Annales de l'institut Fourier

Jean-Yves Chemin

Régularité de la solution d'un problème de Cauchy fortement non linéaire à données singulières en un point

Annales de l'institut Fourier, tome 39, n° 1 (1989), p. 101-121

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_1_101_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 1 (1989), 101-121

RÉGULARITÉ DE LA SOLUTION D'UN PROBLÈME DE CAUCHY FORTEMENT NON LINÉAIRE À DONNÉES SINGULIÈRES EN UN POINT

par Jean-Yves CHEMIN

0. Introduction.

Soit u une solution $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ de l'équation

$$(E) \qquad F(x,u,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq 2} = 0 \quad u \text{ réelle}, \quad s \text{ assez grand },$$

F étant une fonction C^∞ de ses arguments $(x,u,\dots,u_\alpha)_{|\alpha|\leq 2}$, et Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dont on note $x = (x_0,x_1,\dots,x_{n-1})\cdot = (t,x')$ un point courant. Sous l'hypothèse que les deux premières traces de u sur $H = (t = 0) \cap \Omega$, notées respectivement $\gamma_0 u$ et $\gamma_1 u$ soient très régulières en dehors de 0 , et que $p_2(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=2} \partial F/\partial u_\alpha \cdot \xi^\alpha$ soit strictement hyperbolique par rapport à $\tau = \xi_0$, on cherche à décrire la régularité de u près de H .

J.-M. Bony a démontré dans [5] que les singularités de u se propageaient, jusqu'à une certaine limite, le long des bicaractéristiques nulles de p_2 , c'est-à-dire des courbes de $T^*\Omega$ solutions de

$$\frac{dx}{ds} = \text{grad}_\xi\, p_2(x(s),\xi)_{|\xi(s)} \ ; \ \ \frac{d\xi}{ds} = -\,\text{grad}_x\, p(x,\xi(s))_{|x(s)}$$

avec $x(0) = x_0$, $\xi(0) = \xi_0$ et $p_2(x_0,\xi_0) = 0$.

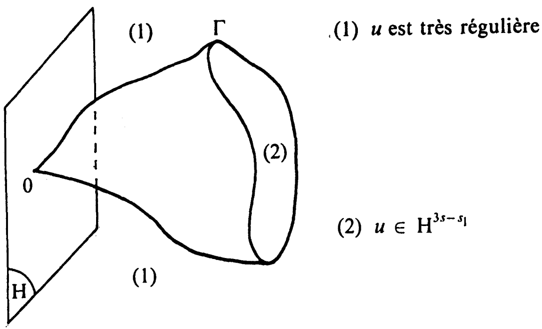
Mots-clés : Equation aux dérivées partielles – Non linéaire – Singularités conormales – Calcul paradifférentiel.
Classification A.M.S. : 35.

L'ensemble suivant joue donc un rôle crucial.

DÉFINITION 0.1. — *Γ désigne la projection sur Ω de la réunion des bicaractéristiques nulles passant par 0 .*

On appellera, par abus, Γ le cône d'onde issu de 0 .

On sait, d'après les résultats de M. Sablé-Tougeron démontrés dans [14], d'une part, et d'autre part de ceux démontrés par l'auteur dans [3] et [9] que, localement près de H , la régularité de u est la suivante :



On cherche à s'affranchir de la limitation à $3s - s_1$ concernant la zone (2), c'est-à-dire à obtenir un comportement des singularités analogue au cas linéaire.

Lorsque $n = 2$, H. Bahouri et B. Dehman dans [3], P. Godin dans [10], et l'auteur dans [7], ont mis en évidence le comportement linéaire des singularités de u : u est très régulière en dehors de Γ qui est, dans ce cas, la réunion de deux courbes.

Nous supposerons désormais $n \geq 3$. Dans ce cas, M. Beals prouve, dans [4], l'existence d'une solution u de l'équation

$$\partial_t^2 u - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{x_i}^2 u = \beta u^3, \text{avec } \beta \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{n-1}), \text{ telle que, pour } i \in \{0,1\},$$

$\gamma_i u$ soit H^{s-i} , et C^∞ en dehors de l'origine, et telle que u ne soit pas H^{3s+s_2} dans la zone (2).

Il convient donc de faire des hypothèses sur la nature de la singularité des traces de u si l'on veut obtenir un comportement de type linéaire. L'hypothèse que nous ferons ici est que les traces sont conormales par rapport à 0 . Plus précisément :

DÉFINITION 0.2. — *Soit Σ une sous-variété lisse d'un ouvert Ω' de $\mathbf{R}^n$; on dit qu'une distribution H^s est conormale (d'ordre k) par rapport à Σ si elle appartient à l'ensemble $H^{s,k}(\Sigma)$ des v dans $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ tels que, si $z_1, \dots, z_\ell$ sont $\ell \le k$ champs de vecteurs tangents à Σ , à coefficients C^∞ , alors $z_1(x,D)\dots z_\ell(x,D)v \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega')$.*

Remarques. — i) Si $v \in H^{s,k}(\Sigma)$, alors le front d'onde H^{s+k} de v est inclus dans $N^*\Sigma$, le conormal à Σ , en particulier, $v \in H^{s+k}$ en dehors de Σ .

ii) Si $\Sigma = \{0\}$, $H^{s,k}(\Sigma)$ est l'ensemble des v telles que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\alpha| \le k$, $x^\alpha v \in H^{s+|\alpha|}$.

Soit d un entier valant 1 si l'équation (E) est quasi-linéaire et 0 sinon, on se propose de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Soit u solution $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ de (E), u réelle, $s > \frac{n}{2} + 8 - d$, si, pour $i \in \{0,1\}$, $\gamma_i u \in H^{s-i,\infty}(0)$, alors, localement près de 0 , on a :*

i) $\Gamma \setminus \{0\}$ *est une hypersurface lisse*

ii) $u \in H^{s,\infty}(\Gamma \setminus \{0\})$.

Ce théorème a été démontré par N. Ritter dans [13], lorsque l'équation (E) est semi-linéaire, pour $s > \frac{n}{2} + 1$. L'idée essentielle de la démonstration dans ce cadre est de redresser le cône d'onde Γ en le cône $\Gamma_0 = \{(t^2, x')/t^2 = |x'|^2\}$ par l'application exponentielle associée à la gerbe des bicaractéristiques, qui est un C^∞ difféomorphisme. Cette technique est typique de l'ordre 2 .

Dans le cadre non semi-linéaire, à l'ordre 2 , la difficulté provient du fait que l'application exponentielle est peu régulière, puisqu'elle dépend de la solution. L'outil permettant d'éviter cet écueil est l'étude de l'action itérée de champs de vecteurs peu réguliers, qui a été faite dans [2], pour démontrer un théorème analogue au théorème A, dans le cas où les traces sont conormales par rapport à une hypersurface C^∞ de H , et par l'auteur dans [7], pour traiter le cas de la dimension 2 ou de l'ordre 1 .

Lorsque les $\gamma_j u$ sont $H^{s-j,k}(0)$ pour $j \in \{0,1\}$, on a le théorème suivant :

THÉORÈME B. — *Soit u solution réelle $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $s > \frac{n}{2} + 8 - d$ de*

(E) ; si, pour $j \in \{0,1\}$, $\gamma_j u \in H^{s-j,k}(0)$, alors

i) *le front d'onde H^{s+k} de u est inclus dans $N^*(\Gamma \setminus \{0\}) \cup N^*(0)$.*

ii) *De plus, $\Gamma \setminus \{0\}$ est une hypersurface $C^{\rho'-1+k}$, pour tout $\rho' < \rho$.*

Cet énoncé sera précisé (voir Théorème 1.4), u ayant en effet une régularité "conormale" par rapport à l'hypersurface peu régulière $\Gamma \setminus \{0\}$.

Le plan de ce travail est le suivant :

• dans le premier paragraphe, on donnera une construction abstraite d'espaces de distributions associés à un C^∞ module de champs de vecteurs peu réguliers généralisant celles faites dans [2] et [7], ce qui permet l'énoncé d'un théorème précisant le Théorème B et impliquant le Théorème A;

• dans le deuxième, on appliquera cette construction au cas du module des champs de vecteurs tangents à $\Gamma \setminus \{0\}$, nuls en 0 , grâce à une étude précise de la régularité de l'exponentielle;

• le troisième enfin, est essentiellement consacré à l'étude des traces sur H des espaces $C^{\sigma,k}(\Gamma)$ et $H^{\sigma,k}(\Gamma)$ définis en 2.2.

