$) ; le volume des traces sur la boule unité de ses composantes connexes affectées de coefficients entiers donne la densité de Y . Les coefficients qui apparaissent dans cette interprétation sont indépendants du choix des coordonnées, et, dans le cas analytique complexe, ils correspondent aux multiplicités introduites par P. Thie dans [Th].

3.1. DÉFINITIONS. — *Soit V une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension k telle que V soit sous-analytique. Un point x de $\overline{V}\backslash V$ est appelé ici* point de reliure pour V *("quasi-regular boundary point" dans [P1]) si :*

i) *x est un point régulier de dimension $k-1$ de $\overline{V}\backslash V$.*

(ii) *Il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$ dans lequel les composantes connexes de $U \cap V$ sont des C^1 sous-variétés à bord de bord $U \cap (\overline{V}\backslash V)$.*

Lorsque Y est un ensemble sous-analytique de dimension k, on appelle reliure de Y *(notée* Rel(Y)*) l'ensemble des points de reliure de la sous-variété V des points réguliers de dimension k de Y.*

Avec ces notations le résultat de [P1] s'énonce comme suit :

3.2. PROPOSITION. — *Soit Y un ensemble sous-analytique de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Alors la reliure de Y est un ensemble sous-analytique dense dans l'ensemble des points réguliers de dimension $k-1$ de $\overline{V}\backslash V$.*

La démonstration de cette proposition repose sur le théorème de l'application tangente (lemme 1.5) et sur le critère suivant ([P1], th. 2.1) : soit M une variété analytique, sous-analytique, de dimension pure k . Soit N l'ensemble des points réguliers de dimension $k-1$ du bord de M. Alors la reliure de M est l'ensemble des points de N au voisinage desquels la paire (M, N) vérifie la condition (b) de Whitney.

3.3. DÉFINITIONS. — *Soit Y un ensemble sous-analytique de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Pour définir le cône tangent pur $C_y^s(Y)$ en Y au point y considérons l'application "éclatement sphérique" $e : \mathbb{R} \times \mathbf{S}_{n-1} \to \mathbb{R}^n$*

définie par $e(t,p) = y + tp$. *Notons* $\widetilde{Y}$ *et* $\widetilde{C}_y(Y)$ *les ensembles :*

$$\widetilde{Y} = e^{-1}(Y) \cap (]0,+\infty[\times \mathbf{S}_{n-1})$$
$$\widetilde{C}_y(Y) = \mathrm{Rel}(\widetilde{Y}) \cap (\{0\} \times \mathbf{S}_{n-1}) \ .$$

On a : $E = \overline{\widetilde{Y}} \cap (\{0\} \times \mathbf{S}_{n-1}) = \{0\} \times (\mathbf{S}_{n-1} \cap C_y(Y))$, *et d'après la proposition précédente :* $\dim(E \backslash \widetilde{C}_y(Y)) \leq k-2$.

Le cône tangent pur *est le cône (épointé) de* $\mathbb{R}^n$, *de sommet* 0 *et de base* $\widetilde{C}_y(Y)$ *(i.e.* $C_y^s(Y) =]0,+\infty[\cdot\widetilde{C}_y(Y)$*)* .

Soit C_j *une de ses composantes connexes. Soit maintenant* x *un point de* $\{0\} \times (\mathbf{S}_{n-1} \cap C_j)$*; notons* $n_j(x)$ *le nombre minimum de composantes connexes de* $\widetilde{Y} \cap U$ *où* U *est un voisinage assez petit de* x *dans* $\mathbf{S}_{n-1} \times \mathbb{R}$. *Ce nombre est constant sur* $\{0\} \times (\mathbf{S}_{n-1} \cap C_j)$, *l'entier* n_j *ainsi obtenu est appelé* multiplicité de Y en y le long de C_j.

3.4. *Remarques.* — $C_y^s(Y)$ est une variété analytique, sous-analytique dans $\mathbb{R}^n$, vide ou de dimension pure k. De plus on a :

$$\dim(C_y(Y) \backslash C_y^s(Y)) \leq k-1 \ .$$

3.5. *Exemples.* — Si y est un point régulier de Y alors $C_y^s(Y)$ est l'espace tangent à Y en y privé de l'origine.

