

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

KRZYSZTOF KURDYKA

Points réguliers d'un sous-analytique

Annales de l'institut Fourier, tome 38, n° 1 (1988), p. 133-156

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_1_133_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_1_133_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POINTS REGULIERS D'UN SOUS-ANALYTIQUE

par Krzysztof KURDYKA

Nous allons donner une nouvelle démonstration du fait que l'ensemble des points réguliers d'un ensemble sous-analytique est sous-analytique. Ce théorème a été prouvé par Tamm [T] qui a utilisé essentiellement le théorème de désingularisation de Hironaka. Notre preuve est basée sur la théorie des ensembles sous-analytiques développée par Prof. Łojasiewicz et son groupe à Cracovie (voir [D.L.S.1] et [D.L.S.2] pour les résultats fondamentaux). Une brève exposition de cette théorie se trouve dans [D]. La théorie n'utilise pas la désingularisation ; elle peut être vue comme un prolongement naturel de la théorie des ensembles semi-analytiques (voir [L1], [L2]).

J'exprime ma reconnaissance à S. Łojasiewicz pour sa disponibilité et sa collaboration fructueuse. Je suis très reconnaissant à B. Malgrange qui a consacré de son temps à lire cet article. J'adresse mes remerciements à W. Pawlucki pour les très nombreuses discussions que nous avons eues ensemble et les remarques qui m'ont permis de raccourcir cet article. Je remercie vivement Z. Denkowska pour son amicale aide à la rédaction de ce texte.

Mots-clés : Stratifications sous-analytiques - Fonctions sous-analytiques - Développement de Puiseux - Différentielle de Gateaux - Fonction distance.

Table des matières

1. Stratifications sous-analytiques
2. Fonctions sous-analytiques
3. Théorème de Bochnak-Siciak
4. Propriétés différentielles des fonctions de classe SUBB
5. Preuve de la Proposition 4.3
6. Preuve de la Proposition 4.4
7. Points réguliers d'un sous-analytique

Dans cet article M et N désignent des variétés analytiques réelles de dimension finie. Rappelons que $A \subset M$ est sous-analytique dans M , si et seulement si pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage U , un espace vectoriel Z et F semi-analytique et relativement compact dans $M \times Z$ tel que

$$A \cap U = \pi(F)$$

où $\pi : M \times Z \rightarrow M$ est la projection canonique.

Désignons par $\text{SUB}(M)$ la famille de tous les ensembles sous-analytiques de M . Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction, pour $A \subset X$, on désigne la restriction de f à A par $f|_A$.

DÉFINITION. — *Un sous-ensemble $A \subset M$ est dit une feuille sous-analytique s'il est à la fois un ensemble sous-analytique de M et une sous-variété analytique de M (nous n'exigeons pas qu'une sous-variété soit fermée dans M).*

1. Stratifications sous-analytiques.

Par une stratification sous-analytique de M on entend une décomposition localement finie

$$M = \bigcup \Gamma_\nu$$

où les Γ_ν sont des feuilles sous-analytiques, connexes, disjointes, telles que si $\Gamma_\mu \cap (\overline{\Gamma}_\nu \setminus \Gamma_\nu) \neq \emptyset$, alors $\Gamma_\mu \subset \overline{\Gamma}_\nu \setminus \Gamma_\nu$ et $\dim \Gamma_\mu < \dim \Gamma_\nu$.

On appelle les Γ_ν les strates de la stratification.

On dit qu'une stratification est compatible avec une famille $\{E_i\}_{i \in I}$ de sous-ensembles de M , si pour chaque Γ_ν et chaque E_i on a $\Gamma_\nu \subset E_i$ ou bien $\Gamma_\nu \cap E_i = \emptyset$.

Dans la suite, on dira tout court stratification au lieu de dire stratification sous-analytique.

Rappelons les propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques (voir [DLS1], [DLS2], [DS]).

(1.1) THÉORÈME. — i) La famille $\text{SUB}(M)$ est fermée par rapport à l'union, l'intersection localement finie, et la différence des ensembles.

ii) Si $E \in \text{SUB}(M)$ et $F \in \text{SUB}(N)$, alors $E \times F \in \text{SUB}(M \times N)$.

iii) Si $E \in \text{SUB}(M)$, alors $\text{Int } E$, $\overline{E} \in \text{SUB}(M)$; de plus, chaque composante connexe de E appartient à $\text{SUB}(M)$.

iv) Pour chaque famille $\{E_i\}_{i \in I}$ localement finie d'ensembles sous-analytiques, il existe une stratification sous-analytique, compatible avec la famille $\{E_i\}_{i \in I}$.

v) Soit $\varphi : M \rightarrow N$ une application analytique, et soit $E \subset \text{SUB}(M)$ tel que $\varphi|_{\overline{E}}$ soit propre; alors $\varphi(E) \in \text{SUB}(N)$. Evidemment, $\varphi^{-1}(F) \in \text{SUB}(M)$ pour chaque $F \in \text{SUB}(N)$.

Maintenant on va donner quelques lemmes sur les stratifications sous-analytiques.

(1.2) DÉFINITION. — Soit $\mathcal{A}$ une famille de feuilles sous-analytiques de M . Nous dirons que $\mathcal{A}$ est une famille stratifiante si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

α) si $\Gamma \in \mathcal{A}$ et T est une feuille sous-analytique contenue dans Γ , alors $T \in \mathcal{A}$;

β) pour chaque feuille sous-analytique Δ de M , il existe une feuille $\Gamma \in \mathcal{A}$, tel que Γ est ouvert et dense dans Δ ; autrement dit $\Delta \setminus \Gamma$ est fermé dans Δ et $\dim(\Delta \setminus \Gamma) < \dim \Delta$.

La dimension d'un ensemble sous-analytique E est définie comme le maximum des dimensions des sous-variétés analytiques contenues dans E .

(1.3) LEMME. — Soit $\mathcal{A}$ une famille stratifiante d'ensembles sous-analytiques de M , et $\{E_i\}_{i \in I}$ une famille localement finie d'ensembles sous-analytiques dans M ; alors il existe une stratification $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ (tous les strates de $\mathcal{T}$ appartiennent à $\mathcal{A}$) de M compatible avec la famille $\{E_i\}_{i \in I}$.

Comme la preuve de ce lemme est analogue à la construction d'une stratification semi-analytique (voir [L]) ou sous-analytique (voir [DS]), nous allons seulement l'esquisser. Prenons une stratification $\mathcal{R}$ compatible avec la famille. Nous allons construire la stratification $\mathcal{T}$ par récurrence. Posons $\mathcal{T}_m = \mathcal{R}$, $m = \dim M$. Supposons que les stratifications $\mathcal{T}_m, \dots, \mathcal{T}_k$ sont déjà construites, et de plus si $T \in \mathcal{T}_i$ et $\dim T > i$, alors $T \in \mathcal{A}$.