De plus, dans tout ce travail, nous utiliserons les notations et conventions suivantes :

• les espaces H^s et C^r sont, sauf mention expresse du contraire supposés locaux; on supposera que r n'est pas entier; C^k_+(resp. C^k_-) désigne alors la réunion pour $r > k$ des C^r (resp. l'intersection pour $r < k$). On prendra la même notation pour les espaces $C^{r,\ell}(\mathcal{M})$ définis en (1.3).

De plus, par module, on entendra toujours C^∞ module; lorsque A, B, C sont trois modules tels qu'il existe une application bilinéaire Φ de $A \times B$ dans C , $A \cdot B$ désignera le sous-module de C engendré par l'image de Φ .

Enfin, si φ désigne un C^1 difféomorphisme d'un ouvert Ω sur un ouvert $\widetilde{\Omega}$ de $\mathbf{R}^n$, si a est une fonction sur le cotangent de Ω noté $T^*\Omega$, alors $\varphi_* a$ est la fonction sur $T^*\widetilde{\Omega}$ définie par

$$\varphi_* a(x,\xi) = a(\varphi^{-1}(x); {}^t(d\varphi^{-1}(x)) \cdot \xi) .$$

1. Espaces associés à un module de champs de vecteurs peu réguliers.

On cherche à définir des espaces associés à un module de champs de vecteurs peu réguliers. Nous commencerons par quelques rappels sur le paraproduit, évidemment nécessaire à une telle définition. Ensuite, nous supposerons le module de champs de vecteurs de type fini, et nous ferons la construction dans ce cas. Mais, le module des champs de vecteurs C^r , $r > 1$, tangents à une sous-variété n'étant pas de type fini, on exposera une construction qui permet de remplacer l'hypothèse de type fini, par une beaucoup plus faible, stable par restriction et par transport par un difféomorphisme suffisamment régulier. On appliquera ceci pour définir les espaces de distributions conormales par rapport à une sous-variété peu régulière.

1.1. Notion de paraproduit précisé.

DÉFINITION 1.1. — *Une fonction $T \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n};\mathbf{R})$ telle que*

i) $\operatorname{Supp} T \subset \{(\xi,\eta)/|\xi| \le \varepsilon|\eta|\}$

ii) $\operatorname{Supp}(1-T) \cap {}^cB(0,C) \subset \{|\xi| \ge \varepsilon_1|\eta|\}$

($\varepsilon, \varepsilon_1$ étant deux réels tels que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon < 1$).

iii) *Pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\partial^\alpha T(\xi,\eta)| \le C_\alpha(1+|\xi,\eta|)^{-|\alpha|}$ étant supposé donné, on appelle paraproduit et on note encore T l'opérateur défini sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ par*

$$T_v w(x) = \iint e^{ix(\xi+\eta)} T(\xi,\eta)\hat{v}(\xi)\widehat{w}(\eta)d\xi d\eta \ .$$

Cet opérateur se prolonge continûment en un opérateur sur $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$. Pour cela, ainsi que les propriétés opératoires de T dans les espaces H^σ et C^σ , et l'influence d'un changement de fonction T , nous renvoyons à [5].

On démontre dans [7] que, si v et w sont deux distributions à support compact, alors le support singulier de $T_v w$ est inclus dans l'intersection du support de v et du support singulier de w . Il résulte de cette propriété que l'on peut localiser T sur un ouvert Ω modulo un opérateur infiniment régularisant. Plus précisément, si $(\varphi_j, w_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité C^∞ de l'ouvert Ω , et $(\chi_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite de fonction C^∞ sur Ω telle que $\operatorname{Supp}\chi_j \subset w_j$ et que χ_j vaille 1 près de $\operatorname{Supp}\varphi_j$, on note encore T l'opérateur défini par $T_v w = \sum_{j\in\mathbf{N}} \chi_j T_{\chi_j v}\varphi_j w$, qui bien sûr, opère de $\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le contrôle du support singulier de $T_{\chi_j v}\varphi_j w$ assure que cette localisation est, modulo un opérateur envoyant $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$, indépendante des χ_j, φ_j, w_j choisis.

Soient z un champ de vecteurs C^r , $r > 1$ sur Ω' , ouvert de $\mathbf{R}^n$, et

T un paraproduit sur $\mathbf{R}^n$; si $z(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\xi_i$ on note T_z l'opérateur défini, modulo un opérateur infiniment régularisant, par :

$$T_z v = \sum_{i=1}^{n} T_{a_i} D_i v \ .$$

1.2. Espaces associés à un module de type fini.

DÉFINITION 1.2. — *Soient $\mathcal{Z}$ un module de type fini de champs de vecteurs C^r , $r > 1$, et T un paraproduit sur $\mathbf{R}^n$; $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$* (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$) *désigne l'ensemble des v dans H^σ* (resp. C^σ) *tels que si $z_1, \ldots, z_\ell$ sont $\ell \leq k$ champs de vecteurs de $\mathcal{Z}$, alors $T_{z_1} \ldots T_{z_\ell} v$ est encore dans H^σ* (resp. C^σ) .

Les espaces ainsi définis sont étudiés sous l'hypothèse suivante :

$(\widetilde{H}_k)$: les coefficients des éléments de $\mathcal{Z}$ appartiennent à $C^{r,k}(\mathcal{Z})$.

On va maintenant donner une liste de propriétés vérifiées sous l'hypothèse $(\widetilde{H}_{k-1})$. Pour leur démonstration, deux voies sont possibles : soit vérifier par récurrence que ces espaces sont les mêmes que ceux introduits par S. Alinhac dans [2], soit vérifier que l'on peut étendre les résultats de [7] au cas de plusieurs champs de vecteurs, ce qui n'est qu'une modification formelle mineure; nous laissons ces vérifications au lecteur.

(1.2.1). — *Les espaces $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ et $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ sont indépendants de T .*

Cette propriété est indispensable pour donner un sens géométrique à ces espaces; d'autre part, elle assure que l'hypothèse $(\widetilde{H}_{k-1})$ est en fait indépendante de T .

(1.2.2). — *Si $r > 0$, alors $H^{\frac{n}{2}+\sigma,k}(\mathcal{Z})$ et $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ sont des algèbres, de plus, si $v \in C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$* (resp. $H^{\frac{n}{2}+\sigma,k}(\mathcal{Z})$) *, à valeurs réelles, alors, pour toute fonction $f \in C^\infty$, on a :*

$$f(v) - T_{f'(v)} \cdot v \in C^{2\sigma,k}(\mathcal{Z}) \ (\text{resp.}\ H^{\frac{n}{2}+2\sigma,k}(\mathcal{Z})) \ .$$

Ceci est nécessaire pour traiter les équations non semi linéaires par les techniques du calcul paradifférentiel, que l'on peut construire dans ce cadre. En effet, on a :

(1.2.3). — *Soit $r_0 \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$, on note $\Sigma^m_{r_0,k}(\mathcal{Z})$ l'ensemble des $a(x,\xi)$ somme, pour j variant de 0 à $[r_0]$, de $a_j(x,\xi)$ homogène de* *degré* $m-j$, C^∞ *sur* $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ *en* ξ , *et* $C^{r_0-j,k}(\mathcal{Z})$ *en* x ; *on peut alors définir un opérateur* T_a , *opérateur paradifférentiel de symbole* a , *envoyant* $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$) *dans* $H^{\sigma-m,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma-m,k}(\mathcal{Z})$) ; *cet opérateur est défini modulo un opérateur* r_0*–régularisant, i.e. envoyant* $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$) *dans* $H^{\sigma-m+r_0,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma-m+r_0,k}(\mathcal{Z})$) .

On dispose d'un bon calcul symbolique sur ces opérateurs, résumé par la relation suivante :

(1.2.4). — *Si* $a_i \in \Sigma^{m_i}_{r_0,k}$ *pour* $i \in \{1,2\}$, *alors, pour tout* σ , $T_{a_1} \circ T_{a_2} - T_{a_1 \sharp a_2}$ *envoie* $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$) *dans* $H^{\sigma-m_1-m_2+r_0,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma-m_1-m_2+r_0,k}(\mathcal{Z})$) *avec* $a_1 \sharp a_2 = \displaystyle\sum_{i+j+[\alpha]\leq[r_0]} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_{1,i} D_x^\alpha a_{2,j}$.

Formellement, on a remplacé, dans la construction du calcul paradifférentiel de Bony (voir [5]), les espaces H^σ et C^σ par $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ et $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$.

Lorsque σ varie dans une certaine plage, on peut définir les espaces $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ et $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ à l'aide de l'opérance classique des champs de vecteurs, ce qui sera fort commode pour les problèmes de trace et de transport par difféomorphisme.

