ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN HÉNAUT

Cycle exceptionnel de l'éclatement d'un idéal définissant l'origine de C^n et applications

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 3 (1987), p. 143-157

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_143_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 3 (1987), 143-157

CYCLE EXCEPTIONNEL DE L'ÉCLATEMENT D'UN IDÉAL DÉFINISSANT L'ORIGINE DE $\mathbf{C}^n$ ET APPLICATIONS

par
Alain HENAUT

0. Introduction.

On note $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathbf{C}\{z\} = \mathbf{C}\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$.

Soit I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de $\mathbf{C}\{z\}$, c'est-à-dire définissant l'origine de $\mathbf{C}^n$ ($\sqrt{\mathrm{I}} = \mathfrak{m}$), alors I est engendré par $n + p$ éléments de $\mathbf{C}\{z\}$ notés $f_1, f_2, \ldots, f_{n+p}$ où $p \geqslant 0$ et l'on peut supposer que l'on a un morphisme analytique fini $f : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbf{C}^{n+p}$ dont les composantes sont des représentants des f_i pour $1 \leqslant i \leqslant n+p$ où U est un polydisque ouvert de $\mathbf{C}^n$ centré en 0.

On désigne par $\pi : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{U}$ l'éclatement de U relativement à I et $\mathrm{E} = \mathrm{Projan}\,(\bigoplus_{\nu \geqslant 0} \mathrm{I}^\nu/\mathrm{I}^{\nu+1})$ sa fibre exceptionnelle. On rappelle que si $\sigma : \mathbf{C}^{n+p}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^{n+p-1}$ est la surjection canonique, Z est l'adhérence dans $\mathrm{U} \times \mathbf{P}^{n+p-1}$ du graphe de l'application analytique $\mathrm{F} : \mathrm{U}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^{n+p-1}$ définie par $\mathrm{F}(z) = \sigma[f(z)]$ et qu'ensemblistement on a $|\mathrm{E}| = |\pi^{-1}(0)|$, π étant induit par la première projection.

Dans ce qui suit, on donne de "bonnes" équations de $|\mathrm{E}|$ et plus précisement on indique une méthode explicite, après un choix convenable des générateurs de I, pour déterminer le cycle X de $\mathbf{P}^{n+p-1}$ sous-jacent à E. Pour cela, on montre (cf. § 4) que si $\mathrm{C}(f_*(\mathrm{U}), 0)$ est le cycle tangent de Zariski au germe de cycle $(f_*(\mathrm{U}), 0)$ induit par image directe, alors on a

$$\mathrm{X} = \mathrm{Proj}\,[\mathrm{C}(f_*(\mathrm{U}), 0)]\,;$$

il suffit alors, grâce aux § 2 et 3 d'utiliser les résultats de [6] pour déterminer X. On donne également un critère effectif pour

Mots-clés : Idéaux ponctuels – Eclatements – Cycles et Multiplicité.

caractériser les éléments entiers sur un idéal $J = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ engendré par un système de paramètres de $\mathbf{C}\{z\}$ (cf. § 3) ; en particulier, on indique un procédé pour construire pour tout $h \in \overline{I}$ où $\overline{I}$ est la clôture intégrale de I dans $\mathbf{C}\{z\}$, une relation intégrale explicite de h sur I, de degré la multiplicité $e(I)$ au sens de Samuel de l'idéal I. Au § 5, on s'intéresse à l'éclatement d'une famille d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace analytique réduit S et l'on montre que, sous l'hypothèse d'équimultiplicité relative, le germe d'application $S \longrightarrow \mathrm{Chow}^k_{n-1}(\mathbf{P}^q)$ défini par les cycles exceptionnels des éléments de la famille est analytique.

1. Remarques préliminaires.

Le morphisme fini $f: U \longrightarrow \mathbf{C}^{n+p}$ induit un morphisme fini et surjectif d'espaces analytiques complexes réduits et irreductibles, noté encore $f: U \longrightarrow V$, où $V = f(U)_{\mathrm{red}}$. On note $\mathfrak{m}_V$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,0}$, alors via f on a $\mathfrak{m}_V \cdot \mathbf{C}\{z\} = I$ et d'après la propriété universelle des éclatements on a le diagramme commutatif suivant :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} U \times \mathbf{P}^{n+p-1} \supset Z \arrow[r, "f \times \mathrm{id}|_Z"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{V} \subset V \times \mathbf{P}^{n+p-1} \arrow[d, "\pi_V"] \\ U \arrow[r, "f"] & V \subset \mathbf{C}^{n+p} \end{tikzcd}$$

où $\pi_V : \widetilde{V} \longrightarrow V$ est l'éclatement de V relativement à l'idéal $\mathfrak{m}_V$. On a $\pi_V^{-1}(0) = \mathrm{Projan}\left(\bigoplus_{\nu \geq 0} \mathfrak{m}_V^{\nu}/\mathfrak{m}_V^{\nu+1}\right) = \mathrm{Proj}(C(V,0))$ où $C(V,0)$ est le cône tangent de Zariski de V en 0.

PROPOSITION 1. — *On a* $|\pi^{-1}(0)| = |\pi_V^{-1}(0)|$.