Pour chaque strate $T \in \mathcal{T}_k$ de dimension k , il existe un $A_T \in \mathcal{A}$ ouvert et dense dans T . Pour obtenir $\mathcal{T}_{k-1}$ il suffit de prendre une stratification compatible avec $\mathcal{T}_k$ et $\{A_T : T \in \mathcal{T}_k, \dim T = k\}$. Il est clair que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ est notre stratification cherchée, puisque les ensembles qui ne contiennent qu'un point appartiennent à $\mathcal{A}$.

Dans la suite, nous aurons besoin d'un résultat de Hardt sur la stratification d'une application analytique.

(1.4) DÉFINITION. — Soit $f : M \rightarrow N$ une application analytique, $\mathcal{T}$ une stratification de la variété M , $\mathcal{L}$ une stratification de la variété N . On dit que la paire de stratifications $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ est compatible avec l'application f , si et seulement si

- i) pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $f(T) \in \mathcal{L}$;
- ii) pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $t \in T$, $\text{rang}_t f|_T = \dim f(T)$;
- iii) si $f|_T$ est une immersion ($\text{rang } f|_T = \dim f|_T$), alors $f|_T$ est une injection.

(1.5) THÉORÈME (Hardt). — Soit $f : M \rightarrow N$ une application analytique. Etant donné deux familles localement finies

$\mathcal{B} \subset \text{SUB}(M)$ et $\mathcal{C} \subset \text{SUB}(N)$ et un ensemble ouvert $K \in \text{SUB}(M)$, tel que $f|_{\overline{K}}$ soit propre, il existe une stratification $\mathcal{L}$ compatible avec $\mathcal{C}$ et une stratification $\mathcal{T}$ compatible avec $\mathcal{B}$ et K telles que la paire $(\mathcal{T}_K, \mathcal{L})$ soit compatible avec $f|_K$, où $\mathcal{T}_K = \{T \in \mathcal{T}, T \subset K\}$.

La preuve de ce résultat dans [Ha] est basée sur les propriétés des ensembles semi-analytiques.

(1.5A) COROLLAIRE. — Soit $\pi : M \times \mathbf{R} \rightarrow M$ la projection canonique et soit $K \in \text{SUB}(M \times \mathbf{R})$ ouvert dans $M \times \mathbf{R}$, tel que $\pi|_{\overline{K}}$ soit propre. Supposons que $\mathcal{B} \subset \text{SUB}(M \times \mathbf{R})$ et $\mathcal{C} \subset \text{SUB}(M)$ soient des familles localement finies. Alors, il existe une stratification $\mathcal{T}$ de la variété $M \times \mathbf{R}$ compatible avec $\mathcal{B}$ et K est une stratification $\mathcal{L}$ de la variété M compatible avec $\mathcal{C}$ vérifiant la propriété suivante :

si $L \in \mathcal{L}$, alors $\pi^{-1}(L) \cap \overline{K} = \bigcup_{i=0}^k G_i \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} P_i$, G_i et P_i sont des strates de la stratification $\mathcal{T}$ de la forme suivante :

G_i est le graphe d'une fonction analytique $g_i : L \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 0, \dots, k$. Les fonctions g_i sont ordonnées de façon croissante. Les strates P_i sont de la forme

$$P_i = \{(x, t) \in L \times \mathbf{R} : g_i(x) < t < g_{i+1}(x)\} \quad i = 0, \dots, k-1.$$

(1.6) DÉFINITION. — Soit $\mathcal{T}$ une stratification de $M \times N$ et $\mathcal{L}$ une stratification de M ; on dit que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ vérifie la condition (+), si pour chaque $L \in \mathcal{L}$, il existe un ensemble $W_L \neq \emptyset$ ouvert dans N et une strate $T \in \mathcal{T}$, tels que $L \times W_L \subset T$.

(1.7) PROPOSITION. — Soit $\mathcal{T}$ une stratification de $M \times N$ et $\mathcal{L}$ une stratification de M ; alors il existe une stratification $\mathcal{L}'$ de M compatible avec $\mathcal{L}$, telle que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L}')$ vérifie la condition (+).

Preuve. — Observons d'abord que si N' est un ouvert sous-analytique dans N et si la condition (+) est vérifiée par $(\mathcal{T}', \mathcal{L})$ ($\mathcal{T}' =$ composantes connexes de $T \cap N'$, $T \in \mathcal{T}$) alors la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ vérifie la condition (+) aussi. Donc, il suffit de prouver cette proposition pour $N = \mathbf{R}^n$ sous la forme suivante :

(1.7A) PROPOSITION. — Soient $M, \mathcal{T}$ et $\mathcal{L}$ comme ci-dessus, $N = \mathbb{R}^n$. Alors il existe une stratification $\mathcal{L}'$ de M compatible avec $\mathcal{L}$ telle que pour chaque $L \in \mathcal{L}'$ il existe un ouvert $V_L \neq \emptyset$ dans $]0, 1[^n$ tel que

$$L \times V_L \subset T \quad \text{pour un } T \in \mathcal{T}.$$

Preuve de la Proposition (1.7a). — On va procéder par récurrence sur n . Selon le théorème 1.5, on peut admettre que la paire $(\mathcal{T}_{M \times]0, 1[}, \mathcal{L})$ est compatible avec la projection

$$\pi : M \times]0, 1[\longrightarrow M.$$

En effet, si la proposition 1.7a est vraie pour une stratification $\mathcal{T}'$ compatible avec $\mathcal{T}$, alors elle est vraie pour $\mathcal{T}$. Dans la suite, on va appliquer le lemme 1.3. La famille de feuilles $\mathcal{A} \subset \text{SUB}(M)$ est définie de la manière suivante :

$L \in \mathcal{A} \iff$ pour chaque composante connexe S de la feuille L , il existe un ouvert non vide $V_S \subset]0, 1[^n$ tel que $S \times V_S \subset T$ pour un $T \in \mathcal{T}$.

Pour se convaincre que $\mathcal{A}$ est une famille stratifiante, il suffit de vérifier la condition (β) de la Définition 1.2, car (α) est évident.

Soit donc L une feuille sous-analytique. Il faut prouver qu'il existe un ensemble $E_L \in \text{SUB}(M)$ fermé et rare dans L , tel que $(L \setminus E_L) \in \mathcal{A}$. Evidemment, il suffit de le prouver pour des feuilles connexes. En plus, on peut admettre que la feuille L est contenue dans une feuille de la stratification $\mathcal{L}$; en effet, il suffit de se limiter aux composantes connexes de l'ensemble

$$\bigcup L \cap \Gamma : \{\Gamma \in \mathcal{L} : \dim \Gamma \cap L = \dim L\}$$

parce que le complémentaire de cet ensemble dans L est fermé et rare. Il résulte de ceci qu'on peut admettre, à cause de la condition (α) , que $L \in \mathcal{L}$. On a donc, selon le corollaire 1.5a,

$$L \times [0, 1] = \bigcup_{i=0}^k G_i \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} P_i$$

où toutes G_i, P_i sont des strates de stratification $\mathcal{T}$. Rappelons les notations : G_i est le graphe d'une fonction analytique $g_i : L \rightarrow \mathbb{R}$ et

$P_i = \{(x, t) \in L \times \mathbf{R} : g_i(x) < t < g_{i+1}(x)\}$; enfin, les fonctions g_i sont ordonnées de façon croissante, donc $g_0 \equiv 0$ et $g_k \equiv 1$.