(1.2.5). — *Si* $\sigma_0 > 0$, $\sigma \in]0,\sigma_0]$, *et* $a \in C^{\sigma_0,k}(\mathcal{Z})$, *alors* $T_a \cdot - a\cdot$ *envoie* $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$) *dans* $H^{\sigma_0,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma_0,k}(\mathcal{Z})$) .

Il en résulte que, pour $\sigma \in]0,r]$, $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$) est aussi l'ensemble des v dans H^σ (resp. C^σ) tels que si $z_1,\dots,z_\ell$ sont $\ell \leq k$ champs de vecteurs de $\mathcal{Z}$, alors $z_1(x,D)\dots z_\ell(x,D)u$ est encore dans H^σ (resp. C^σ) .

Enfin, on peut préciser le front d'onde d'un élément de $H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ ou de $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$:

(1.2.6). — *Pour tout* $(x;\xi) \in T^*\Omega'$ *tel qu'il existe un élément* z *de* $\mathcal{Z}$ *tel que* $z(x;\xi) \neq 0$, *si* $v \in H^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$ (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{Z})$) *alors* v *est microlocalement* $H^{\sigma+k}$ (resp. $C^{\sigma+k}$) *en* $(x;\xi)$.

1.3. Espaces de distributions associés à un module de champs peu réguliers.

DÉFINITION 1.3. — *Soient* $\lambda \in \mathbf{N}^*$ *et* $\mathcal{M}$ *un module de champs de* *vecteurs* C_+^λ , *et* T *un paraproduit sur* $\mathbf{R}^n$. *On définit par récurrence les suites* $\mathcal{M}_k, H^{\sigma,k}(\mathcal{M})$ *et* $C^{\sigma,k}(\mathcal{M})$ *comme suit :*

- $\mathcal{M}_{-1} = \mathcal{M}$, $H^{\sigma,0}(\mathcal{M}) = H^\sigma$, $C^{\sigma,0}(\mathcal{M}) = C^\sigma$.
- $\mathcal{M}_k$ *est l'ensemble des champs à coefficients* $C_+^{\lambda,k}(\mathcal{M})$ *de* $\mathcal{M}_{k-1}$.
- $H^{\sigma,k+1}(\mathcal{M})$ (resp. $C^{\sigma,k+1}(\mathcal{M})$) *est l'ensemble des* v *de* $H^{\sigma,k}(\mathcal{M})$ (resp. $C^{\sigma,k+1}(\mathcal{M})$) *tel que, pour tout* $m \in \mathcal{M}_k$, $T_m v \in H^{\sigma,k}(\mathcal{M})$ (resp. $C^{\sigma,k}(\mathcal{M})$) .

Remarquons que les suites ainsi définies ne dépendent que de $\mathcal{M}$ et de T . Pour obtenir d'agréables propriétés sur ces espaces, il convient de faire sur le module $\mathcal{M}$ l'hypothèse suivante, que l'on désignera dans toute la suite par (H_k) et qui englobe l'hypothèse $(\widetilde{H}_k)$ et une généralisation de l'hypothèse (TF) de [2] :

il existe un sous-module $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{M}_k$ de type fini tel que l'on ait, pour tout $\ell \leq k$, $\mathcal{M}_\ell \subset C_+^{0,\ell}(\mathcal{M}) \cdot \mathcal{Z}$.

Remarquons que, vu que $\mathcal{Z}$ est un sous-module de type fini de $\mathcal{M}_k$, les coefficients des champs de vecteurs de $\mathcal{Z}$ sont C^r , avec $r > 1$. De plus, comme $\mathcal{Z}$ est inclus dans $\mathcal{M}_k$ et $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M})$ dans $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{Z})$ pour tout $\ell \leq k+1$, les coefficients de Z sont dans $C^{r,k}(\mathcal{M})$ et donc, les résultats de la section 1.2 s'appliquent aux $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M})$ et $H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M})$ pour $\ell \leq k+1$. D'où l'intérêt de la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3. — *Sous l'hypothèse* (H_k) , *on a, pour tout* $\ell \leq k+1$, $H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}) = H^{\sigma,\ell}(\mathcal{Z})$ *et* $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}) = H^{\sigma,\ell}(\mathcal{Z})$.

Remarque 1.3. — Il résulte de (1.2.1) que les espaces $H^{\sigma,k}(\mathcal{M})$ et $C^{\sigma,k}(\mathcal{M})$ sont indépendants du paraproduit utilisé pour les définir, ce qui assure par là même que l'hypothèse (H_k) n'est liée qu'à $\mathcal{M}$.

Démonstration de la Proposition 1.3. — On procède bien sûr par récurrence. Supposons connue la proposition pour $j \leq k$. Soient $v \in H^{\sigma,j+1}(\mathcal{Z})$ et $m \in \mathcal{M}_{j+1}$; d'après (H_k) , $m(x,\xi) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) z_i(x,\xi)$ avec $a_i \in C^{\tilde{r},j}(\mathcal{M})$, $\tilde{r} > 0$, et $z_i \in \mathcal{Z}$. D'après (1.2.3), (1.2.4) et l'hypothèse de récurrence, on a $T_m v \equiv \sum_{i=1}^{N} T_{a_i} T_{z_i} v(H^{\sigma,j}(\mathcal{M}))$ et alors $T_m v \in H^{\sigma,j}(\mathcal{M})$; d'où la proposition, vu que la démonstration pour les classes de Hölder est analogue.

1.4. Transport des espaces $C^{\sigma,k}(\mathcal{M})$. Cas d'une sous-variété peu régulière.

On va maintenant mettre en évidence une certaine invariance de l'hypothèse (H_k) sous l'action de difféomorphisme suffisamment régulier.

Plus précisément, soit Ω et $\widetilde{\Omega}$ deux ouverts de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}$ un module de champs de vecteurs C^1_+ sur Ω , vérifiant (H_k) , et φ un difféomorphisme $C^{r+1,k}(\mathcal{M})$ de Ω sur $\widetilde{\Omega}$, $r > 1$; posons $\varphi_*\mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}}$. On a alors, sous ces hypothèses :

LEMME 1.4.1.

i) $\widetilde{\mathcal{M}}$ *vérifie* (H_k)

ii) *soit* $\sigma \in]0, r]$, *pour tout* $\ell \leq k+1$ *et toute* v *dans* $H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M})$ (resp. $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M})$ *on a* $v \circ \varphi^{-1} \in H^{\sigma,\ell}(\widetilde{\mathcal{M}})$ (resp. $C^{\sigma,\ell}\widetilde{\mathcal{M}}$)

iii) $\varphi^{-1} \in C^{r+1,k}(\widetilde{\mathcal{M}})$.

Démonstration. — On procède par récurrence, la conclusion étant trivialement vraie à l'ordre 0 pour (i) et (iii), et (ii) résultant de (1.2.5).

Supposons le lemme vrai pour $j \leq k-1$.

Le fait que $d\varphi^{-1} = (d\varphi \circ \varphi^{-1})^{-1}$ joint à (i) et (ii) à l'ordre j , ainsi qu'à (1.2.2) assure (iii) à l'ordre $j+1$.

De plus, $\mathcal{M}$ vérifie (H_k) , donc il existe un module de type fini $\mathcal{Z}$ inclus dans $\mathcal{M}_k$ tel que, pour tout $\ell \leq j+1$, $\mathcal{M}_\ell$ soit inclus dans $C^{0,\ell}_+(\mathcal{M}) \cdot \mathcal{Z}$. D'après (ii) à l'ordre j , $\varphi_*\mathcal{M}_{\ell+1} \subset C^{0,\ell}_+(\mathcal{M}) \cdot \varphi_*\mathcal{Z}$ et $\varphi_*\mathcal{M}_\ell = \widetilde{\mathcal{M}}_\ell$; donc $\widetilde{\mathcal{M}}$ vérifie (H_{j+1}) .

Soit $\widetilde{m} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{j+1}$, posons $m = \varphi_*^{-1}\widetilde{m}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $m \in \mathcal{M}_{j+1}$, donc si $v \in C^{\sigma,j+2}(\mathcal{M})$ et si $\sigma \in]0,1]$, d'après (1.2.5), $m(x,D)v$ est dans $C^{\sigma,j+1}(\mathcal{M})$. Le fait que $\widetilde{m}(x,D)(v \circ \varphi^{-1}) = m(x,D)v) \circ \varphi^{-1}$ assure, d'après (ii) à l'ordre j , que $\widetilde{m}(x,D)(v \circ \varphi^{-1}) \in C^{\sigma,j+1}(\widetilde{\mathcal{M}})$ et donc, vu que $\widetilde{\mathcal{M}}$ vérifie (H_{j+1}) , d'après (1.2.5), que $v_0\varphi^{-1} \in C^{\sigma,j+2}(\widetilde{\mathcal{M}})$. Le fait que $\partial_{x_i}(v\circ\varphi^{-1}) = \sum_j (\partial_{x_i}\varphi^{-1})_j \partial_{x_j} v \circ \varphi^{-1}$ assure, grâce à (iii) à l'ordre $(j+1)$, (ii) à l'ordre $j+1$ (le cas des espaces H^σ se traitant de manière rigoureusement analogue).