Si 0 est un point du bord d'un ouvert U sous-analytique dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$C_0^s(U) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \mid \exists \alpha > 0, \exists \beta > 0 \ ; \ ]0,\alpha[\cdot B(z,\beta) \subset U \right\} \ .$$

Pour $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$ on a $C_0^s(Y) = \{0\}\times]0,+\infty[$ et la multiplicité de Y en 0 (le long de $C_0^s(Y)$) est 2.

3.6. Proposition. — *Soit* $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ *une application analytique à dérivée bornée par* ε *sur l'ouvert* U *sous-analytique dans* $\mathbb{R}^k$. *Supposons que le graphe* Γ *de* φ *soit sous-analytique, que* $0 \in \overline{U}$ *et que* $\lim\limits_0 \varphi = 0$. *Alors on a :*

i) $C_0^s(\Gamma)$ *est le graphe d'une application* $C_0(\varphi)$ *qui est analytique sur un ouvert dense dans* $C_0^s(U)$ *et à dérivée bornée par* ε .

ii) *La multiplicité de* Γ *en* 0 *le long des composantes de* $C_0^s(\Gamma)$ *vaut 1.*

La démonstration de cette proposition repose sur les faits suivants : soit $C_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid \|y\| \leq \varepsilon\|x\|\}$ et soit $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ la projection canonique. Alors

(1) Pour tout $\omega \in C_0^s(\Gamma)$ l'espace tangent à $C_0^s(\Gamma)$ en ω est contenu dans C_ε .

(2) On a $\pi(C_0^s(\Gamma)) \subset C_0^s(U)$.

Pour montrer (1) démontrons d'abord le lemme suivant :

3.7. LEMME. — *Soient M et N deux sous-variétés analytiques de $\mathbb{R}^n$, sous-analytiques, telles qu'au voisinage de N, M soit une C^1 sous-variété à bord de bord N . Soit $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sous-analytique telle que f soit nulle sur N, analytique et strictement positive sur M .*

Alors il existe un ouvert N' sous-analytique et dense dans N tel que tout point ω de N' possède un voisinage U dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

i) *$U \cap M \cap f^{-1}(c)$ est une variété pour c assez petit.*

ii) *Pour toute suite (x_n) de M de limite ω on a :*

$$\lim T_{x_n} f^{-1}\{f(x_n)\} = T_\omega N \ .$$

Démonstration. — On peut supposer que $N = U \times \{0\}$ et $M = U \times]0,1[$ où U est un ouvert sous-analytique de $\mathbb{R}^k$. Appliquons alors le théorème de Puiseux “à paramètres” (*cf.* [P2]), il existe donc un entier q et un ouvert sous-analytique U'' dense dans U tels que la fonction $\tilde{f}(u,t) = f(u,t^q)$ admette une extension analytique dans un voisinage de $U'' \times \{0\}$ dans $U'' \times \mathbb{R}$. On peut donc supposer que :

$$f(u,t) = \sum_{n \in N} \alpha_n(u) t^{n/q}$$

où $\alpha_n : U'' \to \mathbb{R}$ sont analytiques sur l'ouvert U'' que l'on supposera connexe. Soit alors $p = \min\{n \mid \alpha_n \neq 0\}$ et $U' = U'' \backslash \alpha_p^{-1}(0)$. Dans un voisinage d'un point $(u_0,0)$ de $U' \times \{0\}$, f s'écrit donc :

$$f(u,t) = t^{p/q} g(u,t) \text{ avec } g(u,0) \neq 0 \text{ et } \left|\frac{\partial g}{\partial t}(u,t)\right| \leq C|t|^{1-q/q}$$

où g est continue sous-analytique et où C est une constante.

Posons $h(u,t) = (f(u,t))^{q/p}$, h admet alors une extension de classe C^1 dans un voisinage de $(u_0,0)$ vérifiant

$$\frac{\partial h}{\partial t}(u,0) = (g(u,0))^{q/p} \neq 0 \ .$$

Notre lemme résulte alors du théorème du rang constant appliqué à h puisque $f^{-1}(c) = h^{-1}(c^{q/p})$.