Démonstration. — On a $|\pi^{-1}(0)| \subset |\pi_V^{-1}(0)|$ car le diagramme

(*) est commutatif. Inversement, soit $(0, \sigma(y)) \in \pi_V^{-1}(0)$, alors $y \in C(V, 0) \setminus (0)$ et d'après ([10]), p. 210) il existe une suite $(y_k) \in V \setminus (0)$ et une suite $(\lambda_k) \in \mathbf{C}^*$ telles que $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_k y_k = y$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = 0$. Pour tout k, soit $z_k \in U$ tel que $f(z_k) = y_k$; puisque f est propre et $f^{-1}(0) = 0$, il existe une suite extraite $(z_{k_s}) \in U \setminus (0)$ telle que $\lim\limits_{s \to +\infty} z_{k_s} = 0$. On a alors

$$\lim_{s \to +\infty} \sigma[f(z_{k_s})] = \lim_{s \to +\infty} \sigma(\lambda_{k_s} y_{k_s}) = \sigma(y).$$

On a donc $|\pi_V^{-1}(0)| \subset |\pi^{-1}(0)|$, ce qui prouve le résultat.

L'espace analytique $E = (f \circ \pi)^{-1}(0)$ est un diviseur de Z et les composantes irréductibles $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ de E_{red} sont des sous-variétés projectives de $\mathbf{P}^{n+p-1}$ (en général non lisses) de dimension $n - 1$. En utilisant ce qui précède, on note

$$X = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_i \left(\text{resp. } Y = \sum_{i=1}^{q} \delta_i X_i\right)$$

le cycle de $\mathbf{P}^{n+p-1}$ sous-jacent à E (resp. $\pi_V^{-1}(0)$), et $\deg f$ le degré générique du morphisme $f : U \longrightarrow V$.

DEFINITION 1. – *On appelle* X *le cycle exceptionnel de l'éclatement de l'idéal* I.

PROPOSITION 2. – *En tant que cycles de* $\mathbf{P}^{n+p-1}$, *on a*

$$X = \deg f \cdot Y.$$

Démonstration. – Puisque $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{m}^s \subset I$ pour s convenable ; on peut donc supposer que $I \subset \mathbf{C}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ et $U = \mathbf{C}^n$, alors V est une variété algébrique et d'après ([5], p. 166), $\widetilde{Z}$ et $\widetilde{V}$ le sont aussi ; de plus, on a $\deg f = [K(Z) : K(\widetilde{V})]$. Soit x_i (resp. y_i) le point générique de X_i sur E (resp. $\pi_V^{-1}(0)$), alors on a $\mathcal{O}_{E, x_i} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}_i}$ (resp. $\mathcal{O}_{\pi_V^{-1}(0), y_i} = \mathcal{F}_{\mathcal{P}_i}$), où $\mathcal{G} = \bigoplus\limits_{\nu \geqslant 0} I^\nu / I^{\nu+1}$ (resp. $\mathcal{F} = \bigoplus\limits_{\nu \geqslant 0} \mathfrak{m}_V^\nu / \mathfrak{m}_V^{\nu+1}$) et $\mathcal{R}_i$ (resp. $\mathcal{P}_i$) est l'idéal premier minimal de $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{F}$) correspondant à X_i. D'après les propriétés de f et la proposition 1, on a un morphisme local, fini et injectif d'anneaux locaux noethériens intègres $A = \mathcal{O}_{\widetilde{V},y_i} \hookrightarrow B = \mathcal{O}_{Z,x_i}$; de plus d'après la propriété universelle des éclatements on a $\mathcal{O}_{\pi_{\widetilde{V}}^{-1}(0),y_i} = A/\xi A$ et $\mathcal{O}_{E,x_i} = B/\xi B$. L'anneau $A/\xi A$ est artinien donc pour $\nu \gg 0$, on a $(\mathfrak{m}_A/\xi\, \mathfrak{m}_A)^\nu = \mathfrak{m}_A^\nu/\xi A \cap \mathfrak{m}_A^\nu = 0$ soit $\mathfrak{m}_A^\nu \subset \xi A \subset \mathfrak{m}_A$, ce qui montre que ξA est un idéal $\mathfrak{m}_A$-primaire de A. D'après la formule de projection de Samuel ([11], p. 297), ξB est un idéal $\mathfrak{m}_B$-primaire de B et l'on a

$$[B:A] \cdot e(\xi A) = [B/\mathfrak{m}_B : A/\mathfrak{m}_A] \cdot e(\xi B).$$

Puisque le corps des fractions de A (resp. B) est $K(\widetilde{V})$ (resp. $K(Z)$) on a $[B:A] = \deg f$; de plus, on a $B/\mathfrak{m}_B \simeq K(X_i) \simeq A/\mathfrak{m}_A$, d'où $\deg f \cdot e(\xi A) = e(\xi B)$. Puisque la dimension de Krull de A (resp. B) est 1, on a pour $\nu \gg 0$:

$$e(\xi A) = \ell_A(\xi^\nu A/\xi^{\nu+1} A) \text{ (resp. } e(\xi B) = \ell_B(\xi^\nu B/\xi^{\nu+1} B)).$$

Par définition, et puisque ξ n'est pas un diviseur de zéro dans A (resp. B), on a pour $\nu \geqslant 0$:

$$\delta_i = \ell_{A/\xi A}(A/\xi A) = \ell_A(A/\xi A) = \ell_A(\xi^\nu A/\xi^{\nu+1} A)$$

(resp. $\alpha_i = \ell_B(\xi^\nu B/\xi^{\nu+1} B)$). D'où $\deg f \cdot \delta_i = \alpha_i$, ce qui prouve le résultat.

