ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL LANGEVIN

Solution des problèmes de Favard

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 2 (1988), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 2 (1988), 1-10.

SOLUTION DES PROBLÈMES DE FAVARD

par Michel LANGEVIN

1. Les deux problèmes.

On reprend les notations [LRR]. On désigne par $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_d\}$ l'ensemble des conjugués d'un entier algébrique irrationnel z_1 et par $t_2(X) = \max |z_i - z_j|$ son diamètre. On désire montrer :

Premier problème : $t_2(X) \geqslant \sqrt{3}$.

Second problème : $t_2(X) \geqslant 2 - \varepsilon$ lorsque le degré d est assez grand (en fonction de $\varepsilon > 0$ donné quelconque).

Plus généralement, $F(d)$ désignant la borne inférieure des diamètres $t_2(X)$ quand z_1 décrit l'ensemble des entiers de degré au moins d, il s'agit de minorer convenablement la fonction croissante F et d'établir :

Premier problème : $F(2) = \sqrt{3}$, Second problème : $\lim_{d \to \infty} F(d) = 2$.

Le premier problème est résolu dans [LRR]. Les buts de ce travail sont les suivants :

- Donner une solution du second problème,
- En déduire une minoration de F,
- Donner une solution simple du premier problème.

Mots-clés : Problème de Favard - Discriminant - Diamètre transfini - Inégalité isopérimétrique.

2. Les résultats.

Pour toute partie compacte Y du plan complexe, on note :

$$t_d(Y) = \sup_{z_1,\ldots,z_d \in Y} \left(\prod_{i \neq j} |z_i - z_j| \right)^{1/d(d-1)}$$

La limite $t(Y)$ de la suite décroissante $(t_d(Y))$ est, par définition, le diamètre transfini de Y. La solution du deuxième problème se déduit, comme on va le voir, du :

THÉORÈME 1. — $2t(Y) \leqslant t_2(Y)$.

Ce théorème sera démontré au § 3. On sait (cf. [L1]) que l'égalité

$$1/2 = \sup_Y t(Y)/t_2(Y),$$

Y décrivant l'ensemble des parties bornées (non réduites à un point) du plan admettant un axe de symétrie, est équivalente au second problème ; toutefois, on ne passera pas du théorème 1 à la solution du second problème par le procédé de [L1].

Il est clair qu'il suffit d'établir le théorème 1 lorsque Y est supposée convexe. En fait, on peut préciser l'énoncé du théorème ainsi : soient D_0 une droite et B_t la bande fermée — faisant un angle $t(0 \leqslant t < \pi)$ avec D_0 — de largeur minimale $l(t)$ parmi celles contenant Y ; alors

$$L(Y) = \int_0^\pi l(t)\, dt \qquad (\leqslant \pi t_2(Y))$$

est le périmètre de l'enveloppe convexe $\bigcap_t B_t$ fermée de Y et on a :

THÉORÈME 1 *bis*. — $t(Y) \leqslant L(Y)/2\pi$.

On n'appliquera le théorème 1 *bis* que dans le cas où Y est un polygone convexe (en fait, l'enveloppe convexe de X) ; dans ce cas, on peut améliorer la majoration $L(Y) \leqslant \pi t_2(Y)$ vue ci-dessus (et qui est optimale pour des domaines de largeur constante) grâce à un lemme de géométrie (qu'on énonce sous une forme très générale qui nous sera utile plus loin) ; dans ce lemme comme dans la suite, la norme de tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée AB.

LEMME PP. — *Soient $M : i \to M_i$ une application injective de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dans le plan affine euclidien orienté, m_i la mesure $(0 \leqslant m_i < 2\pi)$ de l'angle $(\overrightarrow{M_{i-1}M_i}, \overrightarrow{M_iM_{i+1}})$, r l'entier défini par $2r\pi = \sum_i m_i$ (la notation $\sum_i$ signifiant que la sommation est faite sur une période, i.e. un ensemble de d entiers consécutifs), alors :*

$$\sum_i M_iM_{i+1} \leqslant 2d \sin(r\pi/2d) \sup_{i,j} M_iM_j .$$

Appliqué lorsque Y est le polygone enveloppe convexe de X, on obtient : $L(Y) \leqslant 2d \sin(\pi/2d) t_2(Y)$ et donc :

THÉORÈME 1 *ter*. — $t(Y) \leqslant (d/\pi) \sin(\pi/2d) t_2(Y)$.