Revenons maintenant à la preuve du point (1) de 3.6, c'est-à-dire que l'espace tangent $T_\omega C_0^s(\Gamma)$ est contenu dans le cône C_ε pour tout ω de $C_0^s(\Gamma)$.

Soit donc $\omega \in C_0^s(\Gamma)$ de norme 1. Avec les notations de 3.3 on a $\widetilde{C}_0(\Gamma) = \{0\} \times (C_0^s(\Gamma) \cap \mathbf{S}_{n-1})$. En identifiant $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n$ on a donc :

$$T_\omega C_0^s(\Gamma) = T_\omega \widetilde{C}_0(\Gamma) \oplus \mathbb{R}\omega \ .$$

D'après 1.7, ω est dans C_ε, donc il suffit de vérifier que $T_\omega \widetilde{C}_0(\Gamma)$ est dans C_ε quand ω décrit un ensemble dense dans $\widetilde{C}_0(\Gamma)$.

Il existe M une sous-variété analytique de $\mathbb{R} \times \mathbf{S}_{n-1}$, sous-analytique, qui est au voisinage de $N = \widetilde{C}_0(\Gamma)$ une C^1 sous-variété à bord, de bord N. Appliquons le lemme 3.7 à la fonction f, restriction à $M \cup N$ de la projection canonique de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Il suffit de vérifier que $T_\omega N$ est dans C_ε pour ω dans l'ensemble N' défini par le lemme.

Soit donc $\omega \in N'$. D'après le lemme de sélection d'une courbe, il existe une application analytique $\gamma :]-1,+1[\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\gamma(0) = \omega \quad \text{et} \quad \gamma(]0,1[) \subset \widetilde{\Gamma} = e_n^{-1}(\Gamma) \cap (]0,+\infty[\times \mathbf{S}_{n-1})$$

où $e_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est définie par $e_n(t,p) = tp$.

Posons $\widetilde{\gamma} = e_n \circ \gamma$, $\widetilde{\gamma}$ est un arc analytique tel que $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\widetilde{\gamma}(]0,1[)$ est transverse au point $\widetilde{\gamma}(t)$ à $\mathbf{S}_{n-1}(\|\widetilde{\gamma}(t)\|)$ pour $t < \varepsilon$, $\mathbf{S}_{n-1}(r)$ désignant la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^n$. Par conséquent $\mathbf{S}_{n-1}(r) \cap \Gamma = \Gamma_r$ est lisse au voisinage de $\widetilde{\gamma}(t)$ pour $r = \|\widetilde{\gamma}(t)\|$ et $0 < t < \varepsilon$. Sur Γ_r l'application e_n^{-1} est l'application $e_n^{-1}(z) = (r,(z/r))$; il en résulte donc que dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on a :

$$\{0\} \times T_{\widetilde{\gamma}(t)}\Gamma_r = T_{\gamma(t)} f^{-1}(r) \quad \text{pour} \quad r = \|\gamma(t)\| \text{ et } t \in]0,\varepsilon[\ .$$

D'après le lemme 3.7, on a donc dans $\mathbb{R}^n$:

$$T_\omega N = \lim_{t \to 0} T_{\widetilde{\gamma}(t)}\Gamma_r \ .$$

Ce qui achève la démonstration car Γ est un morceau ε−analytique.

Montrons maintenant le point (2) de 3.6 c'est-à-dire que

$$\pi(C_0^s(\Gamma)) \subset C_0^s(U) \quad \text{avec} \quad \pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \ .$$

Posons $\check{\mathbf{S}}_{n-1} = \mathbf{S}_{n-1} \backslash (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k})$ et pour $(t,p) \in \mathbb{R} \times \check{\mathbf{S}}_{n-1}$:

$$\widetilde{\pi}(t,p) = (t\|\pi(p)\|, \frac{\pi(p)}{\|\pi(p)\|}) \ , \ e_n(t,p) = tp \ .$$

On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\check{\mathbf{S}}_{n-1} & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & \mathbb{R}\times\mathbf{S}_{k-1} \\ {\scriptstyle e_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_k} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