En utilisant le caractère pseudolocal du paraproduit, on démontre, en suivant une démarche analogue, le lemme suivant :

LEMME 1.4.2. — *Soient* $\underline{\Omega}$ *et* Ω' *deux ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *tels que* $\underline{\Omega} \subset \Omega'$

et un module de champs de vecteurs C^1_+ vérifiant (H_k) ; on a alors :

i) $\mathcal{M}_{|\Omega}$ *vérifie* (H_k)

ii) $H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M})_{|\Omega} \subset H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}_{|\Omega})$ *et* $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M})_{|\Omega} \subset C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}_{|\Omega})$ *et ce, pour tout σ réel et tout $\ell \leq k+1$.*

Pour définir les espaces de distributions conormales par rapport à une hypersurface peu régulière, la proposition suivante est essentielle.

PROPOSITION 1.4. — *Soit Σ une sous-variété C^ε , $\varepsilon > 2$, on désigne par $\mathcal{M}_\Sigma$ le module des champs de vecteurs C^1_+ tangents à Σ ; $\mathcal{M}_\Sigma$ vérifie (H_k) avec $k = [\varepsilon] - 2$.*

Démonstration. — Soit φ un difféomorphisme C^ε redressant Σ ; on note $\mathcal{M}_D$ le module des champs C^1_+ tangents à Σ_D , $\Sigma_D = \{x_1 = x_d = 0\}$. D'après le lemme 1.4.1, il suffit de démontrer que $\mathcal{M}_D$ vérifie (H_k) .

Soit $\widetilde{\mathcal{Z}}$ le module engendré par les champs $x_i\xi_j$ avec $(i,j) \in \{1,\ldots,d\}^2$, et les champs ξ_j $j \geq d+1$; on va démontrer que (H_k) est vérifiée avec $\widetilde{\mathcal{Z}}$.

Soit $m \in \mathcal{M}_D$; une formule de Taylor à l'ordre 1 entre $(0,\ldots,0,x_{d+1},\ldots,x_n)$ et x assure que l'on a :

$$\begin{aligned} m(x,\xi) &= m((0,\ldots 0, x_{d+1},\ldots x_n);\xi) \\ &+ \sum_{i=1}^{d} \int_0^1 x_i \partial_{x_i} m(sx_1,\ldots sx_d, x_{d+1},\ldots x_m;\xi) ds \ . \end{aligned}$$

Ceci assure déjà (H_0) . Supposons (H_ℓ) . Si m est à coefficients $C^{r,\ell+1}(\mathcal{Z})$, $r>1$, $\int_0^1 \partial_{x_i} m(sx_1 \ldots sx_d, x_{d+1},\ldots x_n);\xi)ds$ est à coefficients $C^{r-1,\ell+1}(\mathcal{Z})$; d'où $(H_{\ell+1})$.

La proposition résulte alors immédiatement du Lemme 1.4.1 et de la Proposition 1.3. Dorénavant, on note $H^{\sigma,\ell}(\Sigma)$ (resp. $C^{\sigma,\ell}(\Sigma)$) l'espace $H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}_\Sigma)$ (resp. $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}_\Sigma)$) pour $\ell \leq [\varepsilon] - 1$.

Il est clair que, lorsque Σ est une sous-variété C^∞ , les espaces ci-dessus coïncident avec ceux définis en (0.2). De même, cette définition coïncide avec celle donnée dans [2].

Il est maintenant possible d'énoncer un théorème plus précis que le Théorème B, et impliquant le Théorème A :

THÉORÈME 1.4. — *Soit u une solution H^s de (E) , $s > \dfrac{n}{2} + 8 - d$; si $\gamma_j u \in H^{s-j,k}(0)$ pour $j \in \{0,1\}$, alors, localement près de 0 , on a :*

i) $\Gamma \setminus \{0\}$ *est une hypersurface* $C_-^{\rho-1+k}$ *avec* $\rho = s - \frac{n}{2} - 2 + d$;

ii) $u \in H^{s,k}(\Gamma \setminus \{0\})$, *en dehors de 0* .

Remarque 1.4. — i) Les résultats de [1] sur l'évolution d'une onde simple permettent d'étendre les conclusions de ce théorème au plus grand ouvert d'influence $\widetilde{\Omega}$ de H dans Ω tel que $\Gamma \cap \widetilde{\Omega}$ soit, a priori, une hypersurface $C^{\rho-1}$, et ainsi de restreindre l'ouvert Ω , ce qui sera fait librement dans la suite.

ii) Le fait que le point (i) du Théorème B résulte du point (ii) du théorème ci-dessus est assuré par (1.2.6).

2. Construction et étude des espaces $H^{\sigma,\ell}(\Gamma)$ et $C^{\sigma,\ell}(\Gamma)$.

Le but de ce paragraphe est la construction et l'étude d'espaces de distributions conormales par rapport à Γ , définis de manière intrinsèque. La démarche suit celle empruntée dans le cas de la sous-variété, c'est-à-dire que l'on va étudier la situation du cône droit Γ_0 , puis transporter les résultats obtenus par le difféomorphisme exponentiel dont on montrera la régularité conormale par rapport à Γ_0 . On démontrera ensuite que la régularité $H^{s,\ell}(\Gamma)$ de la résolution u de l'équation (E) entraîne la véracité de l'hypothèse (H_ℓ) pour le module $\mathcal{M}_\Gamma$ des champs de vecteurs tangents à $\Gamma \setminus \{0\}$, nuls en 0 , et à coefficients C_+^3 .

2.1. Définition et étude de $H^{\sigma,\ell}(\Gamma_0)$ et $C^{\sigma,\ell}(\Gamma_0)$.

DÉFINITION 2.1.

i) *Soit $\mathcal{Z}_0$ le module engendré par les champs de vecteurs*

$$x_i\tau+t\xi_i\ ,\ i\in\{1,\dots n-1\}\ ;\ \sum_{i=0}^{n-1}x_i\xi_i\ ,\ \text{et}\ \ x_j\xi_i-x_i\xi_j\ ,\ \ (i,j)\in\{1,\dots n-1\}^2$$

ii) $H^{\sigma,\ell}(\Gamma_0)$ (resp. $C^{\sigma,\ell}(\Gamma_0)$ *est l'ensemble des v dans H^σ* (resp. C^σ) *tels que, si $z_1,\dots,z_\ell$ sont $\ell \le k$ champs de $\mathcal{Z}_0$, alors $z_1(x,D)\cdots z_\ell(x,D)u$ sont dans H^σ*(resp. C^σ) .

Le lien avec la construction précédente est exprimé par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\mathcal{M}_{\Gamma_0}$ le module des champs de vecteurs C^3_+ tangents à $\Gamma_0 \setminus \{0\}$ et nuls en 0 , alors, pour tout k , $\mathcal{M}_{\Gamma_0}$ vérifie (H_k) avec $\mathcal{Z}_0$.*

COROLLAIRE 2.1. — $H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}_{\Gamma_0}) = H^{\sigma,\ell}(\Gamma_0)$ *et* $C^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}_{\Gamma_0}) = C^{\sigma,\ell}(\Gamma_0)$.

Démonstration. — Le lemme clef est le lemme de division suivant :

LEMME 2.1.1. — *Soit $f \in C^{r,k}(\Gamma_0)$ avec $r > 2$, si f est nulle sur Γ_0 , alors il existe $g \in C^{r-2,k}(\Gamma_0)$ telle que $f = (t^2 - |x'|^2)g$.*

Démonstration. — On commence par le démontrer pour $k = 0$. Remarquons préalablement qu'en dehors de 0 , Γ_0 est une hypersurface, donc l'existence d'une fonction g C^{r-1} telle que $f = (t^2 - |x'|^2) \cdot g$ est claire.

Si f est un polynôme, il existe des polynômes A_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ tels que $f = (t^2 - |x'|^2)A_1(x') + A_2(x')t + A_3(x')$.

La nullité de f sur Γ_0 entraîne que, pour tout $x' \in \mathbf{R}^{n-1}, \pm A_2(x')|x'| + A_3(x') = 0$ d'où $A_2 = A_3 = 0$.

Soit P le polynôme de Taylor d'ordre $[r]$ de f au point 0 . Un argument d'homogénéité permet d'affirmer que P est nul sur Γ_0 . Il reste donc à démontrer le lemme pour $f \in C^r$, plate d'ordre $[r]$ en 0 . Cette platitude permet d'éclater le point 0 et de se ramener ainsi au cas d'une sous-variété.