Pour passer des théorèmes 1, 1 *bis*, 1 *ter* à une solution du second problème on utilise :

— d'une part, la relation établie dans [L2] entre $t_d(Y)$ et $t(Y)$ quand Y est convexe compact :

$$t_d(Y) \leqslant \prod_{k \geqslant d} k^{2/(k^2-1)} t(Y).$$

(N.B. Dans les applications numériques, on fera, comme dans [LRR], une évaluation directe de ce produit infini plutôt que d'employer une approximation comme dans [L2]),

— d'autre part, la minoration, Y désignant maintenant l'enveloppe convexe de X,

$$t_d(Y) \geqslant K_d^{1/(d-1)}$$

où, comme dans [LRR], K_d désigne la borne inférieure des racines $d^{\text{ièmes}}$ des valeurs absolues des discriminants des corps de nombres de degré d.

Il vient alors :

THÉORÈME 2. — $t_2(X) \geqslant (\pi/d)(\sin(\pi/2d))^{-1} \left(\prod_{k \geqslant d} k^{2/(1-k^2)} \right) K_d^{1/(d-1)}$.

En particulier : $F(150) > 1{,}88$, $F(450) > 1{,}95$, $F(3\,000) > 1{,}99$, $F(20\,000) > 1{,}998$.

Le second problème est donc résolu. En utilisant, comme dans [LRR], les minorations explicites de Diaz y Diaz pour K_d, le second membre de l'inégalité du théorème 2 fournit une fonction minorante pour F.

Les minorations données par le théorème 2 sont moins bonnes que celles obtenues dans [LRR] lorsque $d < 76$. Le théorème 3 ci-après, de démonstration très simple, améliore le résultat de [LRR] et est préférable au théorème 2 jusqu'au degré 150. La notation $[x]$ est employée pour « partie entière de x ».

THÉORÈME 3. — $t_2(X) \geqslant ((\pi/d)^{[d/\pi]}[d/\pi]!)^{2/(1-d)} K_d^{1/(d-1)}$.

A nouveau, le lemme PP amène une légère amélioration de ce dernier résultat ;

THÉORÈME 3 *bis*. —

$$t_2(X) \geqslant \left(2^{[d/3]} . \prod_{1 \leqslant k \leqslant d/3} \sin\,(k\pi/2\,d)\right)^{2/(1-d)} . K_d^{1/(d-1)} .$$

En particulier, $F(4) > 1{,}767$, $F(9) > 1{,}81$, $F(55) > 1{,}86$, $F(90) > 1{,}87$, $F(150) > 1{,}88$.

Commentaires sur les résultats :

Tous les résultats ci-dessus, comme ceux de [LRR], sont exprimés en fonction de K_d seulement ; autrement dit, l'hypothèse « entier algébrique » n'apparaît que par la notion de discriminant. L'existence de corps cubiques de discriminant 23 montre qu'il est impossible d'étudier le premier problème quand $d = 3$ par ces techniques d'où la nécessité de recourir dans ce cas à l'étude directe de Favard ou de Lloyd-Smith.

La conjecture suivant laquelle la borne supérieure du rapport $t_d(Y)/t_2(Y)$ est atteinte, lorsque d est impair, dans le cas d'un d-gone régulier permettrait d'obtenir une fonction minorante pour F un peu meilleure que celle fournie par la réunion des théorèmes 2 et 3 *bis* ; il est possible cependant qu'un tel résultat demeure éloigné de la fonction F elle-même, semblant converger très vite vers 2. La conjecture ci-dessus, comme l'a remarqué E. Reyssat, est fausse lorsque d est pair et $d \neq 2$; pour formuler une conjecture raisonnable pour toute valeur de d, il faut remplacer $t_2(Y)$ par le périmètre $L(Y)$.

La méthode utilisée dans [LRR] est susceptible de donner de meilleurs résultats dans le cas des petits degrés ; on s'est borné dans [LRR] à ce qui suffisait pour résoudre le premier problème, c'est-à-dire à évaluer m_3 (cf. notations de [LRR]) en limitant le champ d'investigation aux polynômes cubiques de la forme $X^3 - h$.

En conclusion à cette présentation et à ces commentaires sur les résultats, je désirerais exprimer à E. Reyssat, G. Rhin et J. Martinet mes vifs remerciements pour leurs remarques, leur assistance et la chaleureuse amitié qu'ils m'ont manifestée tout au long de la préparation de ce travail.