L'ensemble $\widetilde{\Gamma} = \{(t,p) \in]0,+\infty[\times\mathbf{S}_{n-1} \mid tp \in \Gamma\}$ est contenu dans $\mathbb{R}\times\check{\mathbf{S}}_{n-1}$, et $\widetilde{\pi}$ induit un homéomorphisme de $\widetilde{\Gamma}$ sur

$$\widetilde{U} = e_k^{-1}(U) \cap (]0,+\infty[\times\mathbf{S}_{k-1}) \ .$$

Soit maintenant $\omega \in C_0^s(\Gamma)$ de norme 1. Dans un voisinage Ω de $(0,\omega)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbf{S}_{n-1}$, $\Omega\cap\widetilde{\Gamma}$ est réunion de variétés à bord de classe C^1, de bord $N = \widetilde{\Gamma}\cap(\{0\}\times\mathbf{S}_{n-1})$. D'après le point (1) de 3.6 on a dans $\mathbb{R}^n$:

$$T_\omega N \subset C_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k} \mid \|y\| \leq \varepsilon\|x\|\} \ ,$$

donc $\pi|N$ est un difféomorphisme dans un voisinage de ω . C'est-à-dire qu'en rétrécissant au besoin Ω , $\widetilde{\pi}|\Omega\cap N$ est un difféomorphisme. Ainsi, si M est une composante connexe de $\Omega\cap\widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{\pi}|M$ est un homéomorphisme sur $\widetilde{\pi}(M) \subset]0,+\infty[\times\mathbf{S}_{k-1}$, $\widetilde{\pi}|\Omega\cap N$ est un difféomorphisme sur $\widetilde{\pi}(\Omega\cap N) \subset \{0\}\times\mathbf{S}_{k-1}$, et dans Ω la variété M est une variété C^1 à bord, de bord $\Omega\cap N$. Par suite, en diminuant au besoin Ω, $\widetilde{\pi}(\Omega\cap(N\cup M))$ est une variété topologique à bord de bord $\widetilde{\pi}(\Omega\cap N)$. Or $\widetilde{\pi}(\Omega\cap N)$ et $\widetilde{\pi}(M)$ sont ouverts respectivement dans $\{0\}\times\mathbf{S}_{k-1}$ et $]0,+\infty[\times\mathbf{S}_{k-1}$, par suite $\widetilde{\pi}(0,\omega) \in \{0\}\times(C_0^s(U)\cap\mathbf{S}_{k-1})$ et donc $\pi(\omega) \in C_0^s(U)$.

Ceci achève la preuve des points (1) et (2) de 3.6, de plus, puisque $\widetilde{\pi}$ est un difféomorphisme de $\widetilde{\Gamma}$ sur $\widetilde{U}$, on a aussi démontré 3.6, ii).

Montrons maintenant que 3.6 i) provient du point (2). On a $C_0^s(U) = \{u \in \mathbb{R}^k\backslash\{0\} \mid \exists\lambda > 0, \exists r > 0 \ ; \ ]0,\lambda[\cdot B(u,r) \subset U\}$. Le théorème de Puiseux appliqué à la fonction $t \to \varphi(tu)$ pour $u \in C_0^s(U)$ montre l'existence de la limite en 0 de la fonction $t \to \varphi(tu)/t$. Posons donc :

$$C_0(\varphi) : C_0^s(U) \to \mathbb{R}^{n-k} \ , \ C_0(\varphi)(u) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(tu)}{t} \ .$$

On a : $\dim(C_0(\Gamma)\backslash C_0^s(\Gamma)) < k$ et le graphe de $C_0(\varphi)$ est contenu dans $C_0(\Gamma)$. Il suffit donc pour conclure de vérifier que $C_0^s(\Gamma)$ est contenu dans le graphe de $C_0(\varphi)$.