Maintenant on va partager l'intervalle $(0, 1)$ en k intervalles $W_i =]\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}[$, $i = 1, \dots, k$. Observons que pour chaque $x \in L$ il existe un $i \in [1, k]$ tel que

$$g_j(x) \notin W_i \quad \text{pour chaque } j = 1, \dots, k-1 .$$

Posons $G_i = \{x \in L : g_j(x) \notin W_i \text{ pour chaque } j = 1, \dots, k-1\}$, $i = 1, \dots, k$. Les G_i sont sous-analytiques et on a

$$L = \bigcup_{i=1}^k G_i .$$

Posons $E_L = \bigcup_{i=1}^k (\overline{G_i} \setminus G_i)$. Soit S une composante connexe de $L \setminus E_L$, alors $S \subset G_i$ pour un $i \in [1, k]$, donc

$$S \times W_i \subset P_j \text{ pour un } j \in [0, k-1]$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 1.7a pour $n = 1$.

Supposons que la proposition 1.7a soit vraie pour n .

Soient $\mathcal{T}$ une stratification de $M \times \mathbf{R}^{n+1}$ et $\mathcal{L}$ une stratification de M . Posons $M' = M \times \mathbf{R}$. Selon l'hypothèse de récurrence, il existe une stratification $\mathcal{S}$ de M' , telle que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ vérifie la condition (+); par suite, il existe $\mathcal{L}'$, une stratification de M , telle que la paire $(\mathcal{S}, \mathcal{L}')$ vérifie la condition (+); on peut choisir $\mathcal{L}'$ de telle façon qu'elle soit compatible avec $\mathcal{L}$. La paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L}')$ vérifie (+).

2. Les fonctions sous-analytiques.

(2.1) DÉFINITION. — Soit $f : U \rightarrow N$ une fonction, où U est un sous-ensemble de M . On dit que f est sous-analytique si et seulement si $f \subset \text{SUB}(M \times N)$. (*)

(*) Dans cet article on considère les fonctions comme des sous-ensembles des produits correspondants.

La composée de deux fonctions sous-analytiques n'est pas toujours sous-analytique, mais on a le lemme suivant (voir [DLS1]).

(2.2) LEMME. — Soient $U \subset L$ et $V \subset M$, $f : U \rightarrow M$ et $g : V \rightarrow N$ des fonctions sous-analytiques. Supposons que pour chaque K relativement compact dans N , l'ensemble $g^{-1}(K) \cap f(U)$ est relativement compact dans M , alors la fonction $g \circ f$ est sous-analytique.

Preuve. — Considérons l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \in L \times M \times N : y = f(x), z = g(y)\} = (f \times N) \cap (L \times g).$$

Evidemment $E \in \text{SUB}(L \times M \times N)$. Notons par π la projection naturelle $L \times M \times N \rightarrow L \times N$. Du théorème 1.1, il résulte que

$$\pi(E) = g \circ f \in \text{SUB}(L \times N).$$

Notons $\tau : \mathbf{R} \ni t \rightarrow \mathbf{R} \cdot (t, 1) \in \mathbf{P}^1$ le plongement de $\mathbf{R}$ dans son adhérence projective. On va étudier la classe suivante de fonctions qui a été considérée par Bierstone et Schwarz [Bi-Sc].

(2.3) DÉFINITION. — Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction, $U \subset M$. On dit que $f \in \text{SUBB}(M)$ (f est de la classe SUBB) si et seulement si $\tau \circ f : U \rightarrow \mathbf{P}^1$ est sous-analytique. Ceci équivaut à dire que f et $\frac{1}{f}$ (défini sur $U \setminus f^{-1}(0)$) sont sous-analytiques.

Remarque. — Cette classe a été considérée aussi par Tamm [T], mais sa définition est ambiguë, car si on remplace τ par un autre plongement $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P}^1$ qui n'a pas un graphe sous-analytique, on obtient une classe différente de $\text{SUBB}(M)$.

Voici des propriétés élémentaires des fonctions de la classe SUBB.

(2.4) THÉORÈME. — Soit U un sous-ensemble d'une variété M .

i) Si $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in \text{SUBB}(M)$, alors $U \in \text{SUB}(M)$; de plus, il existe une stratification $\mathcal{T}$ de M , compatible avec U , telle que pour $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U$, la fonction $f|_T$ est analytique.

ii) Si $f \in \text{SUBB}(M)$, alors l'ensemble des points de continuité de f est sous-analytique dans M .

iii) Supposons que $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ soit sous-analytique et que pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage Ω tel que $f|_{\Omega \cap U}$ soit bornée; alors $f \in \text{SUBB}(M)$.

iv) Si $f, g : U \rightarrow \mathbf{R}$; $f, g \in \text{SUBB}(M)$, alors $(f + g), (fg) \in \text{SUBB}(M)$.

v) Soit $f : V \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in \text{SUBB}(M \times \mathbf{R})$, où V est un voisinage ouvert de $U \times \{0\}$ dans $U \times \mathbf{R}$, U étant un sous-ensemble de M . Alors l'ensemble

$V_k = \{(x, s) \in V \subset U \times \mathbf{R} : \frac{d^k}{dt^k}(t \rightarrow f(x, s + t)) \text{ existe pour } t = 0\}$
est sous-analytique pour chaque $k \in \mathbf{N}$; de plus, la fonction

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k} : V_k \ni (x, t) \longrightarrow \left[\frac{d^k}{dt^k}(t \rightarrow f(x, s + t))(0) \right] \in \mathbf{R}$$

est de classe $\text{SUBB}(M \times \mathbf{R})$.

vi) Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n)$; pour chaque $\alpha \in \mathbf{N}^n$ $\frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha}$ (définie sur son domaine d'existence) est de la classe $\text{SUBB}(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. — (i) – (iii) s'obtiennent facilement à partir des théorèmes 1.1 et 1.5. Montrons (iv). Posons

$$(+): \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (x, y) \longrightarrow (x + y) \in \mathbf{R}.$$

Observons que

$$\tau \circ (+) \circ (\tau^{-1} \times \tau^{-1}) : (\mathbf{P}^1 \setminus \infty) \times (\mathbf{P}^1 \setminus \infty) \longrightarrow \mathbf{P}^1$$

est sous-analytique (et même semi-analytique), où $\infty = \mathbf{R} \cdot (1, 0)$.