3. Démonstration des théorèmes 1 et 1 *bis*.

Bien que les conclusions des théorèmes 1 et 1 *bis* soient valables sous des hypothèses plus générales, on continue de supposer dans ce paragraphe la partie Y convexe compacte et non réduite à un point. On utilise l'énoncé du lemme DT de [L1] qui redonne les diverses définitions classiques équivalentes du diamètre transfini (cf. [L3] pour une démonstration).

LEMME DT. — (i) $t(Y) = \inf_U \sup_{z \in Y} |U(z)|^{1/d^oU}$ (*U décrivant l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients complexes de degré $d^\circ U$*)

(ii) *Il existe une représentation conforme* $f\colon z \to t(Y).\left(z + \sum_{i \geqslant 0} a_i z^{-i}\right)$ *de l'extérieur du disque-unité sur le complémentaire de* Y.

On va voir que les théorèmes 1 et 1 *bis* se déduisent aisément du lemme DT (ii). La fonction $1/f$ appartient au classique ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions univalentes sur le disque-unité D ouvert (cf. [Oe]). Un calcul de Bieberbach reproduit dans cette référence permet d'obtenir l'aire $A(Y)$ de Y:

$$A(Y) = t^2(Y)\left(1 - \sum_{i \geqslant 0} i|a_i|^2\right)$$

d'où
$$(A(Y)/\pi)^{1/2} \leqslant t(Y).$$

De même, en désignant, comme dans [Oe], par C_r le cercle de centre O et de rayon r (>1) orienté dans le sens trigonométrique, et en évaluant $\int_{f(C_r)} |dz|$ au lieu de $(1/2i) \int_{f(C_r)} \bar{z}\, dz$, il vient

$$\int_{f(C_r)} |dz| = \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|\, dt \geqslant \left|\int_0^{2\pi} f'(re^{it})\, dt\right|$$

d'où
$$L(Y) \geqslant 2\pi t(Y).$$

Remarques. — On vient d'établir le théorème 1 *bis* et donc le théorème 1. On aurait pu prouver directement ce dernier en formant $f(1/z)-f(-1/z)$ ce qui fait apparaître le terme $2t(Y)$ comme un résidu.

En rapprochant la minoration et la majoration de $t(Y)$ qu'on vient d'obtenir, on a en fait prouvé un raffinement de la classique inégalité isopérimétrique :

$$A(Y) \leqslant L^2(Y)/4\pi.$$

On peut compléter le théorème 1 en écrivant un encadrement grâce au théorème « du quart » (cf. [Oe]) :

$$t_2(Y)/4 \leqslant t(Y) \leqslant t_2(Y)/2,$$

en fait, l'hypothèse Y convexe rend claire *a priori* cette nouvelle inégalité car Y contient un segment de longueur $t_2(Y)$ et dont le diamètre transfini est donc $t_2(Y)/4$.

Une fois ramené à la forme donnée dans [L1], le deuxième problème se trouve donc réduit à un calcul connu ; on trouvera même dans [PS] une table donnant numériquement les rapports $t(Y)/L(Y)$ ($t(Y)$ est noté $\bar{r}(Y)$ (« outer radius »)) pour un certain nombre de figures.

On énonce enfin un corollaire, en fait équivalent (à la réserve qu'amène l'hypothèse $Y=\bar{Y}$ ci-dessous près) au théorème 1, déduit du lemme DT (i) et de la méthode de Fekete-Szegö (cf. [L1]) :

COROLLAIRE. — *Soit Y une partie du plan complexe de diamètre strictement inférieur à* 2 *et telle que $Y = \bar{Y}$, alors il existe un polynôme, unitaire à coefficients entiers, de valeur absolue strictement inférieure à* 1 *sur l'ensemble Y.*

4. Solution des problèmes de Favard.

Les théorèmes 1 et 1 *bis* sont, pour le second problème de Favard, des résultats limites éloignés de la théorie des nombres. Ils permettent, grâce à la relation entre $t_d(Y)$ et $t(Y)$ rappelée au § 2, et sans même l'usage du lemme PP, de résoudre ce second problème mais ne fournissent aucune indication sur le premier sinon qu'il se ramène théoriquement à un nombre fini de vérifications (ce qui était déjà connu de Blanksby, Lloyd-Smith et Mc-Auley). On en donne maintenant une solution simple en prouvant le théorème 3.