2. Préparation de I.

On note $e(I)$ la multiplicité de I (i.e. le coefficient normalisé de plus haut degré du polynôme de Hilbert-Samuel de I). On dit qu'un élément $h \in \mathbf{C}\{z\}$ est *entier sur un idéal* $\mathfrak{A}$ *de* $\mathbf{C}\{z\}$ s'il existe une relation intégrale

$$h^s + a_1 h^{s-1} + \ldots + a_{s-1} h + a_s = 0$$

dans $\mathbf{C}\{z\}$ où $a_i \in \mathfrak{A}^i$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$; l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}\{z\}$ entiers sur $\mathfrak{A}$ est un idéal de $\mathbf{C}\{z\}$ noté $\overline{\mathfrak{A}}$ et appelé *clôture intégrale de* $\mathfrak{A}$ *dans* $\mathbf{C}\{z\}$ (cf. par exemple [8], chap. 0).

LEMME. – *Il existe* J *un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire de* $\mathbf{C}\{z\}$ *contenu dans* I *tel que :*

i) J *soit engendré par un système de paramètres de* $\mathbf{C}\{z\}$, *noté* $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$;

ii) $e(\mathrm{J}) = e(\mathrm{I})$;

iii) *il existe* $r \geqslant 0$ *tel que* $\mathrm{J}\,\mathrm{I}^r = \mathrm{I}^{r+1}$;

iv) $\overline{\mathrm{J}} = \overline{\mathrm{I}}$;

$\dot{\text{v}}$) *les images des* f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *dans le* **C**-*espace vectoriel* $\mathrm{I}/\mathfrak{m}\,\mathrm{I}$ *soient linéairement indépendantes.*

Démonstration. – Si l'on se donne $\mathrm{I} = (u_1, u_2, \ldots, u_\mathrm{N})$, alors d'après ([7], Th. 2, p. 154 et § 7), il existe des $a_{ij} \in \mathbf{C}$ $(1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant \mathrm{N})$ "suffisamment généraux" tels que si $f_i = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} a_{ij}\, u_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors l'idéal $\mathrm{J} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vérifie les propriétés i) à iv). De plus, J est une réduction de I (i.e. J est contenu dans I et vérifie iii)) minimale pour l'inclusion et d'après ([7], p. 148) on a $\mathrm{J} \cap \mathfrak{m}\mathrm{I} = \mathfrak{m}\mathrm{J}$. D'où le $\dot{\text{v}}$) d'après i).

PROPOSITION 3. – *Soit* $n + p = \dim_\mathbf{C} (\mathrm{I}/\mathfrak{m}\,\mathrm{I})$. *Il existe un système minimal de générateurs* $(f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p})$ *de l'idéal* I, *un polydisque ouvert* U *de* $\mathbf{C}^n$ *centré en* 0 *et une constante* $c > 0$ *tels que :*

a) *l'idéal de* $\mathbf{C}\{z\}$, $(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \mathrm{J}$ *soit* $\mathfrak{m}$-*primaire et* $e(\mathrm{J}) = e(\mathrm{I})$;

b) *chaque* f_{n+j} $(1 \leqslant j \leqslant p)$ *soit entier sur* J *ou encore pour tout* $z \in \mathrm{U}$ *on ait :*

$$\text{(T)} \qquad \underset{1 \leqslant j \leqslant p}{\operatorname{Max}} |f_{n+j}(z)| \leqslant c \cdot \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Max}} |f_i(z)| .$$

Démonstration. – a) est une conséquence du lemme précédent et du lemme de Nakayama.

b) s'obtient grâce au iv) du lemme précédent (cf. par exemple [8], chap. 0).

On écrira désormais I *sour la forme* $\mathrm{I} = (\mathrm{J} \,; \Psi)$ où

$$\mathrm{J} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \quad \text{et} \quad \Psi = (f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots, f_{n+p})$$

vérifient les propriétés a) et b) de la proposition 3.

3. Polynôme caractéristique de Ψ par rapport à J où $I = (J;\Psi)$ et applications.

On utilise les définitions, notations et résultats de Barlet (cf. [1], chap. 0).

Quitte à restreindre U, il existe un polydisque ouvert U_0 de $\mathbf{C}^n$ centré en 0 tel que le morphisme $\varphi : U \longrightarrow U_0$ dont les composantes sont les f_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit fini, plat et de degré $k = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{z\}/J = e(J) = e(I)$; on désigne par

$$g' : U_0 \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(U)$$

son morphisme associé ($g'(t) = \langle z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(k)} \rangle = \langle z^{(j)} \rangle$ sont les points de U "au dessus" de $t \in U_0$, via φ). Soit

$$g = \mathrm{Sym}^k(\Psi) \circ g' : U_0 \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p) \quad (g(t) = \langle \Psi(z^{(j)}) \rangle),$$

alors g définit un revêtement ramifié de degré k de U_0, contenu dans $U_0 \times \mathbf{C}^p$ dont on note

$$P(t,x) = x^k - S_1(t) \cdot x^{k-1} + \ldots + (-1)^k S_k(t)$$

le polynôme à valeurs dans $S_k(\mathbf{C}^p)$ associé ; pour $1 \leqslant m \leqslant k$, les $S_m(t)$ sont les fonctions symétriques vectorielles élémentaires des points $\langle \Psi(z^{(j)}) \rangle$ de $\mathbf{C}^p$.