Soit donc $(u,v) \in C_0^s(\Gamma)$ de norme 1, alors $u \in C_0^s(U)$ et il existe un arc analytique $\gamma :]-1,+1[\to \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$, $\gamma(t) = (\alpha(t),\beta(t))$ tel que :

$$\gamma(0) = (0,0) \ , \ \beta(t) = \varphi(\alpha(t)) \text{ pour } t > 0 \ , \ (u,v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \ .$$

Soient $\lambda > 0$ et $r > 0$ tels que $]0, \lambda[.B(u, r) \subset U$. On a :

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\alpha(t)}{\|\gamma(t)\|} = u \ , \ \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi(\alpha(t))}{\|\gamma(t)\|} = v$$

donc pour t petit, $\alpha(t)$ est dans le cône convexe $]0, \lambda[\cdot B(u, r)$, d'où :

$$\left\| \frac{\varphi(\alpha(t))}{\|\gamma(t)\|} - \frac{\varphi(\|\gamma(t)\| \cdot u)}{\|\gamma(t)\|} \right\| \leq \varepsilon \left\| \frac{\alpha(t)}{\|\gamma(t)\|} - u \right\|$$

d'où l'égalité $v = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{\varphi(\|\gamma(t)\| u)}{\|\gamma(t)\|} = C_0(\varphi) u.$

Ce qui achève la démonstration de 3.6.

3.8. THÉORÈME. — *Soit Y un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Pour $y \in \overline{Y}$ désignons par $C_1, \ldots, C_\ell$ les composantes connexes du cône tangent pur à Y en y, et par n_j la multiplicité de Y en y le long de C_j.*

Alors on a :

$$\theta_k(Y, y) = \sum_{j=1}^{\ell} n_j \frac{\mathrm{vol}_k(C_j \cap B(0,1))}{\sigma^k} \ .$$

Démonstration. — Soit donc $y \in \overline{Y}$ et considérons la décomposition de Y en morceaux $\varepsilon-$analytiques $\Gamma_1^\varepsilon, \ldots, \Gamma_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$. Les Γ_i^ε sont des graphes de fonctions $\varphi_i^\varepsilon : U_i^\varepsilon \to E_i^{\varepsilon\perp}$ à domaines U_i^ε ouverts sous-analytiques de $E_i^\varepsilon \in G_k(\mathbb{R}^n)$. On peut supposer que pour tout i on a $y = 0 \in \overline{\Gamma_i^\varepsilon}$ et, d'après 1.8, que $\lim\limits_0 \varphi_i^\varepsilon = 0$.

D'après 2.1, 2.4 et 3.6 on a alors pour tout i :

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^k} \theta_k(U_i^\varepsilon, 0) \leq \theta_k(\Gamma_i^\varepsilon, 0) \leq (1+\varepsilon)^k \theta_k(U_i^\varepsilon, 0)$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^k} \theta_k(C_0^s(U_i^\varepsilon), 0) \leq \theta_k(C_0(\Gamma_i^\varepsilon), 0) \leq (1+\varepsilon)^k \theta_k(C_0^s(U_i^\varepsilon), 0)$$

$$\theta_k(C_0^s(U_i^\varepsilon), 0) = \theta_k(C_0(U_i^\varepsilon), 0) = \theta_k(U_i^\varepsilon, 0)$$

d'où

$$(*) \qquad \frac{1}{(1+\varepsilon)^{2k}} \theta_k(C_0^s(\Gamma_i^\varepsilon), 0) \leq \theta_k(\Gamma_i^\varepsilon, 0) \leq (1+\varepsilon)^{2k} \theta_k(C_0^s(\Gamma_i^\varepsilon), 0) \ .$$

Soit alors $\mathcal{S}$ une stratification de $C_0^s(Y) \cap \mathbf{S}_{n-1}$ compatible à $C_1 \cap \mathbf{S}_{n-1} \cdots C_\ell \cap \mathbf{S}_{n-1}$ et à $C_0^s(\Gamma_1^\varepsilon) \cap \mathbf{S}_{n-1} \cdots C_0^s(\Gamma_{N(\varepsilon)}^\varepsilon) \cap \mathbf{S}_{n-1}$.

Pour tout i, Γ_i^ε a la multiplicité 1 en 0 le long de $C_0^s(\Gamma_i^\varepsilon)$. Donc, si $T \in \mathcal{S}$ est une strate de dimension $k-1$ contenue dans C_j, par définition de la multiplicité, l'entier n_j est le nombre de morceaux Γ_i^ε tels que T est contenu dans $C^\varepsilon(\Gamma_i^\varepsilon)$. Il en résulte que :