Soit M une application de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dans le plan affine euclidien orienté telle que les images $M_0, M_1, \ldots, M_{d-1}$ soient – dans cet ordre – les sommets d'un d-gone convexe de diamètre $\sup M_iM_j$. On pose $P_k = \sum_i M_iM_{i+k}$ (la sommation s'effectuant sur un ensemble de d entiers consécutifs). P_1 est donc le périmètre du d-gone convexe considéré. Il est clair que $P_k = P_{d-k}$. Le lemme suivant se déduit de l'inégalité triangulaire :

LEMME IT. – $P_k \leqslant \inf(k\pi, d) \sup M_iM_j$.

En effet, d'une part, $P_k \leqslant d \sup M_iM_j$, d'autre part, $P_{k+k'} \leqslant P_k + P_{k'}$ d'où $P_k \leqslant kP_1$; il reste à observer que le périmètre P_1 est majoré par $\pi \sup M_iM_j$, ce qu'on a vu être vrai au § 2.

Rappelons, pour être complet, la démonstration de la formule $\int_0^\pi l(t)\,dt = L(Y)$ qu'on vient d'évoquer ; on représente le bord de Y par son équation d'Euler $x \cos t + y \sin t + p(t) = 0$ et on remarque que $l(t) = p(t) + p(t+\pi)$ et que $L(Y) = \int_0^{2\pi} p(t)\,dt$; c'est par une généralisation de ce calcul qu'on prouvera le lemme PP.

Le lemme IT et l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique permettent d'écrire :

$$\left(\prod_{i \neq j} M_iM_j\right)^{1/d(d-1)} = \left(\prod_{1 \leqslant k < d} \left(\prod_i M_iM_{i+k}\right)^{1/d}\right)^{1/(d-1)} \leqslant$$

$$\left(\prod_{1 \leqslant k < d} P_k/d\right)^{1/(d-1)} \leqslant \left(\left(\prod_{1 \leqslant k \leqslant d/\pi} k\pi/d\right)^{2/(d-1)}\right) \sup M_iM_j.$$

Soit maintenant, comme au § 1, X un ensemble complet de d conjugués et soit Y son enveloppe convexe. On a (cf. § 2) :

$$t_2(X) = t_2(Y) \qquad \text{et} \qquad t_d(Y) \geqslant t_d(X) \geqslant K_d^{1/(d-1)}.$$

Le principe du maximum montre l'existence d'une application M à valeurs sur le bord de Y satisfaisant aux mêmes hypothèses que ci-dessus et vérifiant $\left(\prod_{i \neq j} M_iM_j\right)^{1/d(d-1)} = t_d(Y)$ et il n'y a alors plus qu'à appliquer le calcul précédent pour obtenir le théorème 3. Ce théorème montre que $F(4) > 1{,}74698$ et donc, joint à l'étude directe de

Favard ou de Lloyd-Smith pour les polynômes de degré 3, est suffisant pour prouver l'égalité $F(2) = \sqrt{3}$; il fournit de plus de meilleures valeurs numériques que celles données dans [LRR] mais il est préférable, pour le calcul de telles valeurs, d'utiliser l'énoncé du théorème 3 *bis*.

5. Démonstration du lemme PP.

La ligne brisée fermée $M_0 M_1 \cdots M_{d-1} M_0$ a une équation d'Euler de la forme

$$x \cos t + y \sin t + p(t) = 0$$

où p est une fonction continue périodique de période $2r\pi$ qui, par morceaux de longueur m_i, se présente sous la forme :

$$a_i \cos t + b_i \sin t \text{ où } (a_i, b_i) \text{ représente les coordonnées de } M_i .$$

Le périmètre L de la ligne brisée s'obtient comme au § 4 à partir de la fonction p :

$$2L = \int_0^{2r\pi} (p(t) + p(t+\pi))\, dt ;$$

comme l'on peut partager l'intervalle d'intégration en au plus $2d$ sous-intervalles où $p(t) + p(t+\pi)$ est de la forme $(a_{i'} - a_{i''}) \cos t + (b_{i'} - b_{i''}) \sin t$, on voit que $2L$ est égal à une somme de termes tels que

$$(a_{i'} - a_{i''})(\sin t_{j+1} - \sin t_j) + (b_{i'} - b_{i''})(\cos t_j - \cos t_{j+1})$$

qu'on majore en valeur absolue par (appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$((a_{i'} - a_{i''})^2 + (b_{i'} - b_{i''})^2)^{1/2} (2 | \sin (t_{j+1} - t_j)/2 |) .$$