Puisque le morphisme fini et surjectif $f : U \longrightarrow V = f(U)_{\mathrm{red}}$ a pour composantes les f_i $(1 \leqslant i \leqslant n + p)$, d'après ce qui précède, *on a ensemblistement l'égalité suivante* :

$$V = \{(t,x) \in U_0 \times \mathbf{C}^p ; P(t,x) = 0\}.$$

De plus, d'après l'inégalité (T) de la proposition 3, *le polynôme* P *est transverse en* 0 (i.e. $C(V,0) \cap \{0\} \times \mathbf{C}^p = \{0\}$, cf. par exemple [6], § 2).

Avant de poursuivre, on donne ci-dessous quelques compléments sur la construction de P.

Pour $1 \leqslant m \leqslant k$, on note $N_m(t)$ les fonctions de Newton des points $\langle \Psi(z^{(j)}) \rangle$ de $\mathbf{C}^p$, alors pour déterminer P il suffit de connaître

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \sum_{j=1}^{k} l\,[\Psi(z^{(j)})]^m ,$$

pour tout $t \in U_0$, $l \in (\mathbf{C}^p)^*$ et $1 \leqslant m \leqslant k$. Grâce à la formule de Cauchy, on a

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{l[\Psi(z)]^m \, J(\varphi)(z)}{\prod_{s=1}^{n} (f_s(z) - t_s)} \bigwedge_{s=1}^{n} dz_s,$$

où Γ_ϵ est le n-cycle réel défini, pour $\epsilon > 0$ convenable, par $\Gamma_\epsilon = \{z \in \mathbf{C}^n ; |f_s(z)| = \epsilon$ pour $1 \leqslant s \leqslant n\}$ et $J(\varphi)$ est le jacobien de φ. En fait, d'après le théorème de Stokes, si ϵ est suffisamment petit, cette intégrale ne dépend pas de ϵ (cf. par exemple [4], chap. 5).

D'après les hypothèses, $\mathbf{C}\{z\}$ est via φ un $\mathbf{C}\{t\}$-module libre de rang k ; si $l \in (\mathbf{C}^p)^*$ s'écrit $l = (l_{n+1}, l_{n+2}, \ldots, l_{n+p})$ dans la base canonique, on désigne par $l(\Psi) = \sum_{i=1}^{p} l_{n+1} f_{n+1}$ le $\mathbf{C}\{t\}$-endomorphisme de $\mathbf{C}\{z\}$ induit par multiplication, alors d'après ([1], p. 122), on a

$$\langle N_m(t), l^m \rangle = \text{Trace}\,[l(\Psi)^m](t).$$

De plus, on peut montrer qu'avec les notations précédentes on a :

$$\langle P(t,x), l^k \rangle = \det\,[l(x) \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}\{z\}} - l(\Psi)](t)$$

ce qui justifie la définition suivante :

DEFINITION 2. – *On appelle* P *le polynôme caractéristique de* Ψ *par rapport à* J *où* $I = (J\,;\Psi)$.

Si $\Psi = f_{n+1}$, on a alors

$$P(t,x) = \det\,(x \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}\{z\}} - f_{n+1}](t)$$

et l'on retrouve le polynôme caractéristique habituel du $\mathbf{C}\{t\}$-endomorphisme de $\mathbf{C}\{z\}$ induit par la multiplication par f_{n+1}.

Applications.

Soit $J = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de $\mathbf{C}\{z\}$; il est engendré par une suite régulière et via $\varphi = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $\mathbf{C}\{z\}$ est un $\mathbf{C}\{t\}$-module libre de rang $k = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{z\}/J$. Si $h \in \mathbf{C}\{z\}$, on désigne par

$$P_h(t,x) = x^k - S_1(t)\,x^{k-1} + \ldots + (-1)^k S_k(t)$$

le polynôme caractéristique du $\mathbf{C}\{t\}$-endomorphisme de $\mathbf{C}\{z\}$ induit par la multiplication par h et l'on note, pour $1 \leqslant m \leqslant k$, $S_m(t)$ (resp. $N_m(t) = \text{trace}(h^m)(t)$) la m-ième fonction symétrique (resp. de Newton) élémentaire de $P_h(t, x)$.

PROPOSITION 4. — *Soient* $J = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire de* $\mathbf{C}(z)$ *et* $h \in \mathbf{C}(z)$, *alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) $h \in \overline{J}$;

ii) *pour tout* $1 \leqslant m \leqslant k$, $S_m(t) \in (t_1, t_2, \ldots, t_n)^m$;

iii) *pour tout* $1 \leqslant m \leqslant k$, Trace $(h^m)(t) \in (t_1, t_2, \ldots, t_n)^m$.