Plus précisément, soient $(\Omega_i)_{1 \le i \le 3}$ les ouverts coniques suivants :

$$\Omega_1 = \{(t, x')/|t - |x'|| \le \varepsilon |x|\} \ , \quad \Omega_2 = \{(t, x')/|t + |x'|| \le \varepsilon |x|\}$$
$$\text{et} \quad \Omega_3 = \{(t, x')/|t^2 + |x'|^2| \le \frac{\varepsilon}{2}|x|^2\}, (\chi_i)_{1 \le i \le 3}$$

une partition de l'unité C^∞ hors de 0 , homogène de degré 0 subordonnée aux Ω_i et $(\widetilde{\chi}_i)_{1 \le i \le 3}$ du même type, valant 1 près de Suppχ_i et supportées dans Ω_i . Une formule de Taylor à l'ordre 1 assure :

$$\begin{aligned} f =& (t^2 - |x'|^2) \cdot \Big\{ \frac{\chi_1(x)}{t + |x'|} \int_0^1 \partial_t f(\widetilde{\chi}_1(x)(+|x'| + s(t - |x'|), x'))ds \\ &+ \frac{\chi_2(x)}{t - |x'|} \int_0^1 \partial_t f(\widetilde{\chi}_2(x)(-|x'| + s(t + |x'|), x'))ds + \frac{\chi_3(x)}{t^2 - |x'|^2} f(x) \Big\} \ . \end{aligned}$$

Pour assurer la conclusion du lemme à l'ordre 0 , il suffit maintenant de démontrer le lemme suivant.

LEMME 2.1.2. — *Soient* χ_i , $i \in \{1,2\}$ (resp. $\widetilde{\chi}$) *des fonctions* $C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ *homogènes de degré* $-i$, *réelle* (resp. 1 *et à valeurs dans* $\mathbf{R}^n$), *et une fonction* C^σ *plate d'ordre* $[\sigma]$ *en 0* , *on a :*

i) *si* $\sigma > 1$, $a_1 = \chi_1(a \circ \widetilde{\chi}) \in C^{\sigma-1}$

ii) *si* $\sigma > 2$, $a_2 = \chi_2 \cdot a \in C^{\sigma-2}$.

Démonstration. — i) Il suffit de démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, tel que $|\alpha| \leq [\sigma]$, $D^\alpha a_1 \in C^\mu$ avec $\mu = \sigma - [\sigma]$.

Il est clair que l'on a :

$$D^\alpha a_1(x) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \chi_\beta(x) D^\beta a_1(\widetilde{\chi}(x)) ,$$

où χ_β désigne une fonction homogène de degré $-1 - |\alpha - \beta|$.

Vu que l'on a $|\chi_\beta(x)| \leq C_\beta |x|^{-1-|\alpha-\beta|}$ et que, d'après l'inégalité de Taylor $|a_1^\beta(\chi(x))| \leq C_\beta |x|^{\sigma-|\beta|}$, on a, si $|x - y| \geq \varepsilon \operatorname{Max}(|x|,|y|)$,

$$|D^\alpha a_1(x) - D^\alpha a_1(y)|. \leq C|x - y|^\mu .$$

Supposons maintenant $|x - y| \leq \varepsilon \operatorname{Max}(|x|,|y|)$. . On a alors :

(2.1) $\qquad |y|$ et $d(0;[x,y])$ sont dans $[C|x|, C_1|x|]$.

De plus, en écrivant que

$$D^\alpha a_1(x) - D^\alpha a_1(y) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} (\chi_\beta(x) - \chi_\beta(y)) D^\beta a(\widetilde{\chi}(x))$$
$$+\chi_\beta(y)(D^\beta a(\widetilde{\chi}(x) - D^\beta a(\widetilde{\chi}(y))$$

et en appliquant l'inégalité des accroissements finis, la platitude d'ordre $[\sigma] - |\beta|$ de $D^\beta a$ en 0 assure la majoration voulue, grâce à (2.1).

ii) La démarche est analogue.

Revenons à la démonstration du lemme 2.1.1, que nous venons de démontrer à l'ordre 0 . Supposons-le vrai à l'ordre k .

Soient $z \in \mathcal{Z}_0$ et $f \in C^{r,k+1}(\Gamma_0)$, nulle sur Γ_0 ; il existe $g \in C^{r-2,k}(\Gamma_0)$ telle que $f = (t^2 - |x'|^2)g$.

Or, on a : $z(x,D)f = (t^2 - |x'|^2) \cdot z(x,D)g + g \cdot z(x,D)(t^2 - |x'|^2)$. Le fait que $z(x,D)(t^2 - |x'|^2) = 0$ ou $2(t^2 - |x'|^2)$ assure que $(t^2 - |x'|^2) \cdot z(x,D)g \in C^{r,k}(\Gamma_0)$; elle est bien sûr nulle sur Γ_0 , d'où le lemme 2.1.1. □

Revenons à la démonstration du théorème 2.1 : soit $z \in \mathcal{M}_{\Gamma_0,k}$; $z = \sum_i \alpha_i \xi_i$, les α_i étant des fonctions $C^{r,k}(\Gamma_0)$ nulle en 0 . Une formule de Taylor à l'ordre 1 , jointe à l'existence de générateurs homogènes de $\mathcal{Z}_0$, assure que l'on a $\alpha_i = \sum_j x_j \alpha_{i,j}$ avec $\alpha_{i,j} \in C^{r-1,k}(\Gamma_0)$.

Vu que $t\tau = (x|\xi) - (x'|\xi')$ et que, pour $i \geq 1$, $x_i\tau = \xi_i t + x_i \tau - t\xi_i$, on a :

$$z \equiv z_0(C^{r-1,k}(\Gamma_0) \cdot \mathcal{Z}_0) \text{ avec } z_0 \text{ indépendant de } \tau .$$

Le fait que $z_0 = 0$ sur $N^*(\Gamma_0 \setminus \{0\}) \cup N^*(0)$ assure la nullité de ses coefficients sur Γ_0 . Le lemme 2.1.1 joint au fait que l'on a $(t^2 - |x'|^2)\xi_i = t(t\xi_i + x_i\tau) - x_i(x|\xi) - \sum_{j \neq i} x_j(x_i\xi_j - x_j\xi_i)$ assure le théorème 2.1.

2.2. Définition et étude de l'application exponentielle.

Pour définir l'application exponentielle, examinons l'équation définissant les bandes bicaractéristiques. La courbe définie par $(x(x), \xi(s))_{s\in[0,t_0]}$ est une bande bicaractéristique si et seulement si $\frac{dx}{ds} = A(x(s)) \cdot \xi(s)$ et $\frac{d\xi}{ds} = -\operatorname{grad}_x(A(x)\xi(s)|\xi(s))_{|x(s)}$, $A(x)$ étant la matrice définie par $p_2(x, \xi) = (A(x) \cdot \xi|\xi)$.

L'inversibilité de la matrice $A(x)$ pour x proche de 0 , assurée par la stricte hyperbolicité de p_2 , permet d'affirmer l'existence d'une fonction $f(y, \eta)$, quadratique en η , et dont les coefficients (vectoriels) sont des fonctions C^∞ de la solution u de (E) et de $\partial^\alpha u$ avec $|\alpha| = 3$, telle que la courbe $(x(s))_{s\in[0,s_0]}$ est une bicaractéristique issue de 0 si et seulement si

$$(G) \qquad \frac{dx^2}{ds^2} = f\Big(x(s), \frac{dx(s)}{ds}\Big) \ ; \ x(0) = 0 \ ; \ \frac{dx}{ds}_{|s=0} = v \ .$$

Notons que ce résultat est typique de l'ordre 2 .