La racine carrée ci-dessus est au plus égale à $\sup M_i M_j$; il n'y a alors plus qu'à majorer la somme de sinus (tous positifs, $(t_{j+1} - t_j)/2$ appartenant par construction à $[0, \pi]$) restante grâce à l'inégalité de convexité ci-dessous pour conclure,

$$\sum_{0 \leqslant j < n} \sin w_j \leqslant n \sin \left(\left(\sum_{0 \leqslant j < n} w_j \right) \Big/ n \right) \quad (\text{où } w_j \in [0, \pi]) .$$

Remarques. — Le lemme PP est optimal dans le cas d'un d-gone régulier convexe lorsque d est impair.

On peut améliorer le lemme PP en remplaçant dans la conclusion d par d' où d' désigne le nombre de directions obtenues en parcourant la ligne brisée fermée considérée ; par exemple, quand cette ligne est un $2d'$-gone convexe obtenu par intersection de bandes de même largeur, la démonstration du lemme PP (avec d') est à nouveau optimale et prouve que le périmètre d'un tel polygone ne dépend que de la largeur commune des bandes et que des angles qu'elles font entre elles (cf. [L3]). G. Rhin a obtenu une autre preuve du lemme PP; son interprétation pour $r = 1$ a conduit E. Reyssat à l'énoncé suivant : Soient DC un demi-cercle de rayon 1 et A, B les extrémités de DC, alors, pour toute ligne brisée allant de A à B inscrite dans DC, le polygone convexe obtenu en refermant cette ligne brisée (i.e. en déformant la ligne brisée (de façon isométrique et en respectant la convexité) de sorte que A et B viennent coïncider) est de diamètre au moins 1.

6. Démonstration des théorèmes 1 *ter*, 2, 3 *bis*.

Les théorèmes 1 *ter* et 2 se déduisent directement du lemme PP permettant d'améliorer l'inégalité $L(Y) \leqslant \pi t_2(Y)$ et, respectivement, du théorème 1 *bis* (cf. § 3) et du calcul du début du § 4.

Pour prouver le théorème 3 *bis*, on revient aux notations du § 4 et notamment au lemme IT qu'on se propose d'améliorer. Le terme P_k apparaît comme la somme des périmètres des $\operatorname{pgcd}(k,d)$ lignes brisées fermées joignant dans cet ordre $M_i, M_{i+k}, M_{i+2k}, \ldots, M_i$ (i décrivant un système de représentants dans $[0,d[$ des classes modulo $\operatorname{pgcd}(k,d)$). Pour chacune de ces lignes brisées fermées, l'entier r du lemme PP est égal à $k/\operatorname{pgcd}(k,d)$ et, comme elles sont composées de $d/\operatorname{pgcd}(k,d)$ segments, le lemme PP montre que

$$P_k \leqslant 2d \sin (k\pi/2d) \sup M_iM_j ;$$

on peut donc majorer $P_k/d \sup M_iM_j$ par $2 \sin (k\pi/2d)$ si $3k \leqslant d$, par 1 sinon. On achève alors la démonstration comme au § 4.

BIBLIOGRAPHIE

[LRR] M. LANGEVIN, E. REYSSAT, G. RHIN, Diamètres transfinis et problème de Favard, Ann. Inst. Fourier, 38-1 (1988), 1-16.

[L1] M. LANGEVIN, Méthode de Fekete-Szegö et problème de Favard, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 302 (1986), 431-434.

[L2] M. LANGEVIN, Approche géométrique du problème de Favard, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 304 (1987), 245-248.

[L3] M. LANGEVIN, Solution des problèmes de Favard (exposé du 27/03/87 au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux ; à paraître).

[Oe] J. OESTERLÉ, Démonstration de la conjecture de Bieberbach (d'après L. de Branges), Séminaire Bourbaki, Juin 1985, n° 649.

[PS] G. POLYA, G. SZEGÖ, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Princeton University Press, 1951, ou Kraus Reprint Corporation.

Manuscrit reçu le 16 juin 1987.

Michel LANGEVIN,
U.A. 763 « Problèmes Diophantiens »
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05.