Démonstration. — ii)$\Leftrightarrow$iii). D'après les relations universelles entre les fonctions de Newton et les fonctions symétriques élémentaires.

i)$\Rightarrow$ii). Puisque $h \in \overline{J}$, il existe un polydisque ouvert U de $\mathbf{C}^n$, centré en 0 et une constante $K > 0$ tels que pour tout $z \in U$ on ait $|h(z)| \leqslant K \cdot \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |f_i(z)|$. Ainsi, pour tout $1 \leqslant m \leqslant k$ et tout t voisin de $0 \in \mathbf{C}^n$, on a

$$|S_m(t)| \cdot \leqslant C_k^m \cdot K^m \cdot (\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |t_i|)^m ,$$

ce qui montre que $S_m \in (t_1, t_2, \ldots, t_n)^m$.

ii)$\Rightarrow$i). D'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a

$$h^k - S_1 \circ \varphi \cdot h^{k-1} + \ldots + (-1)^k S_k \circ \varphi = 0$$

dans $\mathbf{C}\{z\}$, ce qui montre, puisque pour tout $1 \leqslant m \leqslant k$,

$$S_m \circ \varphi \in (f_1, f_2, \ldots, f_n)^m ,$$

que P_h détermine une relation intégrale, de degré k, de h sur J.

Soit I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de $\mathbf{C}\{z\}$, on peut écrire $I = (J ; \Psi)$ (cf. § 2) où $J = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est engendré par un système de paramètres, $\overline{I} = \overline{J}$ et $e(I) = e(J) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{z\}/J$. Soit $h \in \overline{I}$, alors $h \in \overline{I} = \overline{J}$ et d'après la proposition précédente, *le polynôme caractéristique* P_h *de* h *par rapport à* J *détermine une relation intégrale de degré* $e(J) = e(I)$, *de* h *sur* J *donc a fortiori sur* I ; autrement dit, on a le résultat suivant :

COROLLAIRE. — *Soit* I *un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire de* $\mathbf{C}\{z\}$, *alors tout* $h \in \overline{I}$ *vérifie une relation intégrale explicite, de degré* $e(I)$, *sur* I.

4. Détermination du cycle exceptionnel de l'éclatement de l'idéal $\mathrm{I} = (\mathrm{J}\,;\Psi)$.

Pour tout germe de cycle $(\mathrm{Z},0)$ de dimension pure, on note $\mathrm{C}(\mathrm{Z},0)$ *le cycle tangent de Zariski à* $(\mathrm{Z},0)$; on rappelle (cf. [6], p. 158) que si $\mathfrak{A}$ est un idéal de $\mathbf{C}\{t,x\}$ dont le germe de cycle associé est $(\mathrm{Z},0)$, $\mathrm{C}(\mathrm{Z},0)$ est le germe de cycle associé à l'idéal $\mathrm{in}[\mathfrak{A}]$ de $\mathbf{C}\{t,x\}$ engendré par les formes initiales d'éléments de $\mathfrak{A}$; le germe de cycle $\mathrm{C}(\mathrm{Z},0)$ ne dépend que du germe de cycle $(\mathrm{Z},0)$.

THEOREME 1. – *Soit* $\mathrm{I} = (\mathrm{J}\,;\Psi)$ *un idéal* $\mathfrak{m}$*-primaire de* $\mathbf{C}\{z\}$. *On désigne par* P *le polynôme caractéristique de* Ψ *par rapport à* J, *par* $\mathrm{in}(\mathrm{P})$ *sa partie homogène de degré* $e(\mathrm{I})$ *et par* X *le cycle exceptionnel de* I.

1) P *représente le germe de cycle* $(f_*(\mathrm{U}), 0)$ *induit par image directe ;*

2) $\mathrm{in}(\mathrm{P})$ *représente* $\mathrm{C}(f_*(\mathrm{U}),0)$ *et en tant que cycles de* $\mathbf{P}^{n+p-1}$ *on a* $\mathrm{X} = \{\mathrm{in}(\mathrm{P}) = 0\}$.

Démonstration. – 1) Soit $m(\mathcal{O}_{\mathrm{V},0})$ la multiplicité de l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathrm{V},0}$, d'après la formule de projection de Samuel ([11], p. 297), on a via f,

$$e(\mathrm{I}) = e(\mathfrak{m}_{\mathrm{V}} \cdot \mathbf{C}\{z\}) = \deg f \cdot m(\mathcal{O}_{\mathrm{V},0}).$$

D'après les hypothèses et le § 3, le germe de cycle représenté par P s'écrit $m \cdot (\mathrm{V},0)$. D'après la transversalité de P en 0 et un résultat de Draper ([2]), on a $e(\mathrm{I}) = m \cdot m(\mathcal{O}_{\mathrm{V},0})$ (cf. par exemple [6]), d'où $\deg f = m$ d'après ce qui précède, ce qui prouve le résultat puisque par définition $(f_*(\mathrm{U}),0) = \deg f \cdot (\mathrm{V},0)$.

2) D'après 1) et grâce à ([6], Th. 2, p. 157), $\mathrm{in}(\mathrm{P})$ représente $\mathrm{C}(f_*(\mathrm{U}), 0)$ puisque P est transverse en 0. En tant que germes de cycles, on a $\mathrm{C}(f_*(\mathrm{U}),0) = \deg f \cdot \mathrm{C}(\mathrm{V},0)$, ce qui montre d'après la proposition 2 que l'on a $\mathrm{X} = \mathrm{Proj}\,[\mathrm{C}(f_*(\mathrm{U}), 0)]$ en tant que cycles de $\mathbf{P}^{n+p-1}$, d'où le résultat.