Il nous faut vérifier qu'on a $(f + g) = (+) \circ (f, g) \in \text{SUBB}(M)$

$$\tau \circ (+) \circ (f, g) = [\tau \circ (+) \circ (\tau^{-1} \times \tau^{-1})] \circ [(\tau \circ f), (\tau \circ g)].$$

Les fonctions dans les crochets sont sous-analytiques; alors, en vertu du lemme 2.2, on obtient $(f + g) \in \text{SUBB}(M)$. De la même façon, on montre que $(f \cdot g) \in \text{SUBB}(M)$.

(iv) implique (v). En effet, la fonction

$$\varphi : \tilde{V} \ni (x, t, s) \longrightarrow \frac{f(x, t + s) - f(x, t)}{s} \in \mathbf{R}$$

$\varphi \in \text{SUBB}(M \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, où $\tilde{V} = \{(x, t, s) \in (M \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) : (x, t) \in V, s \neq 0, (x, t + s) \in V\}$. Supposons que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe; alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \overline{\varphi} \cap (V \times \{0\} \times \mathbf{R})$$

on a aussi

$$\tau \circ \frac{\partial f}{\partial t} = \overline{\tau \circ \varphi} \cap (V \times \{0\} \times \mathbf{P}^1) \in \text{SUBB}(M \times \mathbf{R} \times \mathbf{P}^1),$$

donc $\frac{\partial f}{\partial t} \in \text{SUBB}(M \times \mathbf{R})$. En procédant de manière analogue, on montre le résultat pour chaque $k \in \mathbf{N}$. De (v) on déduit immédiatement (vi).

(2.5) LEMME. — Soit L une feuille sous-analytique relativement compacte dans M . Soit $g_i : L \rightarrow \mathbf{R}$, $i \in I$ une famille de fonctions analytiques et sous-analytiques. Alors, il existe $i_1, \dots, i_s \in I$ tels que

$$\bigcap_{i \in I} g_i^{-1}\{0\} = g_{i_1}^{-1}(0) \cap \dots \cap g_{i_s}^{-1}(0).$$

Preuve. — La feuille L possède un nombre fini des composantes connexes. Il suffit donc de prouver ce lemme pour L connexe. On va procéder par récurrence sur la dimension de L . Pour $\dim L = 0$ le lemme est trivial.

Supposons que $\dim L = n$. Si $g_i \equiv 0$ pour chaque $i \in I$, le lemme est vérifié. Si non, $g_k \not\equiv 0$ pour un $k \in I$. Observons que $g_k^{-1}(0)$ est rare et fermé, car g_k est analytique dans l'ensemble connexe L . D'où $\dim g_k^{-1}(0) < n$ ($g_k^{-1}(0)$ est évidemment sous-analytique). Prenons une stratification compatible avec $g_k^{-1}(0)$, alors

$$g_k^{-1}(0) = \bigcup \Gamma_\nu \quad \text{la réunion étant finie.}$$

Toutes les feuilles Γ_ν sont de dimension plus petite que n . Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour chacune de ces feuilles.

Rappelons maintenant le théorème de Puiseux et quelques corollaires qui en résultent.

(2.6) LEMME. — Soit $f : [0, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction sous-analytique et continue. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbf{N}$ et $h(t) =$

$\sum_0^\infty \alpha_i \cdot t^i$ une fonction analytique dans un voisinage de $0 \in \mathbf{R}$ tels que

$$f(t) = h(t^{1/k}) \quad \text{pour } t \in [0, \varepsilon) .$$

Par conséquent, on a un développement de f en série de Puiseux

$$f(t) = \sum_0^\infty \alpha_i t^{i/k} \quad \text{convergent uniformément.}$$

On appelle ce lemme, le théorème de Puiseux "réel". On le déduit du théorème de Puiseux "complexe" et du fait que chaque ensemble sous-analytique de dimension 1 est semi-analytique (voir [L1] p. 127). Le théorème de Puiseux "complexe" est un résultat classique : pour sa preuve, voir par exemple [W] p. 31. Dans [Pa] se trouve une généralisation du lemme 2.6 que l'on va appliquer dans la suite.

Du lemme 2.6, on déduit

(2.7) COROLLAIRE. — Si $f : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction sous-analytique et continue, alors il existe $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbf{N}$ et des fonctions $h_1(t) = \sum_0^\infty \alpha_i \cdot t^i$ et $h_2(t) = \sum_0^\infty \beta_i \cdot t^i$ analytiques dans un voisinage de $0 \in \mathbf{R}$ tels que

$$f(t) = h_1(t^{1/k}) = \sum_0^\infty \alpha_i \cdot t^{i/k} \quad \text{pour } t \in [0, \varepsilon)$$

$$f(t) = h_2((-t)^{1/k}) = \sum_0^\infty \beta_i \cdot (-t)^{i/k} \quad \text{pour } t \in (-\varepsilon, 0]$$

d'où on obtient

(2.8) COROLLAIRE. — Avec les notations ci-dessus, f est de classe C^s dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$ si et seulement si le système des équations suivantes est vérifié :

$$(P_s) \begin{cases} \alpha_i = \beta_i = 0 & \text{pour } \{i \in \mathbf{N} : i < k \cdot s, i/k \notin \mathbf{N}\} \\ \alpha_i - \beta_i = 0 & \text{pour } \{i \in \mathbf{N} : i \leq k \cdot s, i/k \in 2\mathbf{N}\} \\ \alpha_i + \beta_i = 0 & \text{pour } \{i \in \mathbf{N} : i \leq k \cdot s, i/k \in 2\mathbf{N} + 1\} \end{cases}$$

où par $2N$ et $2N + 1$ on a désigné les nombres pairs et impairs.

(2.9) COROLLAIRE. — Soit f comme ci-dessus; alors f est de classe C^∞ dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$ si et seulement si f est analytique dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

3. Théorème de Bochnak et Siciak.

Rappelons la définition de la différentielle de Gateaux.

(3.1) DÉFINITION. — Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Supposons que, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \rightarrow f(a + tx)$ possède une dérivée k -ième en $t = 0$. Par $\delta_a^k f$, on désigne l'application suivante :

$$\delta_a^k f : \mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow \frac{d^k}{dt^k} f(a + tx)(0) \in \mathbb{R}$$

si $\delta_a^k f$ est un polynôme homogène du degré k , on appelle $\delta_a^k f$ la k -ième différentielle de Gateaux de la fonction f au point a . On dit que f est de classe G^p ($f \in G^p(U)$) si f possède des différentielles de Gateaux pour $k = 1, \dots, p$ en chaque point $a \in U$. On écrit $f \in G^\infty(U)$ lorsque $f \in G^p(U)$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$.