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mathrm{vol}_{k-1}(C_0^s(\Gamma_i^\varepsilon)\cap \mathbf{S}_{n-1}) = \sum_{\substack{T\in\mathcal{S}\\ T\subset C_j}} n_j \,\mathrm{vol}_{k-1}(T) = \sum_{j=1}^{\ell} n_j \,\mathrm{vol}_{k-1}(C_j\cap \mathbf{S}_{n-1}).$$

Le théorème se déduit alors de $(*)$ et de l'égalité :

$$\theta_k(Y,0) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \theta_k(\Gamma_i^\varepsilon,0)\ .$$

Les entiers $n_i,\dots,n_\ell$ du théorème 3.8 ne dépendent pas du choix des coordonnées, plus précisément on a :

3.9. Proposition. — *Soit φ un isomorphisme analytique d'un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0)=0$. Soit Y un ensemble sous-analytique de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. Avec les notations de 3.8 pour $y=0$ on a alors :*

i) *Les composantes connexes du cône tangent pur à $\varphi(Y)$ en 0 sont les ensembles $D\varphi_0(C_1)\cdots D\varphi_0(C_\ell)$.*

ii) *La multiplicité de $\varphi(Y)$ en 0 le long de $D\varphi_0(C_j)$ vaut n_j.*

En effet, soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un isomorphisme analytique de Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 sur l'ouvert $\varphi(\Omega)$ tel que $\varphi(0)=0$, et soit $\widetilde{\Omega} = \{(t,p) \in \mathbb{R}\times\mathbf{S}_{n-1} \mid tp\in\Omega\}$. Alors l'application $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}\times\mathbf{S}_{n-1}$ définie par :

$$\widetilde{\varphi}(t,p) = \Big(\frac{t}{|t|}\|\varphi(tp)\|\ ,\ \frac{t\varphi(tp)}{\|t\varphi(tp)\|}\Big) \text{ pour } t\neq 0$$

et

$$\widetilde{\varphi}(0,p) = \Big(0, \frac{D\varphi_0(\varphi)}{\|D\varphi_0(p)\|}\Big)$$

est un isomorphisme analytique.

(L'analycité de $\widetilde{\varphi}$ s'obtient en complexifiant φ en $\varphi^{\mathbb{C}}$ et en remarquant que l'application $\widetilde{\varphi}$ définie dans $\{(z,\delta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{P}_{n-1} \mid z\in\delta\}$ par :

$$\widetilde{\varphi}(z,\delta) = (\varphi^{\mathbb{C}}(z), \mathbb{C}\cdot\varphi^{\mathbb{C}}(z)) \text{ pour } z\neq 0$$
$$\widetilde{\varphi}(0,\delta) = (0, D\varphi_0^{\mathbb{C}}(\delta))$$

est holomorphe car continue partout et holomorphe pour $z\neq 0$).

La proposition 3.9 résulte alors du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Omega} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \mathbb{R} \times \mathbf{S}_{n-1} \\ {\scriptstyle e_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle e_n} \\ \Omega & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \end{array} \qquad \text{où } \ e_n(t,p) = tp \ .$$

3.10. *Remarque.* — Soit Y un ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^n$ de dimension complexe pure k . Alors $C_0(Y)$ est un ensemble algébrique complexe (*cf.* [W]). Soit $T_1, \dots, T_r$ ses composantes irréductibles et soit $m_1 \cdots m_r$ les multiplicités définies par Thie ([Th], th. 4.10). Soit C_i une des composantes connexes du cône tangent pur en 0 à Y et soit n_i la multiplicité de Y en 0 le long de C_i. Il existe un indice $j(i)$ tel que $C_i \subset T_{j(i)}$, et on a $n_i = m_{j(i)}$. Donc $\{m_j\} = \{n_i\}$.