DÉFINITION 2.2. — *Soit s_0 un réel strictement positif tel qu'il existe $\widetilde{\Omega}$ voisinage ouvert de 0 , tel que, pour tout v dans $\widetilde{\Omega}$, la solution $x(s, v)$ de (G) telle que $x(0) = 0$ et $\frac{dx}{ds} = v$ soit définie sur $[0, s_0]$;*

$$\varphi \begin{cases} \widetilde{\Omega} \to \mathbf{R}^n \\ v \mapsto \varphi(v) = x(s_0, v) \ . \end{cases}$$

D'après les propriétés des gerbes exprimées dans [12], φ est un $C_-^{\rho-1}$–difféomorphisme près de 0 . De plus, comme on peut supposer que $p_2(0; \xi) = \tau^2 - |\xi'|^2$, il est clair que $\varphi(\Gamma_0) = \Gamma$. Sa régularité est décrite par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Soit $\mathcal{M}_\Gamma$ le module des champs de vecteurs C^3_+ tangents à $\Gamma \setminus \{0\}$ nuls en 0; si $\mathcal{M}_\Gamma$ vérifie $(H_{\ell-1})$ et si la solution u de (E) est $H^{s,\ell}(m_\Gamma)$ avec $s > \frac{n}{2} + 8 - d$, alors φ est un difféomorphisme $C^{\rho-1,\ell}(\Gamma_0)$ avec $\rho = s - \frac{n}{2} - 2 + d$.*

Démonstration. — Si $\widetilde{\varphi}_1(s,v) = \varphi(\frac{s}{s_0}v)$ et $\widetilde{\varphi}_2(s,v) = \frac{d}{ds}\widetilde{\varphi}_1(s,v)$, il résulte des propriétés des gerbes démontrées dans [12] que l'on a :

$$(G_0) \qquad \frac{d}{ds}\widetilde{\varphi}(s,v) = F(\widetilde{\varphi}(s,v)) \ ; \quad \widetilde{\varphi}(0;v) = (0,v) \ , \\ \text{avec } F(X_1,X_2) = (X_2, f(X_1,X_2)) \ .$$

On va démontrer par récurrence que $\widetilde{\varphi}$ est dans $C^0([0,s_0]; C^{\rho-1,\ell}_-(\Gamma_0))$ ce qui assurera clairement le résultat.

Ceci est vrai pour $\ell = 0$. Supposons-le pour $\ell' \leq \ell - 1$. On va différencier (G_0) : $\partial_v\widetilde{\varphi}(s,v)$ est la solution de

$$(G') \qquad \frac{d}{ds}\Phi(s,v) = dF(\widetilde{\varphi}(s,v)) \cdot \Phi(s,v) \ ; \ \Phi(0,v) = (0;\mathrm{Id}) \ .$$

L'équation (G') étant linéaire, il suffit de démontrer

$$(2.2) \qquad dF(\widetilde{\varphi}(s,v)) \in C^0([0,s_0]; C^{\rho-2,\ell'+1}_-(\Gamma_0)) \ .$$

Vu que (G) est une gerbe, que u est solution $H^{s,\ell}(\mathcal{M}_\Gamma)$ de (E) , et que $\mathcal{M}_\Gamma$ vérifie $(H_{\ell-1})$, on a, d'après la proposition 1.3 et (1.2.2) :

$$dF(\widetilde{\varphi}(s,v)) = \sum_k F_k\Big(\varphi(\frac{s}{s_0}v)\Big) G_k(\widetilde{\varphi}_2(s,v)) \ ,$$

avec $F_k \in C^{\rho-2,\ell'+1}_-(\mathcal{M}_\Gamma)$ et $G_k \in C^\infty$.

Comme $\widetilde{\varphi}_2 \in C^0([0,s_0]; C^{\rho-1,\ell'}_-(\Gamma_0))$, $G_k(\widetilde{\varphi}_2)$ aussi, et donc $G_k(\widetilde{\varphi}_2) \in C^0([0,s_0]; C^{\rho-2,\ell'+1}_-(\Gamma_0))$. Soient $z_1, \dots, z_{\ell'+1}$ $\ell'+1$ éléments d'une famille génératrice homogène de $\mathcal{Z}_0$:

$$z_1(v,D)\dots z_{\ell'+1}(v,D)F_k\Big(\varphi(\frac{s}{s_0}v)\Big) \\ = (\varphi_* z_1(x,D)\dots\varphi_* z_{\ell'+1}(x,D)F_k)\Big(\varphi(\frac{s}{s_0}v)\Big) \ .$$

D'après le lemme 1.4.1 (ii), $\varphi_* z_i \in \mathcal{M}_{\Gamma,\ell}$, donc

$$\varphi_* z_1(x,D)\dots\varphi_* z_{\ell'+1}(x,D)F_k \in C^{\rho-2}_-$$

et donc on a (2.2); d'où le théorème.

Le lemme 1.4.1 assure clairement que, sous les hypothèses du théorème 2.2, $\mathcal{M}_\Gamma$ vérifie (H_ℓ) avec $\chi_* \mathcal{Z}_0$. Sous ces hypothèses, on notera $H^{\sigma,\ell}(\mathcal{M}_\Gamma)$ par $H^{\sigma,\ell'}(\Gamma)$ et $C^{\sigma,\ell'}(\mathcal{M}_\Gamma)$ par $C^{\sigma,\ell'}(\Gamma)$ pour tout $\ell' \leq \ell + 1$.

COROLLAIRE 2.2. — *Soit u solution $H^{s,\ell}(\Gamma)$ de (E) avec $s > \frac{n}{2} + 8 - d$, si $\mathcal{Z} = \varphi_* \mathcal{Z}_0$ alors on a :*

$$(C) \qquad \{p_2, \mathcal{Z}\} = \mathcal{V}_{\rho-6,\ell}(\Gamma) \cdot \mathcal{Z} + C_-^{\rho-6,\ell}(\Gamma) \cdot p_2$$

($\mathcal{V}_{r,\ell}(\Gamma)$ désignant l'ensemble des champs de vecteurs à coefficients $C_-^{r,\ell}(\Gamma)$).

Démonstration. — D'après le théorème 2.2 et le lemme 1.4.1 (ii), il suffit de démontrer (C) dans la situation redressée. Il suffit alors d'appliquer à $\tilde{p}_2$, transporté de p_2 , et à $\{\tilde{p}_2, z\}$, $z \in \mathcal{Z}_0$ le fait que, si q est une forme quadratique à coefficients $C^{r,\ell}(\Gamma_0)$, $r > 3$, nulle sur $\Lambda_0 = N^*(\Gamma_0 \setminus \{0\}) \cup \{(0;\xi)/\tau^2 = |\xi'|^2\}$ alors

$$q \in C^{r,\ell}(\Gamma_0) \cdot (\tau^2 - |\xi'|^2) + \mathcal{V}_{r-3,\ell}(\Gamma_0) \cdot \mathcal{Z}_0 \, .$$

En effet, modulo $\lambda(\tau^2 - |\xi'|^2)$, q n'a pas de terme τ^2 et est nulle sur $\Lambda_0 \cup N^*(0)$. Une formule de Taylor à l'ordre 1 permet, modulo $(x|\xi)$ et $x_i\tau + \xi_i t$, de se ramener au cas où ses coefficients s'annulent sur Γ_0 ; le lemme de division 2.1.1 assure alors le corollaire.

La conclusion de cette étude est que l'hypothèse (H_ℓ) est entraînée par la régularité $H^{s,\ell}(\Gamma)$ de la solution u de (E) , ce qui permet de définir la régularité $H^{\sigma,\ell+1}(\Gamma)$ et $C^{\sigma,\ell+1}(\Gamma)$. La relation (C) est un outil important pour démontrer que, si les traces de u sont assez régulières, $u \in H^{s,\ell+1}(\Gamma)$.

3. Démonstration du théorème 1.4.

On va démontrer, par récurrence bien sûr, que sous les hypothèses du théorème 1.4, $u \in H^{s,k}(\Gamma)$; pour ce faire, il suffit de démontrer que si u est une solution $H^{s,\ell}(\Gamma)$ de (E) , $s > \frac{n}{2} + 8 - d$, de (E) , u étant réelle, et si $\gamma_j u \in H^{s-j,\ell+1}(0)$, pour $j \in \{0,1\}$, alors $u \in H^{s,\ell+1}(\Gamma)$. On procède de façon standard :

Soit $(z_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille génératrice de $\mathcal{Z}$ ($\mathcal{Z}$ étant le module défini au corollaire 2.2), on note u_j le vecteur dont les composantes sont les $T_{z_{i_1}} \ldots T_{z_{i_\lambda}} u$, $\lambda \leq j$ et $i_\lambda \in \{1, \ldots, N\}$; il est clair que $u_{\ell+1} \in H^s$ si et seulement si $u \in H^{s,\ell+1}(\Gamma)$. Observons que $u \in H^{s,\ell}(\Gamma)$, donc que

$u_{\ell+1} \in H^{s-1}$; le fait que $u_{\ell+1} \in H^s$ sera impliqué, au terme d'un gagne petit standard, par le fait que, pour $\mu \in [s-1, s[$ et $\gamma = \inf(1, \rho - 6)$ on a :

$$u_{\ell+1} \in H^{\mu} \Rightarrow u_{\ell+1} \in H^{\mu'} \quad \text{avec } \mu' = \mathrm{Min}(s, \sigma + \gamma) .$$

D'après (1.2.2) et le corollaire 2.2, on a, par le biais d'une récurrence très simple :

(3.1) $\qquad$ Pour tout $\ell' \leq \ell + 1$, $T_{p_2} u_{\ell'} + T_{A_1} u_{\ell'} \in H^{\mu' - 1, \ell + 1 - \ell'}(\Gamma)$

où A_1 est une matrice de symboles de $\Sigma^1_{\rho-6, \ell+1-\ell'}(\Gamma)$.