(3.2) THÉORÈME (Bochnak, Siciak [B.S]). — Supposons que $f \in G^\infty(U)$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que de plus f soit analytique dans chaque intervalle contenu dans U ; alors f est analytique dans U .

4. Propriétés différentielles des fonctions de classe SUBB.

Dans cette partie, on va donner des résultats concernant les fonctions de classe SUBB. Les preuves de ces résultats se trouvent dans les paragraphes 5 et 6.

Les corollaires obtenus en 5 et 6 seront utilisés dans la preuve du théorème sur les points réguliers d'un sous-analytique.

(4.1) THÉORÈME. — Soient U un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, et $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, avec $f \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n)$. Alors, il existe un entier $r \in \mathbf{N}$ tel que si f est de classe G^r au voisinage de $x \in U$, alors f est analytique au point x .

Ce théorème est un renforcement du résultat de Tamm (théorème 2.3.3 dans [T]) qui, après reformulation, s'énonce ainsi :

(4.2) THÉORÈME. — Soient U et f comme ci-dessus; alors il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ possédant la propriété suivante :

Si f est de classe C^k dans un voisinage de $x \in U$, alors f est analytique au point x .

Observons d'abord qu'en vue du théorème 2.4 (ii), on peut admettre que dans le théorème 4.1, f est continue. Il résulte du théorème 3.2 (Bochnak, Siciak) que pour prouver le théorème 4.1 il nous suffit de démontrer les propositions suivantes.

(4.3) PROPOSITION. — Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n)$ une fonction continue; U étant un ouvert, borné de $\mathbf{R}^n$; alors il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ possédant la propriété suivante :

Si I est un intervalle ouvert de U et si f est de classe C^m sur I , alors f est analytique sur I .

(4.4) PROPOSITION. — Soient f et U comme ci-dessus, alors il existe un entier $i \in \mathbf{N}$ possédant la propriété suivante :

Si V est un ouvert de U et si $f|_V \in G^i(V)$, alors $f|_V \in G^\infty(V)$.

5. Démonstration de la Proposition 4.3.

Considérons l'application suivante :

$$\mathcal{E} : \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R} \ni (x, p, t) \longrightarrow (x + tp) \in \mathbf{R}^n$$

où par S^{n-1} on a désigné la sphère $\{y \in \mathbf{R}^n : |y| = 1\}$. Observons que l'ensemble

$$\mathcal{E}^{-1}(U) \cap (U \times S^{n-1} \times \mathbf{R})$$

est un voisinage dans $U \times S^{n-1} \times \mathbf{R}$ de $U \times S^{n-1} \times \{0\}$, alors l'ensemble

$$E = \mathcal{E}^{-1}(U) \cap (U \times S^{n-1} \times \{t \geq 0\})$$

est un voisinage dans $U \times S^{n-1} \times \{t \geq 0\}$ de $U \times S^{n-1} \times \{0\}$. Posons $\tilde{f} = f \circ \mathcal{E}|_E$. Bien sûr, $\tilde{f} \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$, car $E \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ et $\mathcal{E}$ est analytique dans la sous-variété fermée $\mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R}$.

On a le lemme suivant :

(5.1) LEMME. — *Il existe une stratification $\mathcal{T}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, compatible avec $U \times S^{n-1}$ et un entier $k \in 2\mathbf{N}$ tels que pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ la fonction*

$$E_T \ni (x, p, t) \longrightarrow \tilde{f}(x, p, t^k) = f(x + t^k p) \in \mathbf{R}$$

où $E_T = \{(x, p, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : (x, p) \in T, (x, p, |t|) \in E\}$ est analytique dans un voisinage dans $T \times \mathbf{R}$ de $T \times \{0\}$.

Preuve du lemme 5.1. — En utilisant le théorème 1.5 et le théorème 2.4 (i), on obtient une stratification $\mathcal{S}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ et une stratification $\mathcal{T}'$ de $\mathbf{R}^n$ telles que :

- $\mathcal{T}'$ est compatible avec $U \times S^{n-1}$;
- $\mathcal{S}$ est compatible avec E et $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times (-1, 1)$;
- pour chaque $S \in \mathcal{S}$, $S \subset E$ la fonction $\tilde{f}|_S$ est analytique ;
- la paire $(\mathcal{S}, \mathcal{T}')$ est compatible avec la projection $\pi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Pour obtenir la stratification désirée $\mathcal{T}$ dans le lemme 5.1, on va appliquer le lemme 1.3. On va définir la famille $\mathcal{A}$ de la manière suivante :

Une feuille $\Gamma \in \mathcal{A} \iff$ pour chaque composante connexe T de $\text{Int}_\Gamma \Gamma \cap (U \times S^{n-1})$ il existe un entier $r(T) \in 2\mathbf{N}$, tel que la fonction $\{(x, p, t) \in T \times \mathbf{R} : (x, p, |t|) \in E\} \ni (x, p, t) \longrightarrow \tilde{f}(x, p, t^{r(T)}) \in \mathbf{R}$ est analytique dans un voisinage dans $T \times \mathbf{R}$ de $T \times \{0\}$.

On obtient donc une stratification $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ qui vérifie la conclusion du lemme 5.1. L'entier k égale le plus petit commun multiple des $r(T)$; $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$.

Dans le lemme 1.3, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{A}$ vérifie les conditions (α) et (β) de la définition (1.2). La condition (α) est remplie trivialement. Considérons la condition (β) . Il nous faut démontrer que pour chaque feuille $\Gamma \in \text{SUB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ il existe un $A_\Gamma \in \text{SUB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ fermé et rare dans Γ tel que $\Gamma \setminus A_\Gamma \in \mathcal{A}$.

Remarquons qu'il suffit de traiter le cas où $\Gamma \in T'$, $\Gamma \subset U \times S^n$, car $\bigcup \{T \in T' : T \subset \overline{U \times S^{n-1}}, \dim T < \dim \Gamma\}$ est fermé et rare dans Γ . Supposons que $T \in T'$ et $T \subset U \times S^{n-1}$. Selon le corollaire 1.5a, il existe une fonction analytique dans T , $g \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ telle que

$$P(0, g) = \{(x, p, t) : (x, p) \in T, 0 < t < g(x, p)\} \in \mathcal{S}$$

en plus $P(0, g) \subset E$. L'application

$$h : T \times \mathbf{R} \ni (x, t) \longrightarrow (x, g(x, p) \cdot t) \in T \times \mathbf{R}$$

est un difféomorphisme analytique et sous-analytique.

Il résulte du lemme 2.2 que

$$\psi = \tilde{f} \circ h|_{T \times (0,1)} \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}).$$

La fonction ψ est analytique. Posons

$$\iota : \mathbf{P}^1 \ni \mathbf{R} \cdot x \longrightarrow \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2}, i, j = 1, 2 \right) \in \mathbf{R}^4$$

le plongement du $\mathbf{P}^1$ dans $\mathbf{R}^4$. On appelle τ le plongement $\mathbf{R} \ni t \rightarrow \mathbf{R} \cdot (t, 1) \in \mathbf{P}^1$.