En effet, d'après la description locale d'un ensemble analytique, il existe un changement φ de coordonnées et il existe $C > 0$ tels que l'image par φ du germe de Y en 0 est contenue dans

$$\{(z', z'') \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \mid \|z''\| \leq C\|z'\|\} \ .$$

Les $T'_j = D\varphi_0(T_j)$ sont les composantes irréductibles de $C_0(\varphi(Y))$. Pour $i \in \{1 \cdots \ell\}$, $C'_i = D\varphi_0(C_i)$ est contenu dans un $T'_{j(i)}$. Soit π : $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \to \mathbb{C}^k$ la projection canonique. Sur $Y' = \varphi(Y)$, π est un revêtement ramifié. Soit d une droite générique dans $\pi(T'_j)$, alors $T'_j \cap \pi^{-1}(d)$ est réunion de droites $d_1 \cdots d_\nu$ et $Y' \cap \pi^{-1}(d)$ est réunion de courbes $L_1 \cdots L_\lambda, L_{\lambda+1} \cdots L_\mu$, où $L_i \cdots L_\lambda$ désigne les courbes admettant pour tangente en 0 l'une des droites $d_1 \cdots d_\nu$. Il résulte de la définition de Thie que m_j est le nombre de feuillets dans le revêtement ramifié

$$\pi : L_1 \cup \cdots \cup L_\lambda \to d$$

ce qui montre, d'après 3.9, que $n_i = m_{j(i)}$.

4. Variation de la densité.

On montre ici que si Y est un ensemble sous-analytique de dimension k, alors $2\theta_k(Y, y)$ est un entier pour y en dehors d'un ensemble sous-analytique de dimension au plus $k - 2$. Nous donnons un exemple où l'application $y \to \theta_k(Y, y)$ n'est pas sous-analytique.

4.1. PROPOSITION.

1) *Soit Y un ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. Il existe un ensemble sous-analytique Σ de dimension au plus $k-2$ tel que :*

$$2\theta_k(Y,y) \in \mathbb{N} \ , \ \forall y \in \overline{Y}\backslash\Sigma \ .$$

2) *Si de plus y est un sous-ensemble analytique réel de $\mathbb{R}^n$ alors :*

$$\theta_k(Y,y) \in \mathbb{N} \ , \ \forall y \in Y\backslash\Sigma \ .$$

Démonstration. — Si y est un point régulier de Y ou un point tel que $\dim_y Y < k$ alors $\theta_k(Y,y)$ vaut 1 ou 0. Si y est un point de reliure de Y (*cf.* 3.1) alors $2\theta_k(Y,y)$ est le nombre de variétés C^1 à bord intervenant dans la définition d'un point de reliure. 4.1,1) résulte donc de la proposition 3.2. Pour montrer 4.1,2) il suffit de se placer en un point de reliure. En ce cas le nombre de variétés C^1 à bord est pair car la trace de Y sur l'orthogonal en y du tangent à la reliure de Y est, au voisinage de y, un ensemble analytique réel de dimension 1.

Soit Y un ensemble sous-analytique de dimension k, il résulte du théorème 3.8 que $\theta_k(Y,y) = 0$ si et seulement si $\dim C_y(Y) < k$. Ce qui permet de montrer que $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \theta_k(Y,y) = 0\}$ est sous-analytique. Par contre, pour $c > 0$, en général les ensembles E_c définis par

$$E_c = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \theta_k(Y,y)\sigma c\}$$

(où σ désigne l'un des symboles $<, \leq, =, \geq$ ou $>$) ne sont pas sous-analytiques comme le montre l'exemple suivant :

4.2. *Exemple.* — Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on pose $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ et $\lambda = r(r+z)$. *Soit Y le semi-algébrique de dimension 5 dans $\mathbb{R}^5$ défini par :*

$$Y = \left\{(x,y,z,s,t) \in \mathbb{R}^5_+ \mid t\lambda \leq x^2 \leq \lambda,\ 0 \leq xy \leq 2xsr + \lambda,\ s \leq \frac{1}{2},\ t \leq \frac{1}{4}\right\}.$$

Alors on a pour $0 \leq s \leq 1/2$ et $0 < t \leq 1/4$:

$$\theta_5(Y,(0,0,0,s,t)) = \frac{1}{32\pi}(s - st - t\operatorname{Log} t) \ .$$

La fonction $t \to t\operatorname{Log} t$ n'est pas sous-analytique donc les ensembles E_c ne sont pas sous-analytiques (pour $0 < c < 1/64\pi$).