Exemple. – Soit $\mathrm{I} = (y^2, xy, x^3)$ dans $\mathbf{C}^2$, on peut écrire $\mathrm{I} = (\mathrm{J}\,; x^3)$ où $\mathrm{J} = (y^2 + x^3, xy)$; en effet, J est engendré par un système de paramètres de $\mathbf{C}\{x,y\}$ et

$$e(\mathrm{I}) = e(\mathrm{J}) = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{x, y\}/\mathrm{J} = 5$$

puisque $x^3 \in \overline{\mathrm{J}}$ $((x^3)^2 - x^3(y^2 + x^3) + x(xy)^2 = 0)$. Les éléments $(1, x, x^2, x^3, y)$ forment une base du $\mathbf{C}\{t_1, t_2\}$-module libre $\mathbf{C}\{x,y\}$, via J, et l'endomorphisme induit par la multiplication par x^3 a, dans cette base, la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -t_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & -t_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & t_1 & 0 & t_2 \\ 1 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & -t_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et pour polynôme caractéristique :

$$\mathrm{P}_{x^3}(t_1, t_2, \mathrm{X}) = \mathrm{X}^2(\mathrm{X} - t_1)^3 + t_2^6$$

d'où $\mathrm{in}(\mathrm{P}_{x^3})(t_1, t_2, \mathrm{X}) = \mathrm{X}^2(\mathrm{X} - t_1)^3$. Ce qui montre que le cycle exceptionnel de I dans $\mathbf{P}^2$ est $\{\mathrm{X}^2(\mathrm{X} - t_1)^3 = 0\}$.

5. Eclatement d'une famille d'idéaux ponctuels paramétrée par un germe d'espace réduit.

Soient $(\mathrm{S}, 0)$ un germe d'espace analytique complexe réduit et $(\mathrm{X}, 0) \subset (\mathrm{S} \times \mathbf{C}^n, (0,0) = 0)$ un germe de sous-espace analytique tel que $|\mathrm{X}| = \mathrm{S} \times \{0\}$. On suppose que $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} = \mathcal{O}_{\mathrm{S} \times \mathbf{C}^n}/\mathfrak{I}$ et l'on note $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n} = \mathbf{C}\{z\}$. Pour tout s voisin de $0 \in \mathrm{S}$, $\mathfrak{I}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}$ est un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de $\mathcal{O}$ dont on note $e(s)$ *la multiplicité* au sens de Samuel.

Pour tout s voisin de $0 \in \mathrm{S}$, on a d'une part

$$\mathrm{E}_s = \mathrm{Projan} \bigoplus_{\nu \geqslant 0} (\mathfrak{I}^\nu/\mathfrak{I}^{\nu+1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S},s}} \mathbf{C})$$

qui est *la fibre "au-dessus" de* s, *du diviseur exceptionnel* E *de l'éclatement de* $\mathrm{S} \times \mathbf{C}^n$ *relativement à* $\mathfrak{I}$, et d'autre part $\mathrm{D}_s = \mathrm{Projan} \bigoplus_{\nu \geqslant 0} (\mathfrak{I}^\nu_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}/\mathfrak{I}^{\nu+1}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O})$ qui est *le diviseur exceptionnel de l'éclatement de* $\{s\} \times \mathbf{C}^n$ *relativement à* $\mathfrak{I}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}$. L'interprétation topologique des éclatements montre que l'on a $|D_s| \subset |E_s|$, d'où $\dim E_s \geqslant \dim D_s = n - 1$. Plus précisément, puisque $(S, 0)$ est réduit, le théorème de platitude générique de Frisch ([3]) montre que

$$A = \{s \in S\,;\ \bigoplus_{\nu \geqslant 0} \mathfrak{I}^\nu/\mathfrak{I}^{\nu+1} \quad \text{n'est pas} \quad \mathcal{O}_{S,s} - \text{plat}\}$$

est un germe de sous-ensemble analytique fermé de $(S, 0)$ dont le complémentaire est partout dense ; de plus, il existe une immersion fermée canonique $D_s \longrightarrow E_s$ qui est *un isomorphisme* si $s \notin A$.

L'idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$ admet des *réductions* (i.e. des idéaux $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}$ tels que $\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{I}}$ dans $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$) et d'après les hypothèses et un résultat de Northcott et Rees, le nombre minimum d'éléments de $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$ engendrant une réduction de $\mathfrak{I}$ est $\dim E_0 + 1$ (cf. [7], p. 149 et 151).