La fonction

$$\iota \circ \tau \circ \psi : T \times (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}^4$$

est analytique, bornée et sous-analytique. L'ensemble cherché A_Γ , s'obtient à partir du théorème de Puiseux pour les applications sous-analytiques [Pa]. Ce théorème s'énonce ainsi :

Soient X et Y des espaces vectoriels réels, $\Gamma \in \text{SUBB}(X)$ une feuille relativement compacte, et $\varphi : \Gamma \times (0, 1) \rightarrow Y$ une application analytique, bornée et sous-analytique; alors il existe un ensemble fermé $A_\Gamma \in \text{SUB}(X)$, avec $\dim A_\Gamma < \dim \Gamma$ (donc A_Γ est rare dans Γ), et un entier $r \in \mathbf{N}$, tels que pour chaque $a \in \Gamma \setminus A_\Gamma$ l'application $(x, t) \rightarrow \varphi(x, t^r)$ possède une extension analytique dans un voisinage de $(a, 0)$ dans $\Gamma \times \mathbf{R}$.

L'exposant $r \in \mathbf{N}$ peut être remplacé par un multiple. Il convient de prendre $r \in 2\mathbf{N}$ pair.

Nous avons donc A_T rare et fermé dans T tel que :

$$(T \setminus A_T) \times (-1, 1) \ni (x, p, t) \longrightarrow \iota \circ \tau \circ \psi(x, p, t^{r(T)}) \in \mathbf{R}$$

est analytique. D'où $T \setminus A_T \in \mathcal{A}$, car ι et τ sont des plongements et h est un difféomorphisme. Ceci termine la preuve du lemme 5.1.

Remarque. — La stratification $\mathcal{T}$ dans le lemme 5.1 peut être choisie de telle façon que la fonction

$$\{(x, p, t) \in T \times : (x, p, |t|) \in E\} \ni (x, p, t) \longmapsto \tilde{f} \circ s(x, p, t^k) = f(x - t^k p) \in \mathbf{R}$$

soit aussi analytique dans un voisinage de $T \times \{0\}$ dans $T \times \mathbf{R}$ pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$. On a noté par s l'application

$$s : \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R} \ni (x, p, t) \rightarrow (x, -p, t) \in \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R}.$$

Les fonctions

$$g_1(x, p, t) = f(x + t^k p) \quad \text{et} \quad g_2(x, p, t) = f(x - t^k p)$$

$$g_1, g_2 : \{(x, p, t) : (x, p, |t|) \in E\} \rightarrow \mathbf{R}$$

appartiennent à la classe $\text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$. Il résulte du théorème 2.4 (v) que

$$\alpha_i(x, p) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i g_1}{\partial t^i}(x, p, 0) \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n), \quad i \in \mathbf{N}$$

$$\beta_i(x, p) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i g_2}{\partial t^i}(x, p, 0) \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n), \quad i \in \mathbf{N}$$

et aussi $(\alpha_i \pm \beta_i) \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ pour $i \in \mathbf{N}$.

A présent, on va prouver la proposition 4.3. Fixons $x \in \mathbf{R}^n$ et $p \in S^{n-1}$. Notons par $l = x + \mathbf{R}p$ la droite affine correspondante. La fonction $f|_l$ est de classe C^s dans un voisinage de x si et seulement si la fonction $t \rightarrow f(x + tp)$ est de classe C^s dans un voisinage de $0 \in \mathbf{R}$ ce qui équivaut au fait que $\alpha_i(x, p)$, $\beta_i(x, p)$, $i = 1, \dots, k \cdot s$ vérifient le système d'équations P_s (voir le corollaire 2.8). Observons que toutes les fonctions dans le système P_s sont analytiques et sous-analytiques dans chaque strate $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ (il n'y a qu'un nombre fini de ces strates car U est relativement compact).

Appliquons pour le système infini d'équations P_s , $s \in \mathbb{N}$ dans chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ le lemme 2.5. On obtient pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ un entier $m(T) \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $(x, p) \in T$ on a la propriété suivante :

Si $\alpha_i(x, p), \beta_i(x, p)$ vérifient le système $P_{m(T)}$, alors $\alpha_i(x, p), \beta_i(x, p)$ vérifient le système P_s pour chaque $s \in \mathbb{N}$.

Désignons par m le plus grand des nombres $m(T)$, $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$. Selon les corollaires 2.8 et 2.9 m vérifient la conclusion de la proposition 4.3.

Avec les mêmes notations qu'au théorème 4.1, on a :

COROLLAIRE 5.2. — Il existe un ensemble sous-analytique ouvert $U_1 \subset U$ tel que :

- Si I est un intervalle ouvert de U_1 , alors $f|_I$ est analytique.
- Si f est analytique en x , alors $x \in U_1$.

Preuve. — Posons

$U'_1 = \{(x, p) \in U \times S^{n-1} : \alpha_i(x, p), \beta_i(x, p) \text{ vérifient le système } P_s \text{ pour chaque } s \in \mathbb{N}\}$.

En vue de ce qu'on a déjà démontré, on a :

$U'_1 = \{(x, p) \in U \times S^{n-1} : \alpha_i(x, p), \beta_i(x, p) \text{ vérifient le système } P_s \text{ pour } s \leq m\}$. Il en résulte que U'_1 est sous-analytique.

Observons que : si f est analytique dans un ouvert V , alors $V \times S^{n-1} \subset U'_1$.

L'ensemble

$$\tilde{U}_1 = U \setminus \pi(U \times S^{n-1} \setminus U'_1)$$

est aussi sous-analytique, avec $\pi : \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection canonique.

On pose alors

$$U_1 = \text{Int } \tilde{U}_1.$$

6. Démonstration de la Proposition 4.4.

D'abord on va énoncer un lemme qui implique la proposition 4.4.

(6.1) LEMME. — Soit $f : U_1 \rightarrow \mathbf{R}$ la restriction de la fonction f à l'ensemble U_1 défini dans le corollaire 5.2. Alors il existe une stratification $\mathcal{R}$ compatible avec $U_1 \times S^{n-1}$ et des fonctions

$$w_i : U_1 \times S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}, \quad i \in \mathbf{N}$$

sous-analytiques et analytiques dans chaque strate de la stratification $\mathcal{R}$ contenue dans $U_1 \times S^{n-1}$ telles que f possède au point $z \in U_1$ une i -ème différentielle de Gateaux si et seulement si $w_i \equiv 0$ dans $\{z\} \times S^{n-1}$.

Appliquons le lemme 2.5 pour la famille des fonctions w_i , $i \in \mathbf{N}$, dans chaque strate $R \in \mathcal{R}$, $R \subset U_1 \times S^{n-1}$ (il y en a un nombre fini). On obtient donc un entier $l \in \mathbf{N}$ tel que $l \geq m$ (*) et

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{w_i = 0\} = \bigcap_{i=1}^l \{w_i = 0\}.$$

Bien sûr l'entier l vérifie la conclusion de la proposition 4.4. Il nous reste à démontrer le lemme 6.1.

On commence la preuve du lemme 6.1 par une simple remarque sur des polynômes homogènes. Notons par $P_d(\mathbf{R}^n)$ l'espace des polynômes homogènes du degré d sur $\mathbf{R}^n$. Soit $\mu(d) = \dim P_d(\mathbf{R}^n)$.

(6.2) Remarque. — Soit $\Omega \neq \emptyset$ un ouvert de S^{n-1} ; pour chaque $d \in \mathbf{N}$ il existe des points $p_1, \dots, p_{\mu(d)} \in \Omega$ possédant la propriété suivante :

Pour chaque suite de nombres $t_1, \dots, t_{\mu(d)} \in \mathbf{R}$ il existe exactement un polynôme $v \in P_d(\mathbf{R}^n)$ tel que

$$v(p_i) = t_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, \mu(d).$$

De plus, les coefficients de v dépendent linéairement de $t_1, \dots, t_{\mu(d)}$.

(*) l'entier m est celui de la proposition 4.3.

Maintenant, on va prouver le lemme 6.1.

Soient $\mathcal{T}$ une stratification compatible avec $U \times S^{n-1}$ et $k \in 2\mathbb{N}$ un entier pair vérifiant les conclusions du lemme 5.1.

La stratification cherchée $\mathcal{R}$, compatible avec $U_1 \times S^{n-1}$, est construite de la manière suivante :

1) Selon la proposition 1.6, il existe une stratification $\mathcal{L}'$ de $\mathbb{R}^n$ compatible avec U_1 telle que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L}')$ vérifie la condition (+) (voir la définition 1.6).

2) Il résulte du théorème 1.4 qu'il existe une stratification $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ compatible avec $\mathcal{T}$ et une stratification $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^n$ compatible avec $\mathcal{L}'$ telles que la paire $(\mathcal{R}_{S^{n-1}}, \mathcal{L})$ est compatible avec la restriction de la projection

$$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \rightarrow x \in \mathbb{R}^n \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$$

où $\mathcal{R}_{S^{n-1}} = \{R \in \mathcal{R} : R \subset \mathbb{R}^n \times S^{n-1}\}$.

Rappelons que les fonctions de classe $\text{SUBB}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\alpha_{ik} : U \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

définies au paragraphe 5 sont analytiques dans chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$. La fonction f est analytique dans chaque intervalle contenu dans U_1 ; de plus, on a :

$$\frac{d^i}{dt^i}(t \rightarrow f(x + tp))(0) = i! \alpha_{ik}(x, p)$$

pour chaque $(x, p) \in U_1 \times S^{n-1}$.

A présent, on va définir les fonctions w_i , $i \in \mathbb{N}$. Fixons $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble U_1 est une réunion de strates de la stratification $\mathcal{L}$. On va définir la fonction w_i sur chaque strate $L \times S^{n-1}$ séparément, $L \in \mathcal{L}$, $L \subset U_1$.

Fixons donc la strate $L \in \mathcal{L}$, $L \subset U_1$. La strate L est contenue dans une $L' \in \mathcal{L}'$. Il résulte de la condition (+) qu'il existe un ouvert $W_{L'} \neq \emptyset$ de S^{n-1} tel que

$$L' \times W_{L'} \subset T \quad \text{pour un} \quad T \in \mathcal{T},$$

donc $L \times W_{L'} \subset T$.

Choisissons des points $p_1, \dots, p_{\mu(i)} \in W_{L'}$ selon la remarque 6.2. Alors il existe des fonctions linéaires $a_1, \dots, a_{\mu(i)}$ (avec des

coefficients ne dépendant que des $p_1, \dots, p_{\mu(i)}$ sur $\mathbf{R}^{\mu(i)}$ possédant la propriété suivante :

Le polynôme unique $v \in P_i(\mathbf{R}^n)$ qui vérifie les équations :

$$v(p_j) = t_j$$

est le polynôme $\sum_{j=1}^{\mu(i)} a_j(t_1, \dots, t_{\mu(i)}) e_j$ où les e_j sont les monômes de degré i . Posons

$$v_i : L \times S^{n-1} \ni (x, p) \longmapsto$$

$$\sum_{j=1}^{\mu(i)} a_j(\alpha_{ik}(x, p_1), \dots, \alpha_{ik}(x, p_{\mu(i)})) e_j(p) \in \mathbf{R}.$$

En vue du théorème 2.4, $v_i \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

D'après la définition, f possède une i -ème différentielle de Gateaux dans $x \in U_1$ si et seulement si $\delta_x^i f$ est un polynôme homogène du degré i . On a déjà remarqué que :

$$\delta_x^i f|_{S^{n-1}} = i! \alpha_{i,k}|_{\{x\} \times S^{n-1}}.$$

Alors, f possède une i -ème différentielle de Gateaux dans x si et seulement si $\alpha_{i,k}|_{\{x\} \times S^{n-1}}$ est la restriction d'un polynôme homogène du degré i sur S^{n-1} ce qui équivaut à dire que

$$\alpha_{i,k}(x, p) = v_i(x, p) \quad \text{dans} \quad \{x\} \times S^{n-1}.$$

On définit w_i sur $L \times S^{n-1}$ de la façon suivante :

$$w_i(x, p) = \alpha_{i,k}(x, p) - v_i(x, p).$$

L'ensemble $L \times S^{n-1}$ est une réunion de strates de la stratification $\mathcal{R}$. La fonction w_i est analytique dans chacune de ces strates. Selon le théorème 2.4, $w_i \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, ce qui termine la démonstration du lemme 6.1.

Remarque. — Observons que, des raisonnements qu'on a faits dans les paragraphes 5 et 6, on peut déduire le corollaire suivant :

(6.3) COROLLAIRE. — Soit $f \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n)$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, alors pour chaque $k \in \mathbf{N}$ l'ensemble

$\{x \in U : f \text{ possède une } k\text{-ième différentielle de Gateaux en } x\}$
est sous-analytique.

7. Points réguliers d'un ensemble sous-analytique.

Soit A un sous-ensemble de M . Posons

$R(A) = \{x \in A : \text{le germe } A_x \text{ est le germe d'une sous-variété analytique de } M\}$.

Pour une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{R}$, $U \subset M$ on pose

$$R(f) = \{x \in U : f \text{ est analytique en } x\}.$$

Maintenant on va montrer le résultat principal.