D'après le théorème de propagation de la régularité des traces, qui est un cas particulier du théorème de réflexion des singularités de [14], il suffit, pour démontrer que $u_{\ell+1} \in H^{\mu'}$, de démontrer :

(3.2) $\qquad$ $u_{\ell+1} \in H^{\mu} \Rightarrow \gamma_j(u_{\ell+1}) \in H^{\mu' - j}$, $j \in \{0, 1\}$.

L'essentiel est l'étude des traces des espaces $H^{\sigma,\ell}(\Gamma)$ et $C^{\sigma,\ell}(\Gamma)$ sur H , qui est résumé par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Si u est une solution $H^{s,\ell}(\Gamma)$ de (E) , $s > \frac{n}{2} + 8 - d$, alors on a, si $\sigma > 0$ et $\ell' \leq \ell$*

i) $\gamma_0(C^{\sigma,\ell'}(\Gamma)) \subset C^{\sigma,\ell'}(0)$

ii) $\gamma_0(H^{\sigma+\frac{1}{2},\ell'}(\Gamma)) \subset H^{\sigma,\ell'}(0)$

iii) *si* $v \in H^{\sigma+1,\ell'}(\Gamma)$, $T_{p_2} v \in H^{\sigma,\ell'}(\Gamma)$ *alors* $\gamma_0(v) \in H^{\sigma+1,\ell'}(0)$.

Démonstration. — Il faut redresser Γ_0 tout en laissant H invariant. Ceci est fait par N. Ritter dans [13]; nous le faisons ici de manière plus explicite, de façon à contrôler la régularité du difféomorphisme.

LEMME 3.1. — *Sous les hypothèses du théorème 3.1, il existe un difféomorphisme $C_-^{\rho-3,\ell}(\Gamma)$, noté ψ , tel que :*

i) $(\psi(t, x'))_t = t$

ii) $\psi(\Gamma) = \Gamma_0$.

Démonstration. — Soit $\psi_1 = \varphi^{-1}$, le théorème 2.2 et le lemme 1.4.1 assure que ψ_1 est $C^{\rho-1,\ell}(\Gamma)$ et que $\psi_1(\Gamma) = \Gamma_0$.

Malheureusement, $\psi_1(H)$ n'est pas une hypersurface droite. On va donc la redresser. Soit $f = (\psi^{-1}(t, x))_t$. D'après le théorème 2.2 c'est une équation $C_-^{\sigma-1,\ell}(\Gamma_0)$ de $\psi_1(H)$. Le fait que $\mathcal{Z}_0$ soit engendré par une famille finie de champs homogènes assure, par le biais d'une formule de Taylor à l'ordre 1, l'existence de g dans $C_-^{\sigma-2,\ell}(\Gamma_0)$ telle que $f(x) = g(x)\cdot x$. L'hyperplan tangent à $\psi_1(H)$ en 0 est $(t=0)$, donc si q désigne la forme quadratique $q(x) = t^2 - |x'|^2$, on peut, par le procédé d'orthogonalisation de Schmitt, construire une base orthogonale pour q , notée $e(x)$, telle que $e_0(x) = \dfrac{g(x)}{q(g(x))^{1/2}}$ et telle que $e(0)$ soit la base canonique de $\mathbf{R}^n$. La fonction $e(x)$ est bien sûr $C_-^{\rho-2,\ell}(\Gamma_0)$ et l'on obtient un difféomorphisme ψ_2 convenable en posant $\psi_2(x) = q(g(x))^{1/2}A(x)\cdot x$, où $A(x)$ est la matrice dont les vecteurs lignes sont les vecteurs de $e(x)$. Posons $\psi = \psi_2\circ\psi_1$; il résulte du lemme 1.4.1 que ψ est $C_-^{\rho-2,\ell}(\Gamma)$, d'où le lemme. □

Soit χ une fonction $C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$, homogène de degré 0 , valant 1 près de $(|\tau|\le\varepsilon|\xi'|)$ et supportée dans $(|\tau|\le\varepsilon_1|\xi'|)$, on a : pour $i\in\{1,\dots,n-1\}$:

$$\begin{aligned} x_i = &-\frac{t\xi_i}{\tau}(1-\chi)(\tau,\xi') + (\tau x_i + \xi_i t)\frac{1}{\tau}(1-\chi)(\tau,\xi') \\ &+ \chi(\tau,\xi')\frac{1}{\tau^2-|\xi'|^2}(\tau(x_i\tau+\xi_i t) - \xi_i(x|\xi) - \sum_{k=1}^{n-1}\xi_k(\xi_i x_k - x_i\xi_k)) \,. \end{aligned}$$

Soit $z_{i,j}(x,\xi) = x_i\xi_j$ pour $\{i,j\}\in\{1,\dots n-1\}^2$; d'après le lemme 1.4.1, $\psi_* z_{i,j}$ est un champ de vecteurs $C^{\rho-3,\ell}(\Gamma_0)$ qui, de plus, est nul en 0 . Une formule de Taylor à l'ordre 1 jointe à l'expression des x_k à partir des éléments de $\mathcal{Z}_0$ assure que l'on a :

$$\psi_* z_{i,j} = t\Sigma^1_{\varepsilon,\ell}(\Gamma_0) + \Sigma^0_{\varepsilon,\ell}(\Gamma_0)\cdot\mathcal{Z}_0\,,\quad \text{avec } \varepsilon>0\,.$$

Le transport de cette relation par ψ^{-1} assure, grâce au lemme 1.4.1 et au théorème 2.2 :

$$z_{i,j}\in t\cdot\Sigma^1_{\varepsilon,\ell}(\Gamma) + \Sigma^0_{\varepsilon,\ell}(\Gamma)\cdot\mathcal{Z}\ \text{ avec } \varepsilon>0\,. \tag{3.3}$$

Démontrons (i) par récurrence : supposons la conclusion à l'ordre $j\le\ell$; soit $v\in C^{\sigma,j+1}(\Gamma)$, il résulte de (3.3) que $x_iD_jv = tv_1 + v_2$ avec $v_2\in C^{\sigma,j}(\Gamma)$. L'hypothèse de récurrence assure alors que x_iD_jv est dans $C^{\sigma,j}(0)$, c'est-à-dire (i) à l'ordre $j+1$.

Le point (ii) se démontre de manière analogue.

La démonstration du point (iii) est plus délicate. Pour $\ell=0$, il s'agit d'une extension au cas paradifférentiel d'une propriété bien connue dans le cas où p_2 est un opérateur pseudodifférentiel (voir [6]).

Remarquons tout d'abord que l'on peut, grâce à l'ellipticité microlocale, supposer que le front d'onde de v est contenu dans l'ensemble des

(x,ξ) de $T^*\Omega$ tel que $|\tau| \approx |\xi'|$ et que v est à support compact. De plus, dans toute cette démonstration, H^σ_g désignera l'espace de Sobolev global sur $\mathbf{R}^{n-1}$ d'ordre σ .

L'outil de cette généralisation est le concept d'opérateurs paradifférentiels tangentiels introduits par M. Sablé-Tougeron dans [14]. Soit T' un paraproduit sur $\mathbf{R}^{n-1}$, on note, si $p_2 = \sum_{i=0}^{2} q_i(t,x';\xi')\tau^i$, q_i polynôme de degré $2-i$ en ξ' , à coefficients C^ρ , T'_{p_2} l'opérateur défini par $T'_{p_2}w = \sum_{i=0}^{2} T'_{q_i(t,.)}\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)^i w$. D'après [14], la localisation spectrale de v assure, par le biais d'un découpage dyadique standard que l'on a $T_{p_2}v - T'_{p_2}v \in L^2(\mathbf{R};H^{\sigma+\rho}_g)$. Vu que l'on a $\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)^j v \in L^2(\mathbf{R};H^{\sigma+1-j}_g)$ pour presque tout t_0, $\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)^j v_{|t=t_0} \in H^{\sigma+1-j}_g$. Il reste maintenant à démontrer que l'équation $T'_{p_2}w = f \in L^1([0,T];H^\sigma_g)$ a une unique solution dans $C([0,T];H^\sigma_g) \cap C^1([0,T];H^{\sigma-1}_g)$. Ceci résulte de façon standard de l'inégalité a priori suivante :

si $\varphi \in C^1([0,T];H^\sigma_g) \cap C([0,T];H^\sigma_g)$ alors

$$\sum_{j=0}^{1} \|e^{-\lambda t}\cdot\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)^j\varphi\|_{L^\infty([0,T];H^{\sigma-j}_g)} \leq C\sum_{j=0}^{1}\|\gamma_j\varphi\|_{H^{\sigma-j}_g} + \|e^{-\lambda t}\cdot T'_{p_2}\varphi\|_{L^1([0,T];H^{\sigma-1}_g)} .$$

Pour démontrer cette inégalité, il suffit de généraliser l'inégalité 23.1.2 de [11] au cas d'un système hyperbolique symétrisable paradifférentiel, ce qui est facile et laissé au lecteur, d'où (iii) pour $\ell = 0$.