PROPOSITION 5. – *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *au voisinage de* $0 \in S$, *on a* $\dim E_s = n - 1$ $(= \dim D_s)$;

ii) *au voisinage de* $0 \in S \times \mathbf{C}^n$, *il existe une suite régulière* $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ *de* $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$ *telle que l'on ait :* $\mathfrak{J} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \subset \mathfrak{I}$ *et* $\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{I}}$ *dans* $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$;

iii) *au voisinage de* $0 \in S$, *la multiplicité* $e(s)$ *est constante.*

Démonstration. – i)⇒ii). D'après ce qui précède la proposition 5, il existe $\mathfrak{J} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \subset \mathfrak{I}$ tel que l'on ait $\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{I}}$ dans $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$; de plus $\mathcal{O}$ est un anneau de Cohen-Macaulay et $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$ est $\mathcal{O}_S$-plat ce qui montre d'après les hypothèses que $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une suite régulière de $\mathcal{O}_{S\times\mathbf{C}^n}$.

ii)⇒i) D'après ce qui précède la proposition 5, on a $\dim E_0 \leqslant n - 1$ or la fonction $s \rightsquigarrow \dim E_s$ est semi-continue supérieurement, d'où le résultat puisqu'au voisinage de $0 \in S$ on a $\dim E_s \geqslant \dim D_s = n - 1$.

iii)⇒ii) C'est le "vrai" principe de spécialisation de la dépendance intégrale de Teissier (cf. [9], p. 134).

ii)⇒iii) Puisque $\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{I}}$, on a

$$e(s) = e[\mathfrak{I}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}] = e[\mathfrak{J}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}] = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}/\mathfrak{J}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}$$

puisqu'un idéal a même multiplicité que sa clôture intégrale et que l'anneau $\mathcal{O}$ est de Cohen-Macaulay. D'où le résultat puisque l'on a $\sqrt{\mathfrak{I}} = \sqrt{\overline{\mathfrak{I}}}$ et que $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}/\mathfrak{J}$ et $\mathcal{O}_S$-plat.

On suppose *désormais* que l'une des conditions de la proposition précédente est vérifiée ; comme dans le § 2, puisqu'en fait $\mathfrak{J}$ est une réduction minimale de $\mathfrak{I}$, *on peut alors écrire* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{J};\Psi)$ où $\mathfrak{J} = (f_1, \ldots, f_n)$ et $\Psi = (f_{n+1}, \ldots, f_{n+p})$ avec

$$n + p = \dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{I}/\mathfrak{m}_{S \times \mathbf{C}^n} \cdot \mathfrak{I}. \quad \text{Soit} \quad \lambda : S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow S \times \mathbf{C}^n$$

le germe de morphisme défini par

$$\lambda(s,z) = (s; f_1(s,z), \ldots, f_n(s,z)),$$

alors d'après les hypothèses λ est fini ; de plus, grâce au critère de platitude par fibres, λ est plat et de degré $e(0) = k$. Ainsi via λ, $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ est un $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$-module libre de rang k et l'on peut considérer le polynôme caractéristique P de Ψ (cf. § 3) dont on note encore $\mathrm{P} : S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ le germe de morphisme associé ; si

$$\mathrm{P}(s,t;x) = x^k - \mathrm{S}_1(s,t) \cdot x^{k-1} + \ldots + (-1)^k \mathrm{S}_k(s,t),$$

alors pour $1 \leqslant m \leqslant k$, les $\mathrm{S}_m(s,t)$ sont les fonctions symétriques vectorielles élémentaires des points $\langle \Psi(s, z^{(j)}(s,t)) \rangle$ de $\mathbf{C}^p$ où $\lambda(s, z^{(j)}(s,t)) = (s,t)$. Puisque chaque $f_{n+i} \in \overline{\mathfrak{J}}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$, il existe un germe de morphisme $\mathrm{Q} : S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ tel que pour chaque s voisin de $0 \in S$, Q_s soit la partie homogène de degré $e(s) = k$ de P_s.

D'après le théorème 1, *pour chaque* s *voisin de* $0 \in S$, Q_s *représente explicitement le cycle de dimension* $n-1$ *de* $\mathbf{P}^{n+p-1}$ *sous-jacent à* D_s ; de plus, par construction, le degré de ce cycle dans $\mathbf{P}^{n+p-1}$ est égal à $e(s) = k$ (cf. par exemple [2]).

On désigne par $\mathrm{Chow}^k_{n-1}(\mathbf{P}^{n+p-1})$ l'espace analytique complexe réduit des cycles de dimension pure $n-1$ de $\mathbf{P}^{n+p-1}$ dont le degré est k ; c'est une sous-variété projective de $\mathbf{P}^{\mathrm{N}}$ pour $\mathrm{N} = \mathrm{N}(n,p,k)$ convenable. D'après ce qui précède *pour* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{J};\Psi)$ *donné, on a un germe d'application* $\beta : S \longrightarrow \mathrm{Chow}^k_{n-1}(\mathbf{P}^{n+p-1})$ où $\beta(s) = \{$cycle de $\mathbf{P}^{n+p-1}$ sous-jacent à

$$\mathrm{D}_s = \mathrm{Projan} \bigoplus_{\nu \geqslant 0} (\mathfrak{I}^{\nu}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O}/\mathfrak{I}^{\nu+1}_{(s,0)} \cdot \mathcal{O})\}.$$

THEOREME 2. — *Soit* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{J};\Psi)$. *On suppose qu'au voisinage de* $0 \in S$, *on ait* $e(s) = k$, *alors* $\beta : S \longrightarrow \mathrm{Chow}^k_{n-1}(\mathbf{P}^{n+p-1})$ *est un germe de morphisme analytique.*