(7.1) THÉORÈME (Tamm [T]). — Soit $A \in \text{SUB}(M)$, alors $R(A) \in \text{SUB}(M)$.

D'abord, on va prouver le fait suivant :

(7.2) THÉORÈME (Tamm [T]). — Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction sur un ouvert U de M , avec $f \in \text{SUBB}(M)$; alors $R(f) \in \text{SUB}(M)$.

Preuve. — On peut admettre que $M = \mathbf{R}^n$ et U est borné. En éliminant l'ensemble des points où f n'est pas continue, on peut admettre que f est continue. Dans ce cas, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ vérifie l'hypothèse de la proposition 4.3, donc selon le corollaire 5.2, on obtient un $U_1 \in \text{SUB}(\mathbf{R}^n)$ tel que f soit analytique dans chaque intervalle contenue dans U_1 , et que de plus, on ait $R(f) \subset U_1$.

Il résulte du lemme 6.1 qu'il existe une stratification $\mathcal{R}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, compatible avec $U_1 \times S^{n-1}$ et des fonctions

$$w_i : U_1 \times S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}, \quad i \in \mathbf{N}$$

sous-analytiques et analytiques dans chaque strate $R \in \mathcal{R}$, $R \subset U_1 \times S^{n-1}$. Les fonctions w_i possèdent les propriétés suivantes :

f possède au point $z \in U_1$ une i -ème différentielle de Gateaux si et seulement si $w_i \equiv 0$ sur $\{z\} \times S^{n-1}$.

Considérons l'ensemble

$$W'_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{w_i = 0\}.$$

D'après le lemme 2.5, on obtient un $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$W'_1 = \bigcap_{i=1}^l \{w_i = 0\}.$$

D'où on déduit que $W'_1 \in \text{SUB}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Soit $\pi : \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection naturelle. L'ensemble

$$\widetilde{W}_1 = U_1 \setminus \pi(U_1 \times S^{n-1} \setminus W'_1)$$

est sous-analytique, car π est propre. Alors l'ensemble

$$W_1 = \text{Int } \widetilde{W}_1$$

est aussi sous-analytique. On va démontrer que

$$R(f) = W_1.$$

L'inclusion $R(f) \subset W_1$ résulte de la construction de W_1 . L'inclusion réciproque se déduit du théorème de Bochnak-Siciak (théorème 4.1), car $f|_{W_1}$ est de classe G^∞ et f est analytique dans chaque intervalle contenu dans W_1 . Ceci achève la preuve du théorème 7.2.

Pour montrer le théorème 7.1, il nous faut deux lemmes.

(7.3) LEMME. — Soit $E \in \text{SUB}(\mathbb{R}^n)$, alors la fonction $\rho(x) = \inf_{y \in E} |x - y|$ de distance à l'ensemble E est sous-analytique.

La preuve de ce fait est analogue à la preuve du théorème qui dit que la fonction distance à un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique (voir [L1]); elle peut être trouvée par exemple dans [B.R].

(7.4) LEMME (Poly et Raby [P.R]). — Soit A un sous-ensemble localement fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit $\delta(x) = \inf_{y \in A} |x - y|^2$ le carré de la fonction distance à l'ensemble A . Soit $x \in A$, alors le germe A_x est le germe d'une variété sous-analytique si et seulement si la fonction δ est analytique en x .

Revenons à la preuve du théorème 7.1. On peut admettre que $M = \mathbb{R}^n$. L'ensemble

$$A' = A \setminus (\overline{A} \setminus A)$$

est localement fermé dans $\mathbb{R}^n$, et de plus $R(A) \subset A'$. Considérons la fonction

$$\delta(x) = \inf_{y \in A'} |x - y|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Du lemme 7.3, on déduit que $\delta \in \text{SUBB}(\mathbf{R}^n)$, car $\delta = \rho^2$ et ρ est localement bornée. D'après le lemme 7.4, on a

$$R(A) = R(\delta) \cap A'.$$

Selon le théorème 7.2, $R(\delta) \in \text{SUB}(\mathbf{R}^n)$, donc $R(A) \in \text{SUB}(\mathbf{R}^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bi.Sc] E. BIERSTONE, G.W. SCHWARZ. — Continuous linear division and extension of C^∞ functions, *Duke Math. Journal*, 50, n° 1 (1983), 233-271.
- [B.S] J. BOCHNAK, J. SICIĄK. — Analytic functions in topological vector spaces, *Studia Math.*, 39 (1971), 77-112.
- [B.R] J. BOCHNAK, J.J. RISLER. — Sur les exposants de Łojasiewicz, *Comment. Math. Helvetici*, 50(1975), 493-507.
- [D] Z. DENKOWSKA. — Une présentation de la théorie des sous-analytiques sans désingularisation. Séminaire d'Analyse P. Lelong, P. Dalbeaut, H. Skoda, années 83/84, *Lecture Notes in Maths*, 1198 (1986), 105-115.
- [D.L.S.1] Z. DENKOWSKA, S. ŁOJASIEWICZ, J. STASICA. — Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques, *Bull. Ac. Pol. Math.*, 27 (1979), 529-535.
- [D.L.S.2] Z. DENKOWSKA, S. ŁOJASIEWICZ, J. STASICA. — Sur le théorème du complémentaire pour les ensembles sous-analytiques, *Bull. Ac. Pol. Math.*, 27 (1979), 537-539.
- [D.S] Z. DENKOWSKA, J. STASICA. — Sur la stratification sous-analytique, *Bull. Ac. Pol. Math.*, 30 (1982), 337-340.
- [G] A.M. GABRIELOW. — Projection of semi-analytic set, *Func. Analiz i Iego Prilorkenija*, 2, n° 4 (1968), 18-30.
- [Ha] R. HARDT. — Stratification of real analytic mappings and images, *Invent. Math.*, 28 (1975), 193-208.
- [L1] S. ŁOJASIEWICZ. — Ensembles semi-analytiques, *Preprint I.H.E.S.*, 1965.
- [L2] S. ŁOJASIEWICZ. — Sur la semi-analyticité des images par l'application tangente, *Bull. Ac. Pol. Math.*, 27 (1979), 525-527.
- [Pa] W. PAWLUCKI. — Théorème de Puiseux pour une application sous-analytique, *Bull. Ac. Pol. Math.*, 32 (1984), 555-559.
- [P.R] J.B. POLY, G. RABY. — Fonction distance et singularités, *Bull. Sc. Math. 2e série*, 108 (1984), 187-195.

- [T] M. TAMM. — Subanalytic sets in calculus of variation, *Acta Math. Uppsala*, 146 (1981), 167-199.
- [W] H. WHITNEY. — *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1972.

Manuscrit reçu le 10 avril 1985
révisé le 13 avril 1987.

Krzysztof KURDYKA,
Uniwersytet Jagiellonski
Instytut Matematyki
ul. Reymonta 4
30-050 KRAKOW (Pologne).