Le calcul de la densité de Y résulte des remarques suivantes :

$$C_{(0,0,0,s,t)}(Y) = Y_{s,t} \times ([0,+\infty[)^2$$

avec

$$Y_{s,t} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z,s,t) \in Y\}$$

d'où :

$$\theta_5(Y;(0,0,0,s,t)) = \frac{1}{4} \cdot \theta_3(Y_{s,t};(0,0,0)) \ .$$

Pour le cône $Y_{s,t}$ on a

$$\theta_3(Y_{s,t};(0,0,0)) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{vol}_2(Y_{s,t} \cap \mathbf{S}_2) \ .$$

Or

$$Y_{s,t} \cap \mathbf{S}_2 = \varphi(A_{s,t})$$

où $\varphi : \{z : \mathbb{R}^2 \mid \|z\|^2 < 2\} \to \mathbf{S}_2$ est définie par :

$$\varphi(z) = \left(z\left(1 - \frac{1}{4}\|z\|^2\right)^{1/2}, \frac{1}{2}\left(2 - \|z\|^2\right)\right)$$

et où

$$A_{s,t} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{t} \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq sx + \frac{t}{x}\right\} .$$

φ conserve les aires donc :

$$\theta_5(Y(0,0,0,s,t)) = \frac{1}{16\pi} \operatorname{vol}_2(A_{s,t}) = \frac{1}{32\pi}(s - st - t \operatorname{Log} t) \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[BM] E. Bierstone & P. Milman, Semi-analytic and sub-analytic sets, Publications I.H.E.S., n° 67 (1988), 5–42.

[D] J.P. Demailly, Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité, Acta Math., 159 (1987), 153–169.

[DLS1] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz & J. Stasica, Sur le théorème du complémentaire pour les ensembles sous-analytiques, Bull. Acad. Sci., Pol., XXVII, n° 7-8 (1979), 537–539.

[DLS2] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz & J. Stasica, Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques, Bull. Acad. Sci., Pol., XXVII, n° 7-8 (1979), 529–536.

[DW] Z. Denkowska & W. Wachta, Sur la sous-analyticité de l'application tangente, Bull. Acad. Sci. Pol. XXX, n° 7-8 (1982), 329–331.

[F] H. Federer, Geometric measure theory, Springer-Verlag, New-York, 1969.

[G] A.M. Gabrielov, Projections of semi-analytic sets, Funct. Ana. Appl., 2 (1968), 282–291.

[H] H. Hironaka, Sub-analytic sets, number theory, algebraic geometry and commutative algebra, Kinokuniya, Tokyo (1973), 453–493.

[K] K. KURDYKA, Points réguliers d'un sous-analytique, Annales de l'Institut Fourier, 38-1 (1988), 133–156.

[Le] P. LELONG, Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 239–262.

[Lo1] S. ŁOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, Preprint I.H.E.S., 1965.

[Lo2] S. ŁOJASIEWICZ, Sur la semi-analyticité de l'application tangente, Bull. Acad. Sci. Pol. XXVII, n° 7-8 (1979), 525–527.

[P1] W. PAWLUCKI, Quasi-regular boundary and Stokes formula for a sub-analytic leaf, Lecture Notes in Math. n° 1165.

[P2] W. PAWLUCKI, Le théorème de Puiseux pour une application sous- analytique, Bull. Pol. Acad. Sci. (Math), Vol.32, n° 9-10 (1984), 555–560.

[R] G. RABY, Paramétrix et noyaux, formes méromorphes, ensembles et fonctions sous-analytiques, Thèse, Poitiers, 1986.

[S] J. STASICA, Whitney property of sub-analytic sets, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Mat. Zesz 23 DCXXIII (1982), 211–221.

[Ta] M. TAMM, Sub-analytic sets in the calculus of variations, Acta Math., 146 (1981), 167–199.

[Th] P. THIE, The Lelong number of a point of a complex analytic set, Math. Annalen, 172 (1967), 269–312.

[V] J.L. VERDIER, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones Math., 36 (1976), 295–312.

[W] H. WHITNEY, Tangents to analytic variety, Ann. Math. (2), 81 (1965), 496–549.

Manuscrit reçu le 21 juin 1988,
révisé le 19 avril 1989.

K. KURDYKA,
Institute of Mathematics
Jagellonian University
Reymonta 4
PL – 30059 Krakow (Poland)
&
G. RABY,
U.R.A. D1322 "Groupes de Lie et Géométrie"
Département de Mathématiques
Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex (France).