Démonstration. — D'après ce qui précède et les résultats de Barlet (cf. [1], chap. IV et II), il suffit de montrer que le germe de morphisme $Q : S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ est isotrope. On identifie $\mathcal{L}(\mathbf{C}^p, \mathbf{C}^n)$ et $\mathbf{C}^{np}$ et l'on considère le germe de morphisme $L : \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n$ défini par

$$L(u, s, z) = (u, s, \varphi(s,z) - u \circ \Psi(s,z))$$

où $u = (u_{ij}) \in \mathbf{C}^{np}$ et $\varphi - u \circ \Psi = \left(f_i - \sum_{j=1}^{p} u_{ij} f_{n+j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$;

d'après les hypothèses L est fini et grâce au critère de platitude par fibres, L est plat et de degré $e(0) = k$ $(L(0, s, z) = \lambda(s, z))$. On désigne par $P_\Psi : \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ le germe de morphisme associé au polynôme caractéristique P_Ψ de Ψ par rapport à L $(P_\Psi(0, s, t, x) = P(s, t, x))$. D'après un résultat de Northcott et Rees ([7], p. 153), il existe un sous-ensemble algébrique strict A de $\mathbf{C}^{n(n+p)}$ tel que si $a = (a_{\alpha\beta}) \notin A$ les idéaux de $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$,

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{(n+p)} a_{\alpha\beta} f_\alpha\right)_{1 \leqslant \beta \leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathfrak{I} = (\varphi, \Psi)$$

aient la même clôture intégrale. D'après l'hypothèse, on a

$$\overline{(f_1, f_2, \ldots, f_n)} = \overline{\mathfrak{I}} \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n},$$

ce qui montre qu'en prenant $u = (u_{ij})$ suffisamment voisin de $0 \in \mathbf{C}^{np}$, on a $\overline{(\varphi - u \circ \Psi)} = \overline{\mathfrak{I}}$ dans $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$. Ainsi pour $u = (u_{ij})$ voisin de $0 \in \mathbf{C}^{np}$ et fixé, on a $f_{n+j} \in \overline{(\varphi - u \circ \Psi)}$ dans $\mathcal{O}_{S \times \mathbf{C}^n}$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$; ce qui montre qu'il existe un germe de morphisme $Q_\Psi : \mathbf{C}^{np} \times S \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathrm{Sym}^k(\mathbf{C}^p)$ tel que pour chaque (u, s) voisin de $(0, 0) \in \mathbf{C}^{np} \times S$, $(Q_\Psi)_{(u,s)}$ soit la partie homogène de degré $e(s) = k$ de $(P_\Psi)_{(u,s)}$ $(Q_\Psi(0, s, t, x) = Q(s, t, x))$. Autrement dit Q est isotrope (cf. [1], p. 56 et 64), d'où le résultat.

COROLLAIRE. — *On suppose que* $(S, 0)$ *est normal et qu'au voisinage de* $0 \in S$, *on ait* $e(s) = k$. *Alors pour* s *voisin de* $0 \in S$, *les cycles de* $\mathbf{P}^{n+p-1}$ *sous-jacents à* D_s *et* E_s *sont égaux.*

Démonstration. – Pour s voisin de $0 \in S$, E_s est de dimension pure $n-1$. En effet, d'après les hypothèses $(S,0)$ est irréductible de dimension $\dim S$ et pour $x \in E_s$, on a

$$\dim_x E - \dim_x E_s \leqslant \dim S,$$

or E est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $(S \times \mathbf{C}^n, 0)$ relativement à $\mathcal{I}$, d'où $\dim_x E = \dim S + n - 1$. Ce qui montre que pour $x \in E_s$, on a $\dim_x E_s \geqslant n-1$, d'où le résultat puisque $\dim E_s = n-1$ d'après la proposition 5. Puisque $(S,0)$ est normal, la famille paramétrée par $(S,0)$, des cycles de dimension pure $n-1$ de $\mathbf{P}^{n+p-1}$ sous-jacents à E_s est analytique (cf. [1], p. 39). D'où le résultat du corollaire d'après le théorème 2 puisque D_s et E_s coincident génériquement sur $(S,0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BARLET, Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie. Sém. F. Norguet II, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 482, 1975.

[2] R. DRAPER, Intersection theory in analytic geometry, *Math. Ann.*, 180 (1969), 175-204.

[3] J. FRISCH, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques, *Inventiones Math.*, 4 (1967), 118-138.

[4] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience, 1978.

[5] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[6] A. HÉNAUT, Cycles et cône tangent de Zariski. Sém. F. Norguet IV, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 807, 1980.

[7] D. NORTHCOTT et D. REES, Reductions of ideals in local rings. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 50 (1954), 145-158.

[8] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. Singularités à Cargèse 1972, *Astérisque*, 7-8, 1973.

[9] B. TEISSIER, Résolution simultanée I, II. Sém. Sing. des surfaces. *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, 777, 1980.

[10] H. WHITNEY, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley, 1972.

[11] O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative algebra.*, vol. II, Van Nostrand, 1960.

Manuscrit reçu le 22 avril 1986
révisé le 2 février 1987.

Alain HENAUT,
Université Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'informatique
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226
351, cours de la Libération
33405 Talence (France).