Supposons maintenant (iii) à l'ordre $j \leq \ell$; les relations (3.1) et (3.3) jointes à l'hypothèse de récurrence assurent (iii) à l'ordre $j+1$, d'où le théorème 3.1.

On a maintenant besoin du lemme suivant :

LEMME 3.2. — *Sous les hypothèses du théorème 3.1, soient* $\sigma > 1$ *et* $\ell' \leq \ell$; *si* $v \in H^{\sigma,\ell'}(\Gamma)$, $T_{p_2}v \in H^{\sigma-1,\ell'}(\Gamma)$ *et* $\gamma_j \in H^{\sigma-j,\ell'+1}(0)$ *pour* $j \in \{0,1\}$, *alors, pour tout* $z \in \mathcal{Z}$, $\gamma_0(T_z v) \in H^{\sigma,\ell'}(0)$.

Démonstration. — Soit ∂ un opérateur différentiel en x' d'ordre N tel que $\rho - 4 \geq \sigma - N > 1$. Posons $\tilde{v} = \partial v$. On a, d'après (1.2.5) $T_z\tilde{v} - z(x,D)\tilde{v} \in H^{\rho-3,\ell'}(\Gamma)$, donc, d'après le théorème 3.1, $\gamma_0(T_z\tilde{v}). \equiv \gamma_0(z(x,D)\tilde{v})(H^{\sigma-N,\ell'}(0))$.

Si $z(x,\xi) = a_0\tau + \sum_{i=1}^{n-1} a_i\xi_i$, alors

$$\gamma_0(z(x,D)\tilde{v}) = \gamma_0(a_0)\gamma_1(\tilde{v}) + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_0(a_i)D_{x_i}(\gamma_0(\tilde{v})). \,.$$

Les fonctions $\gamma_0(a_i)$ sont des fonctions $C^{\rho-2,\ell'}(0)$ nulles en 0 , et $\gamma_j\tilde{v} \in H^{\sigma-N-j,\ell'+1}(0)$. Donc, il vient que $\gamma_0(z(x,D)\tilde{v}) \in H^{\sigma-N,\ell'}(0)$ ainsi que $\gamma_0(T_z\tilde{v})$; ceci n'est pas exactement le résultat visé, mais l'on a : $[\partial, T_z]v \in H^{\sigma-N,\ell'}(\Gamma)$ et $T_{p_2}[\partial, T_z]v \in H^{\sigma-N-1,\ell'}(\Gamma)$ et donc, d'après le théorème 3.1, $\gamma_0[\partial, T_z]v \in H^{\sigma-N,\ell'}(0)$ d'où $\gamma_0(T_z v) \in H^{\sigma,\ell'}(0)$.

COROLLAIRE 3.2. — *Soient $\sigma > 2$ et $\ell' \leq \ell$; si $v \in H^{\sigma,\ell'}(\Gamma)$, $T_{p_2}v \in H^{\sigma-1,\ell'}(\Gamma)$ et $\gamma_j v \in H^{\sigma-j,\ell'+1}(0)$, $j \in \{0,1\}$, alors, pour tout $z \in \mathcal{Z}$, on a $\gamma_j(T_z v) \in H^{\sigma-j,\ell'}(0)$.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $\partial_t v$ vérifie les hypothèses du lemme 3.2, ce qui revient à démontrer que $\gamma_2 v \in H^{\sigma-2,\ell'+1}(0)$. Il faut bien sûr utiliser l'équation; soit ∂ un opérateur différentiel d'ordre N en x' tel que $\rho - 3 \geq \sigma - N > 2$. On a alors : $p_2(x,D)\partial v - T_{p_2}\partial v \in H^{\sigma-N,\ell'}(\Gamma)$ donc $p_2(x,D)\partial v \in H^{\sigma-N-1,\ell'}(\Gamma)$ ce qui entraîne

$$\gamma_0(p_2(x,D)\partial v) \in H^{\sigma-N-\frac{3}{2};\ell'}(0) \subset H^{\sigma-2-N,\ell'}(0) \;;$$

la stricte hyperbolicité de p_2 assure alors que $\gamma_2(\partial v) \in H^{\sigma-2-N,\ell'}(0)$ d'où $\gamma_2(v) \in H^{\sigma-2,\ell'}(0)$, et ainsi le corollaire. □

Soit $(F_{\ell'})$: $\gamma_j(u_{\ell'}) \in H^{\mu'-j,\ell+1-\ell'}(0)$. Le prédicat (F_0) est vrai. Supposons $(F_{\ell'})$ vrai pour $\ell' \leq \ell$:

les relations (1.2.2) et (3.1) assurent $u_{\ell'} \in H^{\mu',\ell-\ell'}(\Gamma)$ et $T_{p_2}u_{\ell'} \in H^{\mu'-j,\ell-\ell'}(\Gamma)$. Le corollaire 3.2 et $(F_{\ell'})$ assure $\gamma_j(T_z u_{\ell'}) \in H^{\mu'-j,\ell-\ell'}(0)$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$, c'est-à-dire $(F_{\ell'+1})$. D'où $(F_{\ell+1})$. Il en résulte (3.2), c'est-à-dire que $\gamma_j u_{\ell+1} \in H^{\mu'-j}$ pour $j \in \{0,1\}$ et ainsi donc que $u \in H^{s,\ell+1}(\Gamma)$.

Pour obtenir le théorème 1.4, il suffit d'observer que l'exponentielle φ est $C_-^{\rho-1,k}(\Gamma_0 \setminus \{0\})$ et que donc $\varphi_{|\Gamma_0\setminus\{0\}}$ est $C^{\rho-1+k}$, ce qui fournit un paramétrage $C_-^{\rho-1+k}$ de $\Gamma \setminus \{0\}$, d'où le point (i).

Pour (ii) c'est l'application du lemme de restriction 1.4.2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, Evolution d'une onde simple pour des équations non linéaires générales, à paraître dans Current Topics in PDE, Kinokuniya Co, 1985.

[2] S. ALINHAC, Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires, Ann. Sci. de l'E.N.S, 4e Série, 21 (1988).

[3] H. BAHOURI et B. DEHMAN, Propagation des singularités hölderiennes de solutions d'équations non linéaires, à paraître.

[4] M. BEALS, Self spreading and strength of singularities for solutions of semi linear wave equation, Annals of Maths, 118 (1983).

[5] J.-M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann, Sci. Ecole Normale Supérieure, 4ème série, 14 (1981).

[6] J.-M. BONY, Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires, Advances in micro local analysis, Nato ASI série 1985 Castelvecchio Pasoli, Italy, Reidel Pub. Comp. Ed. Garnir.

[7] J.-Y. CHEMIN, Calcul paradifférentiel précisé et applications à des équations aux dérivées partielles non semi linéaires, Duke Mathematic Journal, Vol. 56 n° 2 (1988).

[8] J.-Y. CHEMIN, Ondes lentes et interaction contrôlée pour les équations strictement hyperboliques non linéaires, Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique, 1986–1987.

[9] J.-Y. CHEMIN, Calcul symbolique bilinéaire et interaction contrôlée dans les équations aux dérivées partielles non linéaires strictement hyperboliques, Bull. Soc. Math. France, 116 (1988).

[10] P. GODIN, Propagation of C^∞-regularity for fully non linear second order strictly hyperbolic equations in two variables, Trans. Amer. Math. Soc., 290 (1985).

[11] L. HÖRMANDER, The analysis of linear partial differential equations, tome 3, Springer-Verlag, 1984.

[12] S. LANG, Introduction aux variétés différentiables, Dunod, 1962.

[13] N. RITTER, Progressing wave solutions to non linear hyperbolic Cauchy problems, Thèse M.I.T., 1984.

[14] M. SABLÉ-TOUGERON, Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaire, Ann. Inst. Fourier, 36–1 (1986), 39–82.

Manuscrit reçu le 1er juin 1987,
révisé le 16 mars 1988.

Jean-Yves CHEMIN,
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex.