Takashi Aoki

Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. II

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 2 (1986), p. 143-165
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_143_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
36, 2 (1986), 143-165.

CALCUL EXPONENTIEL DES OPÉRATEURS MICRODIFFÉRENTIELS D'ORDRE INFINI. II

Par Takashi AOKI

Introduction.

Ce travail généralise et étend considérablement les résultats que nous avons formulés dans **Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, I** ([2]). Le but de ce premier article était d'une part trouver la loi exponentielle pour les symboles, et d'autre part, de donner une condition suffisante d'inversibilité des opérateurs pseudodifférentiels (ou microdifférentiels) d'ordre infini.

Ici, nous donnerons en premier lieu la loi exponentielle pour les symboles formels (cf. [2]), puis pour les symboles doublement formels au sens de [3].

En second lieu, on élucidera la relation entre les opérateurs exponentiels et les opérateurs à symbole exponentiel. Rappelons qu'un symbole (analytique) $p(x,\xi)$ est appelé d'ordre 1-0 si $\lim_{|\xi|\to\infty} p(x,\xi)/|\xi| = 0$. L'opérateur à symbole p est noté $:p:$. On dit qu'un opérateur est d'ordre 1-0 si son symbole est d'ordre 1-0. On peut considérer l'opérateur pseudodifférentiel $\exp \mathrm{P}$ (resp. $:\exp q:$) si P (resp. q) est un opérateur (resp. un symbole) d'ordre 1-0. Les résultats principaux sont (cf. les théorèmes 4.1 et 4.5) :

THÉORÈME 1. — *Soit* P *un opérateur d'ordre* 1-0. *Il existe un symbole* q *d'ordre* 1-0 *tel que* $\exp \mathrm{P} = :\exp q:$.

Mots-clés : Opérateurs pseudo-différentiels - Calcul symbolique - Opérateurs d'ordre infini.

THÉORÈME 2 (réciproque du théorème 1). — *Soit* q *un symbole d'ordre* 1-0. *Il existe un opérateur* P *d'ordre* 1-0 *tel que* $:\exp q: = \exp \mathrm{P}$.

Comme application, nous trouverons en dernier lieu :

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathrm{P}(x,\xi)$ *un symbole (d'ordre fini ou infini). Si* $1/\mathrm{P}(x,\xi)$ *est un symbole, l'opérateur* $:\mathrm{P}(x,\xi):$ *est inversible.*

C'est une généralisation du théorème d'inversibilité obtenu dans [2] (cf. [1], [4]).

1. Préliminaires.

On utilisera les outils et les techniques développés dans [2], [3], [4], [7].

1.1. Soit X un ouvert de $\mathbf{C}^n$ muni des coordonnées $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Soit Ω un ouvert conique du fibré vectoriel $\mathrm{T}^*\mathrm{X} \simeq \mathrm{X} \times \mathbf{C}^n$ cotangent à X. Une fonction $\mathrm{F} = \mathrm{F}(x,\xi)$ est appelée un symbole défini sur Ω si pour tout ensemble conique $\Omega' \subset \Omega$ engendré par un compact de $\dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X} = \mathrm{T}^*\mathrm{X}\backslash\mathrm{X}$ (ce que l'on notera désormais $\Omega' \subset\subset \Omega$ pour abréger), il existe une constante $d > 0$ telle que $\mathrm{F}(x,\xi)$ soit holomorphe sur $\Omega' \cap \{(x,\xi); |\xi| \geqslant d\}$ et qu'on y ait pour tout $h > 0$:

$$\sup |\mathrm{F}(x,\xi)| \exp(-h|\xi|) < \infty.$$

On note $\mathrm{S}(\Omega)$ l'anneau commutatif des symboles définis sur Ω. On dit qu'un symbole $\mathrm{F} \in \mathrm{S}(\Omega)$ est équivalent à zéro si pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe des constantes $d > 0$, $h > 0$ telles que F soit holomorphe sur $\Omega' \cap \{(x,\xi); |\xi| > d\}$ et y vérifie :

$$\sup |\mathrm{F}(x,\xi)| \exp(h|\xi|) < \infty.$$

On note $\mathrm{R}(\Omega)$ l'idéal des symboles définis sur Ω qui sont équivalents à zéro.

Soit $\{\mathrm{P}_j\}$ $(j \in \mathbf{N} = \{0,1,2,\ldots\})$ une suite de symboles. Considérons une série formelle à une variable t :

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j \mathrm{P}_j(x,\xi).$$

On dit que P est un symbole formel défini sur Ω si pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe $\mathrm{A} \in]0,1[$ et une constante positive d satisfaisant aux conditions suivantes : (*a*) Pour tout $j \in \mathbf{N}$, P_j est holomorphe sur $\Omega'_j = \Omega' \cap \{(x,\xi); |\xi| \geqslant (j+1)d\}$, (*b*) Pour tout $h > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $j \in \mathbf{N}$, $(x,\xi) \in \Omega'_j$ on ait

$$|P_j(x,\xi)| \leqslant CA^j \exp(h|\xi|).$$

On note $\hat{S}(\Omega)$ l'anneau commutatif des symboles formels définis sur Ω. On dit qu'un symbole formel $P = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi) \in \hat{S}(\Omega)$ est équivalent à zéro si $\sum_{j=1}^{\infty} t^j \left(\sum_{k=0}^{j-1} P_k(x,\xi) \right)$ est aussi un symbole formel défini sur Ω. On note $\hat{R}(\Omega)$ l'idéal des symboles formels définis sur Ω qui sont équivalents à zéro.

Soit $\{Q_{jk}\}(j,k \in \mathbf{N})$ une double suite de symboles. On considère une série formelle à deux variables t_1, t_2 :

$$Q = Q(t_1,t_2;x,\xi) = \sum_{j,k=0}^{\infty} t_1^j t_2^k Q_{jk}(x,\xi).$$

On pose

$$\rho_{21}(Q(t_1,t_2;x,\xi)) = Q(t,t;x,\xi),$$
$$\iota_{12}(P(t;x,\xi)) = P(t_1;x,\xi),$$

où P est un symbole formel. On dit que Q est un symbole doublement formel défini sur Ω si $\rho_{21}(Q)$ est un symbole formel défini sur Ω. On note $\hat{S}_2(\Omega)$ l'anneau commutatif des symboles doublement formels définis sur Ω et on identifie $\hat{S}(\Omega)$ comme un sous-anneau de $\hat{S}_2(\Omega)$ par ι_{12}. De plus, on pose $\hat{R}_2(\Omega) = \{Q \in \hat{S}_2(\Omega); \rho_{21}(Q) \in \hat{R}(\Omega)\}$. On dit que deux symboles doublement formels Q et Q' définis sur Ω sont équivalents et on note $Q \sim Q'$ si $Q - Q'$ appartient à $\hat{R}_2(\Omega)$.

Soit x^* un point de $\dot{T}^*X$. On note $S_{x^*} = \varinjlim S(\Omega)$, etc., où Ω parcourt un système fondamental de voisinages coniques de x^* dans T^*X. Alors, on a avec ces notations :

Théorème 1.1. — (*a*) *Il existe un isomorphisme linéaire*

$$\tilde{\omega} : S_{x^*}/R_{x^*} \to \mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,x^*}$$

tel que pour tous multi-indices α, β, *on ait* $\tilde{\omega}(x^\alpha \xi^\beta) = x^\alpha D^\beta$ $(D = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = \partial/\partial x_j, j = 1, \ldots, n)$, *où* $\mathscr{E}^{\mathbf{R}}_X$ *désigne le faisceau sur* T^*X *des anneaux d'opérateurs pseudodifférentiels.*

(*b*) *On peut construire un isomorphisme d'anneaux*

$$\rho_{10} : \hat{S}_{x^*}/\hat{R}_{x^*} \to S_{x^*}/R_{x^*}$$

tel que $\iota_{01}\rho_{10} = \mathrm{id}$, $\rho_{10}\iota_{01} = \mathrm{id}$, *où* ι_{01} *est l'injection induite par* $\iota_{01} : S_{x^*} \ni F \mapsto F + t.0 + t^2.0 + \cdots \in \hat{S}_{x^*}$.

(*c*) *Les homomorphismes* ρ_{21} *et* ι_{12} *induisent des isomorphismes d'anneaux*

$$\rho_{21} : \hat{S}_2(\Omega)/\hat{R}_2(\Omega) \to \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega),$$
$$\iota_{12} : \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega) \to \hat{S}_2(\Omega)/\hat{R}_2(\Omega),$$

tels que $\rho_{21}\iota_{12} = \mathrm{id}$, $\iota_{12}\iota_{21} = \mathrm{id}$.

Remarque. — Dans [2], on appelait les sections de $\mathscr{E}_X^{\mathbf{R}}$ des opérateurs microlocaux holomorphes et pourtant, dans cet article, on les appelle opérateurs pseudodifférentiels (cf. [3]).

Le théorème suivant est fondamental pour l'étude que nous entreprenons ici :

Théorème 1.2. — *On pose* $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}\rho_{10}$ et $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_2\rho_{21}$. *Alors*

$$\tilde{\omega}_1 : \hat{S}_{x^*}/\hat{R}_{x^*} \to \mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,x^*}$$
$$\tilde{\omega}_2 : \hat{S}_{2,x^*}/\hat{R}_{2,x^*} \to \mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,x^*}$$

sont des isomorphismes linéaires tels que pour tous α, β, *on ait* $\tilde{\omega}_1(x^\alpha\xi^\beta) = \tilde{\omega}_2(x^\alpha\xi^\beta) = x^\alpha D^\beta$.

Définition 1.3. — *On note* :P: *l'image par* $\tilde{\omega}_2$ *d'un symbole doublement formel* P *et on l'appellera le produit normal de* P.

Cette définition est compatible avec la définition de [2]. Par abus de langage, on appellera parfois un élément de $\hat{S}_2(\Omega)$ un symbole formel ou même plus simplement un symbole.

En utilisant la notion de symbole doublement formel, la loi de composition des opérateurs pseudodifférentiels s'écrit :

Proposition 1.4. — *Soient* P *et* Q *deux symboles doublement formels définis sur un ouvert conique* Ω *dans* T^*X. *On pose*

$$W = \exp(t_2\partial_\xi . \partial_y)P(t_1,t_2;x,\xi)Q(t_1,t_2;y,\eta)|_{\eta=\xi}^{y=x}.$$

Alors W *est un symbole doublement formel défini sur* Ω *tel que on ait* :P::Q: = :W:.

Remarque. — On peut remplacer W par

$$W' = \exp(t_1 \partial_\xi . \partial_y) P(t_1, t_2; x, \xi) Q(t_1, t_2; y, \eta)|_{\eta=\xi}^{y=x}.$$

En effet, on voit facilement que $W' \sim W$.

1.2. Soit $P = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$ un symbole formel défini sur un ouvert conique Ω dans T^*X. Soit λ un nombre réel. On dit que P est d'ordre (au plus ou égal à) λ dans Ω si pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe $A \in]0,1[$ et des constantes positives C, d telles que pour tout $j \in \mathbf{N}$, le $P_j(x,\xi)$ soit holomorphe sur $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d\}$, et y vérifie

$$|P_j(x,\xi)| \leqslant CA^j |\xi|^\lambda.$$

On dit qu'un symbole doublement formel Q défini sur Ω est d'ordre λ (resp. 1-0) si $\rho_{21}(Q) = Q(t,t;x,\xi)$ est d'ordre λ (resp. 1-0).

Proposition 1.5. (Cf. [4]). — *Soit* F *un symbole défini sur* Ω. *Soit* P *un symbole formel* (resp. Q *un symbole doublement formel*) *d'ordre* λ *défini sur* Ω. *Si* $F \sim P$ (resp. $F \sim Q$), F *est alors d'ordre* λ *dans* Ω.

Proposition 1.6. (Cf. [2]). — *Si* p *est un symbole doublement formel d'ordre* 1-0, $\exp p$ *est alors un symbole doublement formel. De plus, si* $p \sim 0$, *on a* $\exp p \sim 1$.

2. La loi exponentielle pour les symboles formels.

Dans ce paragraphe, on va généraliser les résultats de [2]. Rappelons que le produit de deux opérateurs pseudodifférentiels à symbole exponentiel s'écrit comme produit normal d'un symbole formel exponentiel : c'est un des théorèmes principaux de [2]. On va montrer qu'un résultat analogue est vrai pour le produit de deux opérateurs à symbole formel exponentiel ainsi que pour celui de deux opérateurs à symbole doublement formel exponentiel.

2.1. Soient p et q deux symboles formels d'ordre 1-0 définis sur un voisinage conique Ω d'un point $x^* \in \dot{T}^*X$. Soient a et b deux symboles formels respectivement d'ordre λ_1 et d'ordre λ_2 définis sur Ω. Définissons les suites $\{w_k\}$ et $\{\psi_k\} (k \in \mathbf{N})$ de symboles formels définis près de la diagonale de $\Omega \times \Omega$ par :

$$w_0 = p(t;x,\xi) + q(t;y,\eta), \tag{2.1}$$

$$\psi_0 = a(t;x,\xi)b(t;y,\eta), \tag{2.2}$$

$$w_{k+1} = \frac{t}{k+1}\left(\partial_\xi . \partial_y w_k + \sum_{\nu=0}^{k} \partial_\xi w_\nu . \partial_y w_{k-\nu}\right), \tag{2.3}$$

$$\psi_{k+1} = \frac{t}{k+1}\left(\partial_\xi . \partial_y \psi_k + \sum_{\nu=0}^{k} (\partial_\xi \psi_\nu . \partial_y w_{k-\nu} + \partial_y \psi_\nu . \partial_\xi w_{k-\nu})\right). \tag{2.4}$$

Si on pose

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t;x,x,\xi,\xi), \tag{2.5}$$

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t;x,x,\xi,\xi), \tag{2.6}$$

on obtient

THÉORÈME 2.1. — *Les séries formelles r et c sont des symboles formels respectivement d'ordre 1-0 et d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2$ définis sur un voisinage conique de x^* tels que l'on ait*

$$:a \exp p::b \exp q: = :c \exp r: \tag{2.7}$$

dans $\mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,x^*}$

Démonstration. — D'après la loi de composition, le premier membre de (2.7) s'écrit

$$:a \exp p::b \exp q: = :\pi|^{y=x}_{\eta=\xi, t_2=1}:,$$

où l'on a posé

$$\pi = \exp(t_2 t \partial_\xi \cdot \partial_y) a(t;x,\xi) b(t;y,\eta) \exp(p(t;x,\xi) + q(t;y,\eta)).$$

Remarquons que π est l'unique solution formelle de

$$\begin{cases} \partial_{t_2}\pi = t\partial_\xi . \partial_y \pi, \\ \pi|_{t_2=0} = a(t;x,\xi)b(t;y,\eta)\exp(p(t;x,\xi) + q(t;y,\eta)). \end{cases} \tag{2.8}$$

Cherchons la solution du problème de Cauchy (2.8) sous la forme :

$$\pi' = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_2^\nu \psi_\nu \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_2^k w_k\right).$$

On voit facilement que π' est la solution si $\{w_k\}$ et $\{\psi_k\}$ satisfont à (2.1)-(2.4). On a alors $\pi' = \pi$.

Pour démontrer le théorème, il reste donc à montrer que r et c sont des symboles formels respectivement d'ordre 1-0 et d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2$. Puisque le résultat qui nous intéresse est de caractère local, on peut supposer que p, q, a et b sont définis sur un ouvert conique $\tilde{\Omega} \supset\supset \Omega$ et que Ω est de la forme $\Omega = \mathrm{U} \times \Gamma$, où U est un ouvert dans X et Γ un ouvert conique propre dans $\mathbf{C}^n$. Soient respectivement p_j, q_j, a_j et b_j les coefficients de t^j des symboles formels p, q, a et b. Il existe alors $\mathrm{A} \in]0,1]$, des constantes positives d, C et une fonction positive Λ définie sur Γ vérifiant $\lim_{|\xi| \to \infty} \Lambda(\xi)/|\xi| = 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, p_j, q_j, a_j et b_j soient holomorphes sur $\Omega \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d\}$ et y vérifient

$$|p_j(x,\xi)| \leqslant (j+1)^{-2}\mathrm{A}^j\Lambda(\xi), \tag{2.9}$$

$$|q_j(x,\xi)| \leqslant (j+1)^{-2}\mathrm{A}^j\Lambda(\xi), \tag{2.10}$$

$$|a_j(x,\xi)| \leqslant (j+1)^{-2}\mathrm{C}\mathrm{A}^j|\xi|^{\lambda_1}, \tag{2.11}$$

$$|b_j(x,\xi)| \leqslant (j+1)^{-2}\mathrm{C}\mathrm{A}^j|\xi|^{\lambda_2}. \tag{2.12}$$

Définissons les suites $\{w_{jk}^{(\ell)}\}$ et $\{\psi_{jk}^{(\ell)}\}$ $(0 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant j)$ de symboles définis sur $\Omega \times \Omega$ par

$$w_{j0}^{(0)} = p_j(x,\xi) + q_j(y,\eta), \tag{2.13}$$

$$\psi_{j0}^{(0)} = \sum_{\mu=0}^{j} a_\mu(x,\xi)b_{j-\mu}(y,\eta), \tag{2.14}$$

$$w_{j,k+1}^{(\ell)} = \frac{1}{k+1}\,(\partial_\xi.\partial_y w_{j-1,k}^{(\ell)} + \Sigma'\,\partial_\xi w_{j'k'}^{(\ell')}.\partial_y w_{j''k''}^{(\ell'')}), \tag{2.15}$$

$$\psi_{j,k+1}^{(\ell)} = \frac{1}{k+1}\,(\partial_\xi.\partial_y\psi_{j-1,k}^{(\ell)} + \Sigma'\,(\partial_\xi w_{j'k'}^{(\ell')}.\partial_y\psi_{j''k''}^{(\ell'')} + \partial_\xi\psi_{j'k'}^{(\ell')}.\partial_y w_{j''k''}^{(\ell'')})), \tag{2.16}$$

où Σ' désigne la somme étendue à tous les indices j', j'', k', k'', ℓ', ℓ'' tels que $j' + j'' = j - 1$, $k' + k'' = k$, $\ell' + \ell'' = \ell - 1$ et où on a posé $w_{jk}^{(\ell)} = \psi_{jk}^{(\ell)} = 0$ si (j,k,ℓ) ne vérifie pas $0 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant j$. On voit alors facilement que $w_k = \sum_{j=k}^{\infty} t^j \sum_{\ell=0}^{k} w_{jk}^{(\ell)}$ et $\psi_k = \sum_{j=k}^{\infty} t^j \sum_{\ell=0}^{k} \psi_{jk}^{(\ell)}$.

LEMME 2.2. — *Il existe des constantes positives* B, C_1 *telles que, pour tout* $\Omega' \subset\subset \Omega$, *on ait dans*

$$\Omega' \times \Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)(1-\varepsilon)^{-1}d, |\eta| \geqslant (j+1)(1-\varepsilon)^{-1}d\} :$$

(2.17)
$$|w_{jk}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta)| \leqslant B^k(j-k+1)^{-2}(k+1)^{k-\ell-3}A^{j-k}\tilde{\Lambda}^{\ell+1}|\xi|^{-k}\varepsilon^{-2k},$$

(2.18)
$$|\psi_{jk}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta)| \leqslant C_1B^k(j-k+1)^{-2}(k+1)^{k-\ell-3}A^{j-k}\tilde{\Lambda}^{\ell+1}|\xi|^{\lambda_1-k}|\eta|^{\lambda_2}\varepsilon^{-2k},$$

où ε *désigne la distance de* $\partial\Omega$ *à* Ω' *sur* $|\xi| = 1$, $\tilde{\Lambda}$ *vaut* $\Lambda(\xi) + \Lambda(\eta)$ *et où* j, k, ℓ *vérifient* $\ell \leqslant k \leqslant j$ $(j,k,\ell \in \mathbf{N})$.

Ce lemme-ci se démontre par la même méthode que la proposition 5.2 de [2] si on remarque l'inégalité suivante :

LEMME 2.3. — *Il existe une constante* $C_2 > 0$ *telle que pour tout* $j \in \mathbf{N}$, *on ait* $\sum_{\nu=0}^{j} (\nu+1)^{-2}(j-\nu+1)^{-2} \leqslant C_2(j+1)^{-2}$.

Si on définit

$$r_j(x,\xi) = \sum_{k=0}^{j} \sum_{\ell=0}^{k} w_{jk}^{(\ell)}(x,x,\xi,\xi),$$
$$c_j(x,\xi) = \sum_{k=0}^{j} \sum_{\ell=0}^{k} \psi_{jk}^{(\ell)}(x,x,\xi,\xi),$$

on a

$$r = \sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi),$$
$$c = \sum_{j=0}^{\infty} t^j c_j(x,\xi).$$

D'après le lemme 2.2, on obtient dans $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)(1-\varepsilon)^{-1}d\}$:

$$|r_j(x,\xi)| \leqslant \sum_{k=0}^{j} \sum_{\ell=0}^{k} |w_{jk}^{(\ell)}(x,x,\xi,\xi)|$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{j} \sum_{\ell=0}^{k} B^k(j-k+1)^{-2}(k+1)^{k-\ell-3}A^{j-k}(2\Lambda)^{\ell+1}|\xi|^{-k}\varepsilon^{-2k}$$
$$\leqslant 2A^j\Lambda \sum_{\nu=0}^{j} \sum_{\ell=0}^{j-\nu} (\ell+\nu+1)^{\nu-3}(BA^{-1}|\xi|^{-1}\varepsilon^{-2})^{\nu}(2BA^{-1}\Lambda|\xi|^{-1}\varepsilon^{-2})^{\ell}.$$

Si $|\xi| \geqslant (j+1)\varepsilon^{-2} d_1$; d_1 étant une constante réelle telle que $d_1 > \dfrac{d}{1-\varepsilon}$, on a

$$|r_j(x,\xi)| \leqslant 2A^j\Lambda \sum_{\ell=0}^{j} (2BA^{-1}\Lambda|\xi|^{-1}\varepsilon^{-2})^{\ell} \sum_{\nu=0}^{j-\ell} (BA^{-1} d_1^{-1})^{\nu}.$$

On peut alors choisir d_1 assez grand pour avoir $\sum_{\nu=0}^{\infty} (BA^{-1} d_1^{-1})^{\nu} < \infty$.

De plus, comme $\lim_{|\xi|\to\infty} \Lambda|\xi|^{-1} = 0$, $\sum_{\ell=0}^{j} (2BA^{-1}\Lambda|\xi|^{-1}\varepsilon^{-2})^{\ell}$ est borné si $|\xi| \geqslant (j+1)\varepsilon^{-2} d_1$. Donc on peut en déduire l'existence d'une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout j, on ait

$$|r_j(x,\xi)| \leqslant C_3 A^j \Lambda(\xi)$$

dans $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)\varepsilon^{-2} d_1\}$.

On peut aussi trouver des constantes d_2 et C_4 telles que c_j vérifie

$$|c_j(x,\xi)| \leqslant C_4 A^j |\xi|^{\lambda_1+\lambda_2}$$

dans $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)\varepsilon^{-2} d_2\}$ pour tout $j \in \mathbf{N}$. Ce qui prouve le théorème.

2.2. Donnons la généralisation suivante du théorème 2.1. Soient $p = p(t_1, t_2; x,\xi)$ et $q = q(t_1, t_2; x,\xi)$ deux symboles doublement formels d'ordre 1-0 définis sur un voisinage conique Ω de $x^* \in \dot{T}^*X$. Soient $a = a(t_1, t_2; x,\xi)$ et $b = b(t_1, t_2; x,\xi)$ deux symboles doublement formels respectivement d'ordre λ_1 et d'ordre λ_2 définis sur Ω. Définissons les suites $\{w_k\}$ et $\{\psi_k\}$ $(k \in \mathbf{N})$ de symboles doublement formels définis près de la diagonale de $\Omega \times \Omega$ par

$$w_0 = p(t_1, t_2; x,\xi) + q(t_1, t_2; y,\eta), \tag{2.19}$$

$$\psi_0 = a(t_1, t_2; x,\xi) b(t_1, t_2; y,\eta), \tag{2.20}$$

$$w_{k+1} = \frac{t_2}{k+1} \left(\partial_\xi . \partial_y w_k + \sum_{\nu=0}^{k} \partial_\xi w_\nu . \partial_y w_{k-\nu}\right), \tag{2.21}$$

$$\psi_{k+1} = \frac{t_2}{k+1} \left(\partial_\xi . \partial_y \psi_k + \sum_{\nu=0}^{k} (\partial_\xi \psi_\nu . \partial_y w_{k-\nu} + \partial_y \psi_\nu . \partial_\xi w_{k-\nu})\right). \tag{2.22}$$

Si on pose

$$r = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t_1,t_2;x,x,\xi,\xi), \tag{2.23}$$

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t_1,t_2;x,x,\xi,\xi), \tag{2.24}$$

on obtient

THÉORÈME 2.1′. — *Les séries formelles* r *et* c *sont des symboles doublement formels respectivement d'ordre* 1-0 *et d'ordre* $\lambda_1 + \lambda_2$ *définis sur* Ω *tels qu'on ait*

$$:a \exp p::b \exp q: = :c \exp r: \tag{2.25}$$

dans $\mathscr{E}^{\mathbf{R}}_{X,x^*}$.

On démontre ce résultat d'une manière analogue à la preuve du théorème 2.1.

2.3. Dans [2], on a établi les formules donnant l'opérateur adjoint et relatives à un changement de coordonnées pour les opérateurs à symbole exponentiel (Théorèmes 3.3-3.6, [2]). Ces formules se généralisent pour les opérateurs à symbole (doublement) formel exponentiel. Nous ne les explicitons pas ici mais on les trouve aisément en procédant comme pour les théorèmes 2.1 et 2.1′.

3. Opérateurs exponentiels.

Dans ce paragraphe, on considère la fonction exponentielle d'un opérateur d'ordre 1-0.

Soit $p = p(t;x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} t^j p_j(x,\xi)$ un symbole formel d'ordre 1-0 défini sur un voisinage conique de $x^* \in \dot{T}^*X$. On se propose alors de définir l'opérateur $\exp(s{:}p{:})(s \in \mathbf{C})$ en utilisant la notion de symbole doublement formel. Définissons la suite $\{p^{(\ell)}\}$ $(\ell \in \mathbf{N})$ des symboles doublement formels par

$$p^{(0)}(t_1,t_2;x,\xi) = 1, \tag{3.1}$$

$$p^{(\ell+1)}(t_1,t_2;x,\xi) = \exp(t_2\partial_\xi . \partial_y)p(t_1;x,\xi)p^{(\ell)}(t_1,t_2;y,\eta)|_{\eta=\xi}^{y=x}. \tag{3.2}$$

Remarquons qu'on a $:p^{(\ell)}: = (:p:)^\ell$. Si on pose pour $s \in \mathbf{C}$

$$(3.3) \qquad E(t_1,t_2;s,x,\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{s^\ell}{\ell!} p^{(\ell)}(t_1,t_2;x,\xi),$$

on obtient

PROPOSITION 3.1. — *Pour tout* $s \in \mathbf{C}$, *la série formelle* E *est un symbole doublement formel défini sur un voisinage conique de* x^* *indépendant de* s.

Démonstration. — Supposons que p soit défini sur un ouvert conique $\tilde{\Omega}$ de T^*X. Soit un ouvert $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ de la forme $\Omega = U \times \Gamma$ où U est un ouvert dans X et Γ un ouvert conique dans $\mathbf{C}^n$. Il existe alors $A \in]0,1[$, une constante $d > 0$ et une fonction Λ positive définie sur Γ vérifiant $\lim_{|\xi|\to\infty} \Lambda(\xi)\backslash|\xi| = 0$ et tels qu'on ait pour tout $j \in \mathbf{N}$

$$(3.4) \qquad |p_j(x,\xi)| \leqslant A^j\Lambda(\xi)$$

dans $\Omega \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d\}$.

Notons $p^{(\ell)} = \sum_{j,k=0}^{\infty} t_1^j t_2^k p_{jk}^{(\ell)}(x,\xi)$. D'après (3.1) et (3.2), on a pour tous j, k, ℓ :

$$(3.5) \qquad p_{jk}^{(0)}(x,\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$(3.6) \qquad p_{jk}^{(\ell+1)}(x,\xi) = \sum_{\substack{i+\mu=j \\ |\alpha|+\nu=k}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_i(x,\xi) . \partial_x^\alpha p_{\mu\nu}^{(\ell)}(x,\xi).$$

Il est clair que les $p_{jk}^{(\ell)}$ sont holomorphes sur $\Omega \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d)\}$. De plus, on a

LEMME 3.2. — *Soient* A_1 *une constante telle que* $A < A_1 < 1$, M *une constante supérieure à* 1. *Il existe alors une constante* $B > 0$ *telle que pour tout* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *on ait dans* $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)(1-\varepsilon)^{-1}d\}$:

$$(3.7) \qquad |p_{jk}^{(\ell)}(x,\xi)| \leqslant k!A_1^j B^\ell \Lambda^\ell |\xi|^{-k} \varepsilon^{-2Mk}$$

où ε *désigne la distance de* $\partial\Omega$ *à* Ω' *sur* $|\xi| = 1$ *et où* j, k, ℓ *appartiennent à* $\mathbf{N}$.

Démonstration du lemme 3.2. — Procédons par récurrence sur ℓ. D'après (3.5), l'estimation (3.7) est vraie pour tous j, k lorsque $\ell = 0$.

Supposons que (3.7) soit vrai pour tous j, k. On a alors d'après la formule de Cauchy

$$(3.8) \qquad |\partial_x^\alpha p_{jk}^{(\ell)}(x,\xi)| \leqslant (k+|\alpha|)!\mathrm{A}_1^j\,\mathrm{B}^\ell \Lambda^\ell |\xi|^{-k}\varepsilon^{-\mathrm{M}(2k+|\alpha|)}$$

dans $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)(1-\varepsilon)^{-1}d\}$. D'autre part, on a d'après (3.4)

$$(3.9) \qquad |\partial_\xi^\alpha p_j(x,\xi)| \leqslant |\alpha|!\mathrm{A}^j\Lambda(\xi)|\xi|^{-|\alpha|}\varepsilon^{-|\alpha|}\mathrm{B}_1$$

dans $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)(1-\varepsilon)^{-1}d\}$, où B_1 est une constante indépendante de ε. On déduit de (3.6), (3.8) et (3.9) que

$$\begin{aligned}|p_{jk}^{(\ell)}(x,\xi)| &\leqslant \mathrm{B}_1 \sum_{\substack{i+\mu=j\\|\alpha|\leqslant k}} \frac{|\alpha|!k!}{\alpha!}\,\mathrm{A}^i\mathrm{A}_1^\mu\mathrm{B}^\ell\Lambda^{\ell+1}|\xi|^{-k}\varepsilon^{-2\mathrm{M}k}\varepsilon^{(\mathrm{M}-1)|\alpha|}\\ &\leqslant \mathrm{B}_1 k!\mathrm{A}^j\mathrm{B}^\ell\Lambda^{\ell+1}|\xi|^{-k}\varepsilon^{-2\mathrm{M}k}\sum_{i=0}^{j}(\mathrm{A}\mathrm{A}_1^{-1})^i\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\,\varepsilon^{(\mathrm{M}-1)|\alpha|}.\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{A} < \mathrm{A}_1$, $1 < \mathrm{M}$ et comme on peut supposer que ε est assez petit, on obtient

$$\mathrm{B}_1\sum_{i=0}^{j}(\mathrm{A}\mathrm{A}_1^{-1})^i\sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\,\varepsilon^{(\mathrm{M}-1)|\alpha|} \leqslant \mathrm{B}_1\mathrm{A}_1(\mathrm{A}_1-\mathrm{A})^{-1}(1-n\varepsilon^{\mathrm{M}-1})^{-1}.$$

Dès lors l'estimation (3.7) s'ensuit pour $\ell + 1$ si on choisit B assez grand.

Fin de la démonstration de la proposition 3.1. — D'après le lemme 3.1, on a pour tout $s \in \mathbf{C}$

$$(3.10) \qquad \left|\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{s^\ell}{\ell!}\,p_{jk}^{(\ell)}(x,\xi)\right| \leqslant k!\mathrm{A}_1^j|\xi|^{-k}\varepsilon^{-2\mathrm{M}k}\exp(|s|\mathrm{B}\Lambda(\xi))$$

dans $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)(1-\varepsilon)^{-1}d\}$. La série E s'écrit alors

$$\mathrm{E} = \sum_{j,k=0}^{\infty} t_1^j t_2^k \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{s^\ell}{\ell!}\,p_{jk}^{(\ell)}(x,\xi).$$

Si on pose $\mathrm{E}_{jk}(s,x,\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{s^\ell}{\ell!}\,p_{jk}^{(\ell)}(x,\xi)$, on obtient d'après (3.10) :

$$|\mathrm{E}_{jk}(s,x,\xi)| \leqslant \mathrm{A}_1^{j+k}\exp(|s|\mathrm{B}\Lambda(\xi))$$

dans $\Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+k+1)(1-\varepsilon)^{-1}d\varepsilon^{-2\mathrm{M}}\mathrm{A}_1^{-1}\}$, ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.

D'après la proposition précédente, on peut considérer le produit normal $:\mathrm{E}:$ du symbole E pour tout $s \in \mathbf{C}$. Nous allons le noter $\exp(s{:}p{:})$ puisqu'il vérifie

$$(3.11) \qquad \begin{cases} \partial_s{:}\mathrm{E}{:} = {:}p{:}{:}\mathrm{E}{:}\,, \\ {:}\mathrm{E}(t_1,t_2;0,x,\xi){:} = 1\,. \end{cases}$$

4. Opérateurs exponentiels et opérateurs à symbole exponentiel.

Dans ce paragraphe, on étudie la relation entre les opérateurs exponentiels et les opérateurs à symbole exponentiel. D'abord, on montre qu'un opérateur exponentiel s'écrit sous la forme du produit normal d'un symbole exponentiel. On prouve ensuite que la réciproque est encore vraie.

4.1. Étant donné un symbole formel $p = \sum_{j=0}^{\infty} t^j p_j(x,\xi)$ d'ordre 1-0 défini sur un voisinage conique de $x^* \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X}$, on peut considérer, d'après la proposition 3.1, l'opérateur $\exp(s{:}p{:})$ $(s \in \mathbf{C})$ défini par $\exp(s{:}p{:}) = {:}\mathrm{E}(t_1,t_2;s,x,\xi){:}$. Il s'agit d'écrire E sous la forme

$$\mathrm{E}(t_1,t_2;s,x,\xi) = \exp q(t_1,t_2;s,x,\xi)\,,$$

q étant un symbole doublement formel pour tout $s \in \mathbf{C}$.

Définissons les suites $\{q_{ij}^{(\ell)}\}$ $(i,j,\ell \in \mathbf{N}, \ell \leqslant j+1)$ et $\{\psi_{ijk}^{(\ell)}\}$ $(i,j,k,\ell \in \mathbf{N}, \ell \leqslant j, k \leqslant j)$ des symboles définis respectivement près de $x^* \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X}$ et de $(x^*,x^*) \in \dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X} \times \dot{\mathrm{T}}^*\mathrm{X}$ par

$$(4.1) \qquad \psi_{i,0,0}^{(0)}(x,y,\xi,\eta) = p_i(x,\xi) \quad (i \in \mathbf{N}),$$

$$(4.2) \qquad \psi_{i,j,0}^{(0)}(x,y,\xi,\eta) = 0 \quad (i \in \mathbf{N}\,,\ j \in \mathbf{N}_+ = \{1,2,\dots\}),$$

$$(4.3) \qquad \psi_{i,j,0}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta) = 0 \quad (i,j \in \mathbf{N}\,,\ \ell \in \mathbf{N}_+),$$

$$(4.4) \qquad q_{ij}^{(0)}(x,\xi) = 0 \quad (i,j \in \mathbf{N}),$$

$$(4.5) \qquad \psi_{i,j,k+1}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{k+1}\,\big(\partial_\xi\,.\,\partial_y\psi_{i,j-1,k}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta) + \Sigma''\,\partial_\xi\psi_{i'j'k}^{(\ell')}(x,y,\xi,\eta)\,.\,\partial_y q_{i''j''}^{(\ell'')}(y,\eta)\big)\,,$$

$$(4.6) \qquad q_{ij}^{(\ell+1)}(x,\xi) = \frac{1}{\ell+1}\sum_{k=0}^{j} \psi_{ijk}^{(\ell)}(x,x,\xi,\xi)\,,$$

où Σ'' désigne la somme étendue à tous indices $i', i'', j', j'', \ell', \ell''$ tels que $i' + i'' = i$, $j' + j'' = j - 1$, $\ell' + \ell'' = \ell$, $\ell' \leqslant j'$, $\ell'' - 1 \leqslant j''$ et où on a posé $q_{ij}^{(\ell)} = 0$ si $\ell > j + 1$ et $\psi_{ijk}^{(\ell)} = 0$ si $\ell > j$ ou $k > j$. Si $\psi_{ijk}^{(m)}$ est connu pour tout $m < \ell$ et tous i, j, k, alors $q_{ij}^{(m)}$ est défini pour tout $m \leqslant \ell$ et tous i, j, et puis, en utilisant (4.5), $\psi_{ijk}^{(\ell)}$ est obtenu pour tous i, j, k. A présent, si on pose

$$q_{ij}(s,x,\xi) = \sum_{\ell=0}^{j+1} s^\ell q_{ij}^{(\ell)}(x,\xi), \tag{4.7}$$

$$q(t_1,t_2;s,x,\xi) = \sum_{i,j=0}^{\infty} t_1^i t_2^j q_{ij}(s,x,\xi), \tag{4.8}$$

on obtient

THÉORÈME 4.1. — *Pour tout* $s \in \mathbf{C}$, *la série formelle* q *est un symbole doublement formel d'ordre* 1-0 *défini sur un voisinage conique de* x^* *indépendant de* s *et vérifie*

$$:\exp q: = \exp(s{:}p{:}). \tag{4.9}$$

Remarque — L'identité (4.9) signifie

$$\exp q = \mathrm{E}, \tag{4.10}$$

où E est le symbole défini par (3.3).

Démonstration du théorème 4.1. — Supposons que p soit défini sur un ouvert conique $\tilde{\Omega}$ de T^*X. Soit un voisinage (de x^*) $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ de la forme $\Omega = \mathrm{U} \times \Gamma$ où U est un ouvert dans X et Γ un ouvert conique dans $\mathbf{C}^n$. Il existe alors $\mathrm{A} \in]0,1[$, $d > 0$ et une fonction positive Λ défini sur Γ vérifiant $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \Lambda(\xi)|\xi|^{-1} = 0$ et tels qu'on ait pour tout j

$$|p_j(x,\xi)| \leqslant (j+1)^{-2}\mathrm{A}^j\Lambda(\xi) \tag{4.11}$$

dans $\Omega \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d\}$.

LEMME 4.2. — *Soit* M *une constante supérieure à* 1. *Il existe une constante* $\mathrm{C}' > 0$ *telle que pour tous* Ω'_1, $\Omega'_2 \subset\subset \Omega$ *et tous* $(x,\xi) \in \Omega'_1$, $(y,\eta) \in \Omega'_2$ *vérifiant* $|\xi| \geqslant (i+1)d^{(1)}$, $|\eta| \geqslant (i+1)d^{(2)}$, *on ait*

$$|\psi_{ijk}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta)| \leqslant \frac{j!}{\ell!} c_{ijk\ell}\mathrm{A}^i(\varepsilon_1^{-k}\varepsilon_2^{-2j+k})^{\mathrm{M}}\Lambda(\xi)\Lambda(\eta)^\ell|\xi|^{-k}|\eta|^{-j+k}, \tag{4.12}$$

$$|q_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)| \leqslant \frac{j!}{\ell!} \mathrm{C}' c_{ij\ell}\mathrm{A}^i\varepsilon_1^{-2\mathrm{M}j}\Lambda(\xi)^\ell|\xi|^{-j} \tag{4.13}$$

avec

$$c_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = ((i_1+1)(i_2+1)\ldots(i_m+1))^{-2},$$

où ε_ν *désigne la distance de* $\partial\Omega$ *à* Ω'_ν *sur* $|\xi| = 1$, $d^{(\nu)}$ *vaut* $(1-\varepsilon_\nu)^{-1}d$ $(\nu=1,2)$.

Démonstration du lemme 4.2. — Remarquons d'abord qu'il est facile de montrer (4.13) si on connaît déjà (4.12). En effet, on a pour tout $(x,\xi) \in \Omega'_1 \cap \{|\xi| \geqslant (i+1)d^{(1)}\}$

$$|q_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)| \leqslant \frac{1}{\ell}\sum_{k=0}^{j} |\psi_{ijk}^{(\ell-1)}(x,x,\xi,\xi)| \leqslant \frac{j!}{\ell!}\sum_{k=0}^{j} c_{i,j,k,\ell-1}A^i\varepsilon_1^{-2Mj}\Lambda(\xi)^\ell|\xi|^{-j}.$$

Il existe une constante C' telle que l'on ait

$$\sum_{k=0}^{j} c_{i,j,k,\ell-1} \leqslant C'c_{i,j,\ell}$$

pour tous j, ℓ. D'où (4.13).

Grâce à la remarque que nous venons de formuler, nous allons démontrer (4.12) par récurrence. Pour $k = 0$, la majoration (4.12) est évidente. Supposons que $\psi_{i'j'k'}^{(\ell')}$ satisfasse cette estimation pour tous ℓ', i', j', k' tels qu'on ait soit $\ell' < \ell$, soit $\ell' = \ell$ et $k' \leqslant k$. Montrons alors que (4.12) a lieu pour $\psi_{i,j,k+1}^{(\ell)}$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$(4.14)\quad \frac{1}{k+1}|\partial_{\xi_\nu}\psi_{i'j'k}^{(\ell')}(x,y,\xi,\eta)|$$
$$\leqslant \varepsilon_1^{-1}\,4^M\frac{j'!}{\ell'!}c_{i'j'k\ell'}A^{i'}(\varepsilon_1^{-k}\varepsilon_2^{-2j'+k})^M\Lambda(\xi)\Lambda(\eta)^{\ell'}|\xi|^{-k-1}|\eta|^{-j'+k},$$

$$(4.15)\quad |\partial_{y_\nu}q_{i''j''}^{(\ell'')}(y,\eta)| \leqslant \varepsilon_2^{-1}4^{2M}\frac{(j''+1)!}{\ell''!}C'c_{i''j''\ell''}A^{i''}\varepsilon_2^{-2Mj''}\Lambda(\eta)^{\ell''}|\eta|^{-j''},$$

$$(4.16)\quad \frac{1}{k+1}|\partial_{\xi_\nu}\partial_{y_\nu}\psi_{i,j-1,k}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta)|$$
$$\leqslant (\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1}4^{3M}\frac{j!}{\ell!}c_{i,j-1,k,\ell}A^i(\varepsilon_1^{-k}\varepsilon_2^{-2j+k})^M\Lambda(\xi)\Lambda(\eta)^\ell|\xi|^{-k-1}|\eta|^{-j+k+1},$$

pour $(x,\xi) \in \Omega'_1 \cap \{|\xi| \geqslant (i+1)d^{(1)}\}$, $(y,\eta) \in \Omega'_2 \cap \{|\eta| \geqslant (i+1)d^{(2)}\}$, $i' + i'' = i$, $j' + j'' = j - 1$, $\ell' + \ell'' = \ell$, $\nu = 1, \ldots, n$. Afin d'estimer $|\psi_{i,j,k+1}^{(\ell)}|$, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 4.3. — *Il existe une constante* $C_5 > 0$ *telle que pour tous* j, ℓ, *on ait*

$$\Sigma^{(3)} \frac{j'!(j''+1)!}{\ell'!\ell''!} c_{j'\ell'} c_{j''\ell''} \leqslant C_5 \frac{j!}{\ell!} c_{j\ell} \tag{4.17}$$

où $\Sigma^{(3)}$ *désigne la somme étendue à tous indices* j', j'', ℓ', ℓ'', *tels que*

$$j' + j'' = j - 1, \quad \ell' + \ell'' = \ell, \quad \ell' \leqslant j', \quad \ell'' - 1 \leqslant j''. \tag{4.18}$$

Démonstration du lemme 4.3. — Comme on a $0 \leqslant \ell' \leqslant \ell$ et $\ell - j + j' \leqslant \ell' \leqslant j'$, donc

$$\binom{\ell}{\ell'} \leqslant \binom{\ell + j' - \ell'}{j'} \leqslant \binom{j}{j'} \left(\binom{m}{r} = m!/(r!(m-r)!)\right),$$

il vient

$$\frac{j!}{\ell!} \Sigma^{(3)} \binom{\ell}{\ell'} \binom{j}{j'}^{-1} c_{j'\ell'} c_{j''\ell''} \leqslant \frac{j!}{\ell!} \Sigma^{(3)} c_{j'\ell'} c_{j''\ell''}.$$

D'après le lemme 2.3, on en déduit l'existence d'une constante $C_5 > 0$ telle que $\Sigma^{(3)} c_{j'\ell'} c_{j''\ell''} \leqslant C_5 c_{j\ell}$, ceci prouve le lemme 4.3.

D'après (4.14), (4.15), on a pour tous $(x,\xi) \in \Omega'_1 \cap \{|\xi| \geqslant (i+1)d^{(1)}\}$, $(y,\eta) \in \Omega'_2 \cap \{|\eta| \geqslant (i+1)d^{(2)}\}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1} |\Sigma'' \, \partial_\xi \psi^{(\ell')}_{i'j'k}(x,y,\xi,\eta) \, . \, \partial_y q^{(\ell'')}_{i''j''}(y,\eta)| &\leqslant (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-1} 4^{3M} C' \Sigma'' \frac{j'!(j''+1)!}{\ell'!\ell''!} c_{i'j'k\ell'} c_{i''j''\ell''} \\ &\times A^i (\varepsilon_1^{-k} \varepsilon_2^{-2j+k})^M \Lambda(\xi) \Lambda(\eta)^\ell |\xi|^{-k-1} |\eta|^{-j+k+1},\end{aligned}$$

où Σ'' désigne la somme de (4.5). Grâce aux lemmes 2.3 et 4.3, on obtient

$$\begin{aligned}\Sigma'' \frac{j'!(j''+1)!}{\ell'!\ell''!} c_{i'j'k\ell'} c_{i''j''\ell''} &= \frac{1}{(k+1)^2} \sum_{i'+i''=i} c_{i'i''} \Sigma^{(3)} \frac{j'!(j''+1)!}{\ell'!\ell''!} c_{j'\ell'} c_{j''\ell''} \\ &\leqslant 4 C_2 C_5 \frac{j!}{\ell!} c_{i,j,k+1,\ell}.\end{aligned}$$

On a donc, d'après (4.5) et (4.16)

$$\begin{aligned}|\psi^{(\ell)}_{i,j,k+1}(x,y,\xi,\eta)| &\leqslant (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{M-1} 4^{3M} (4^2 + 4C' C_2 C_5) \\ &\times \frac{j!}{\ell!} c_{i,j,k+1,\ell} \, A^i (\varepsilon_1^{-k-1} \varepsilon_2^{-2j+k+1})^M \Lambda(\xi) \Lambda(\eta)^\ell |\xi|^{-k-1} |\eta|^{-j+k+1},\end{aligned}$$

dans $\Omega'_1 \times \Omega'_2 \cap \{|\xi| \geqslant (i+1)d^{(1)}, |\eta| \geqslant (i+1)d^{(2)}\}$. Quitte à modifier Ω'_1 et Ω'_2, on peut supposer ε_1 et ε_2 petits et comme on a $M > 1$, on peut en déduire l'inégalité

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{M-1}4^{3M+1}(4+C'C_2C_5) \leqslant 1,$$

ce qui prouve (4.12) pour $k+1$. D'où le lemme 4.2 par récurrence.

Fin de la démonstration du théorème 4.1. – Soient B, d_1 des constantes telles que $0 < B < 1$, $d^{(1)}$, $d^{(2)} < d_1$. D'après le lemme 4.2, on a pour tout $(x,\xi) \in \Omega'_1 \cap \{|\xi| \geqslant (i+j+1)d_1\varepsilon_1^{-2M}B^{-1}\}$:

$$\begin{aligned} |q_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)| &\leqslant \frac{C'j!A^iB^j}{\ell!(i+j+1)^{j-\ell+1}}(\Lambda(\xi)|\xi|^{-1}B^{-1}\varepsilon_1^{-2M})^{\ell-1}\Lambda(\xi) \\ &\leqslant C'A^iB^j\frac{j^{\ell-1}}{\ell!}(\Lambda(\xi)|\xi|^{-1}B^{-1}\varepsilon_1^{-2M})^{\ell-1}\Lambda(\xi). \end{aligned}$$

Pour tout $r > 0$, on a pour tout $s \in \mathbf{C}$ vérifiant $|s| \leqslant r$:

$$\left|\sum_{\ell=1}^{j+1} s^\ell q_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)\right| \leqslant C'A^iB^j \exp(jr\Lambda(\xi)|\xi|^{-1}B^{-1}\varepsilon_1^{-2M})\Lambda(\xi).$$

Choisissons alors d_1 de façon à avoir

$$B\exp(r\Lambda(\xi)|\xi|^{-1}B^{-1}\varepsilon_1^{-2M}) < 1$$

quand $|\xi|$ est supérieure ou égale à $d_1\varepsilon_1^{-2M}B^{-1}$; on obtient alors immédiatement que

$$q = \sum_{i,j=0}^{\infty} t_1^i t_2^j \sum_{\ell=1}^{j+1} s^\ell q_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)$$

est un symbole doublement formel d'ordre 1-0.

Vérifions à présent l'égalité (4.9), c'est-à-dire (4.10). Comme $:E:$ est l'unique solution du problème de Cauchy (3.11), il suffit de montrer que q vérifie

$$\partial_s :\exp q: = :p::\exp q:, \tag{4.19}$$

$$:\exp q(t_1,t_2;0,x,\xi): = 1. \tag{4.20}$$

On a facilement (4.20) d'après (4.4). Le second membre de (4.19) s'écrit

$$:p::\exp q: = :\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t_1,t_2;s,x,x,\xi,\xi)\exp q(t_1,t_2;s,x,\xi):, \tag{4.21}$$

où on a posé

$$(4.22)\quad \psi_k(t_1,t_2;s,x,y,\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{j} t_1^i t_2^j s^\ell \psi_{ijk}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta).$$

En effet, d'après (4.1)-(4.3), (4.5), on a

$$\psi_0(t_1,t_2;s,x,y,\xi,\eta) = p(t_1;x,\xi),$$

$$\psi_{k+1}(t_1,t_2;s,x,y,\xi,\eta) = \frac{t_2}{k+1}(\partial_\xi.\partial_y\psi_k(t_1,t_2;s,x,y,\xi,\eta)$$
$$+ \partial_\xi\psi_k(t_1,t_2;s,x,y,\xi,\eta).\partial_y q(t_1,t_2;s,y,\eta)),$$

d'où (4.21) en utilisant le théorème 2.1′.

D'autre part, on a d'après (4.6) :

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{j} t_1^i t_2^j s^\ell(\ell+1)q_{ij}^{(\ell+1)}(x,\xi) = \sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{j}\sum_{k=0}^{j} t_1^i t_2^j s^\ell \psi_{ijk}^{(\ell)}(x,x,\xi,\xi),$$

c'est-à-dire, $\partial_s q(t_1,t_2;s,x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t_1,t_2;s,x,x,\xi,\xi)$; ce qui prouve (4.19) et le théorème 4.1.

Remarques. — *a*) On a

$$q(t,t;s,x,\xi) \equiv sp_0 + t(sp_1 + \frac{s^2}{2}\partial_\xi p_0.\partial_x p_0)$$
$$+ t^2(sp_2 + s^2\left(\frac{1}{2}(\partial_\xi p_0.\partial_x p_1 + \partial_\xi p_1.\partial_x p_0) + \frac{1}{4}\partial_\xi^2 p_0.\partial_x^2 p_0\right)$$
$$+ s^3\frac{1}{6}(\partial_\xi^2 p_0.(\partial_x p_0)^2 + (\partial_\xi p_0)^2.\partial_x^2 p_0 + \partial_\xi p_0.\partial_\xi\partial_x p_0.\partial_x p_0))$$

modulo $t^3\,\hat{\mathrm{S}}_{x^*}$. On obtient donc, par exemple,

$$\exp(s{:}x_1\sqrt{\xi_1}{:}) = {:}\exp(sx_1\sqrt{\xi_1} + s^2x_1/4){:},$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{s^\ell}{\ell!}(x_1\sqrt{\mathrm{D}_{x_1}})^\ell = \exp(s^2x_1/4)\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{s^\ell x_1^\ell}{\ell!}(\sqrt{\mathrm{D}_{x_1}})^\ell.$$

b) Soit λ un nombre réel tel que $0 \leqslant \lambda < 1$. Si p_j est d'ordre λ (resp. | d'ordre $(j+1)\lambda - j$) | pour tout j, on voit alors facilement que $q_{ij}^{(\ell)}$ est | d'ordre $\lambda\ell - j$ (resp. d'ordre | $(i+\ell)\lambda - i - j$) pour tous i, j, ℓ ($\ell \leqslant j+1$). Par conséquent, p et q ont même « partie principale » (cf. Propositions 1.5 et 1.6).

4.2. Soit $q = q(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j q_j(x,\xi)$ un symbole formel d'ordre 1-0 défini sur un voisinage conique de $x^* \in \dot{T}^*X$. Cherchons à présent un symbole formel $p = p(t;x,\xi)$ d'ordre 1-0 tel que

$$\exp :p: = :\exp q: . \tag{4.23}$$

Si p est donné, le théorème 4.1 permet de construire un symbole doublement formel $\tilde{q} = \tilde{q}(t_1,t_2;x,\xi)$ satisfaisant à

$$\exp :p: = :\exp \tilde{q}: . \tag{4.24}$$

Le symbole $\tilde{q}$ s'écrit

$$\tilde{q} = \sum_{i,j=0}^{\infty} t_1^i t_2^j \tilde{q}_{ij}(x,\xi), \tag{4.25}$$

$$\tilde{q}_{ij}(x,\xi) = \sum_{\ell=1}^{j+1} q_{ij}^{(\ell)}(x,\xi) = \sum_{\ell=0}^{j} \frac{1}{\ell+1} \sum_{k=0}^{j} \tilde{\psi}_{ijk}^{(\ell)}(x,x,\xi,\xi), \tag{4.26}$$

où $\{\tilde{\psi}_{ijk}^{(\ell)}\}$ est défini par (cf. (4.1)-(4.6))

$$\tilde{\psi}_{i00}^{(0)} = p_i(x,\xi) \quad (i \in \mathbf{N}), \tag{4.27}$$

$$\tilde{\psi}_{ij0}^{(0)} = 0 \quad (i \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{N}_+), \tag{4.28}$$

$$\tilde{\psi}_{ij0}^{(\ell)} = 0 \quad (i,j \in \mathbf{N},\ \ell \in \mathbf{N}_+), \tag{4.29}$$

$$\tilde{\psi}_{i,j,k+1}^{(\ell)} = \frac{1}{k+1} \left(\partial_\xi . \partial_y \tilde{\psi}_{i,j-1,k}^{(\ell)} + \Sigma' \, \partial_\xi \tilde{\psi}_{i'j'k}^{(\ell')} . \partial_y \tilde{q}_{i''j''}^{(\ell'')}(y,\eta)\right), \tag{4.30}$$

et où on a posé

$$\tilde{q}_{ij}^{(0)}(x,\xi) = 0, \tag{4.31}$$

$$q_{ij}^{(\ell+1)}(x,\xi) = \frac{1}{\ell+1} \sum_{k=0}^{j} \tilde{\psi}_{ijk}^{(\ell)}(x,x,\xi,\xi). \tag{4.32}$$

Pour la réciproque, posons $\tilde{q}(t,t;x,\xi) = q(t;x,\xi)$, et essayons de déduire les $\{p_j\}$ des $\{q_j\}$ en procédant comme suit : définissons la suite $\{\psi_{ijk}^{(\ell)}(x,y,\xi,\eta)\}$ $(0 \leqslant i,\ 0 \leqslant k \leqslant j,\ 0 \leqslant \ell \leqslant j)$ par

$$\psi_{000}^{(0)}(x,y,\xi,\eta) = q_0(x,\xi), \tag{4.33}$$

$$\psi^{(0)}_{ij0}(x,y,\xi,\eta) = 0 \quad (i \in \mathbf{N},\ j \in \mathbf{N}_+), \tag{4.34}$$

$$\psi^{(\ell)}_{ij0}(x,y,\xi,\eta) = 0 \quad (i,j \in \mathbf{N},\ \ell \in \mathbf{N}_+), \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(\ell)}_{i,j,k+1}(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{k+1}\,&(\partial_\xi . \partial_y \psi^{(\ell)}_{i,j-1,k}(x,y,\xi,\eta)\\ &+ \Sigma^{(4)}\, \partial_\xi \psi^{(\ell')}_{i'j'k}(x,y,\xi,\eta) . \partial_y \psi^{(\ell''-1)}_{i''j''\nu}(y,y,\eta,\eta)),\end{aligned} \tag{4.36}$$

où $\Sigma^{(4)}$ désigne la somme étendue à tous indices i', i'', j', j'', ℓ', ℓ'', ν tels que $i' + i'' = i$, $j' + j'' = j - 1$, $\ell' + \ell'' = \ell$, $0 \leqslant \nu \leqslant j''$ et par

$$\psi^{(0)}_{i00}(x,y,\xi,\eta) = q_i(x,\xi) - \sum_{\substack{\mu+\nu=i\\ \mu<i}} \sum_{\ell=0}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{\ell+1}\, \psi^{(\ell)}_{\mu\nu k}(x,x,\xi,\xi). \tag{4.37}$$

Si on définit encore $p = \sum_{i=0}^{\infty} t^i p_i(x,\xi)$ avec

$$p_i(x,\xi) = \psi^{(0)}_{i00}(x,x,\xi,\xi) (= \psi^{(0)}_{i00}(x,y,\xi,\eta)), \quad i \in \mathbf{N}, \tag{4.38}$$

nous obtenons :

THÉORÈME 4.5. — *La série formelle* p *est un symbole formel d'ordre* 1-0 *défini sur un voisinage conique de* x^* *et vérifie*

$$\exp :p: = :\exp q:. \tag{4.39}$$

Démonstration. — Si on sait déjà que p est un symbole formel d'ordre 1-0, il est facile de montrer (4.39). En effet, si on construit $\tilde{q}$ des $\{p_j\}$ par (4.25)-(4.32), on a

$$\tilde{q}(t,t;x,\xi) = q(t;x,\xi). \tag{4.40}$$

On a donc $\exp :p: = :\exp \tilde{q}: = :\exp q:$.

On peut supposer que q soit défini sur un ouvert conique $\tilde{\Omega}$ et qu'il existe un voisinage $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$ de x^* de la forme $\Omega = \mathrm{U} \times \Gamma$, où U est un ouvert dans X et Γ un ouvert conique dans $\mathbf{C}^n$. Il existe alors $\mathrm{A}_0 \in]0,1[$, une constante $d_0 > 0$ et une fonction positive Λ_0 définie sur Γ vérifiant $\lim_{|\xi|\to\infty} \Lambda_0(\xi)|\xi|^{-1} = 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, q_j soit holomorphe sur $\Omega \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d_0\}$, et y vérifie

$$|q_j(x,\xi)| \leqslant \mathrm{A}_0^j \Lambda_0(\xi). \tag{4.41}$$

Supposons que p n'est pas un symbole formel d'ordre 1-0. Alors, pour tous $\Omega' \subset\subset \Omega$, $A \in]0,1[$, $d > 0$ et $\Lambda : \Gamma \to \mathbf{R}_+$ vérifiant $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \Lambda(\xi)|\xi|^{-1} = 0$, il existe $j_0 \in \mathbf{N}$ et $(x_0,\xi_0) \in \Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j_0+1)d\}$ tels que, pour tous $j < j_0$ et $(x,\xi) \in \Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d\}$, on ait

$$|p_j(x,\xi)| \leqslant A^j \Lambda(\xi), \tag{4.42}$$

$$|p_{j_0}(x_0,\xi_0)| > A^{j_0} \Lambda(\xi_0). \tag{4.43}$$

Posons $A = A_0$, $\Lambda = 2\Lambda_0$. Soit ε_1 la distance de $\partial\Omega$ à Ω' sur $|\xi| = 1$. Soient B, B_1 des constantes telles qu'on ait $B < B_1 < A_0/(2C'+1)$, où C' désigne la constante du lemme 4.2. Choisissons d_2 de façon à avoir

$$B \exp (2\Lambda_0(\xi)|\xi|^{-1} B\varepsilon_1^{-2M}) \leqslant B_1$$

quand $|\xi|$ est supérieure ou égale à $d_2\varepsilon_1^{-2M}B^{-1}$, où M est une constante > 1.

1° Lorsque $d_0 \leqslant d_2\varepsilon_1^{-2M}B^{-1}$, on pose $d = d_2\varepsilon_1^{-2M}B^{-1}$. Il existe alors $j_0 \in \mathbf{N}$ et $(x_0,\xi_0) \in \Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j_0+1)d\}$ tels que, pour tous $j < j_0$ et $(x,\xi) \in \Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (j+1)d\}$, on ait

$$|p_j(x,\xi)| \leqslant A_0^j . 2\Lambda_0(\xi), \tag{4.42'}$$

$$|p_{j_0}(x_0,\xi_0)| > A_0^{j_0} . 2\Lambda_0(\xi_0). \tag{4.43'}$$

D'après (4.40) et (4.27), on a

$$q_{j_0} = p_{j_0} + \sum_{\substack{i+j=j_0 \\ j \geqslant 1}} \sum_{\ell=2}^{j+1} \tilde{q}_{ij}^{(\ell)}. \tag{4.44}$$

Remarquons que l'on peut déduire les $\tilde{q}_{ij}^{(\ell)}$ $(i+j=j_0, j \geqslant 1)$ des p_0, $p_1, \ldots, p_{j_0-1}$. D'après le lemme 4.2, on a, pour tous i, j, ℓ tels que $i + j = j_0$, $j \geqslant 1$, $2 \leqslant \ell \leqslant j+1$ et tout

$$(x,\xi) \in \Omega' \cap \{|\xi| \geqslant (i+1)(1-\varepsilon_1)^{-1}d\} :$$

$$|\tilde{q}_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)| \leqslant C' \frac{j!}{\ell!} A_0^i \varepsilon_1^{-2Mj} (2\Lambda_0(\xi))^\ell |\xi|^{-j}.$$

Comme on a $|\xi|^{-j} \leqslant |\xi|^{-\ell+1}(i+j+1)^{\ell-j-1}\varepsilon_1^{2M(j-\ell+1)}B^{j-\ell+1}$ si $|\xi| \geqslant (i+j+1)(1-\varepsilon_1)^{-1}d$, il vient

$$|\tilde{q}_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)| \leqslant C' \frac{j^{\ell-1}}{(\ell-1)!} A_0^i B^j (2\Lambda_0(\xi)|\xi|^{-1}B^{-1}\varepsilon_1^{-2M})^{\ell-1} . 2\Lambda_0(\xi).$$

On a donc pour tout $(x,\xi)\in\Omega'\cap\{|\xi|\geqslant(i+j+1)(1-\varepsilon_1)^{-1}d\}$

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i+j=j_0\\ j\geqslant 1}}\sum_{\ell=2}^{j+1}|\tilde{q}_{ij}^{(\ell)}(x,\xi)| &\leqslant 2C'\sum_{\substack{i+j=j_0\\ j\geqslant 1}}A_0^iB^j\exp(2j\Lambda_0(\xi)|\xi|^{-1}B^{-1}\varepsilon_1^{-2M})\Lambda_0(\xi)\\ &\leqslant 2C'\sum_{\substack{i+j=j_0\\ j\geqslant 1}}A_0^iB_1^j\Lambda_0(\xi)\\ &< 2C'B_1(A_0-B_1)^{-1}A_0^{j_0}\Lambda_0(\xi)\\ &< A_0^{j_0}\Lambda_0(\xi).\end{aligned}$$

On peut en déduire l'inégalité

$$|q_{j_0}(x_0,\xi_0)|\geqslant|p_{j_0}(x_0,\xi_0)|-\sum_{\substack{i+j=j_0\\ j\geqslant 1}}\sum_{\ell=2}^{j+1}|\tilde{q}_{ij}^{(\ell)}(x_0,\xi_0)|>A_0^{j_0}\Lambda_0(\xi_0),$$

ce qui est impossible par hypothèse. D'où le résultat.

2° Lorsque $d_0>d_2\varepsilon_1^{-2M}B^{-1}$, le théorème se prouve de la même manière que le premier cas si on pose $d=d_0$.

Remarque. — On a

$$\begin{aligned}p\equiv q_0+t\left(q_1-\frac{1}{2}\partial_\xi q_0.\partial_x q_0\right)+t^2\Big(&q_2-\frac{1}{2}(\partial_\xi q_0.\partial_x q_1+\partial_\xi q_1.\partial_x q_0)\\ &+\frac{1}{12}(\partial_\xi^2 q_0.(\partial_x q_0)^2+(\partial_\xi q_0)^2.\partial_x^2 q_0)+\frac{1}{3}\partial_\xi q_0.\partial_\xi\partial_x q_0.\partial_x q_0\\ &-\frac{1}{4}\partial_\xi^2 q_0.\partial_x^2 q_0\Big)\quad\text{modulo } t^3\hat{S}_{x^*}.\end{aligned}$$

5. Inversibilité des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre infini.

Un opérateur pseudodifférentiel (ou microdifférentiel) d'ordre *fini* dont le symbole est inversible en tant que symbole admet lui aussi un inverse qui est d'ailleurs unique : c'est un résultat fondamental de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre fini (cf. [6, 9]). Nous montrons, en utilisant le théorème 4.5, qu'il en est de même pour les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre infini.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* $P(x,\xi)$ *un symbole défini sur un voisinage conique d'un point* $x^*\in \mathring{T}^*X$. *Si* $1/P(x,\xi)$: *est un symbole défini au voisinage de* x^*, *alors* $:P(x,\xi):$ *est inversible dans* $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{X,x^*}$. |

Remarque. – Lorsque $P(x,\xi)$ et $1/P(x,\xi)$ sont de croissance < 1, le théorème a été établi dans [2].

Démonstration. – D'après l'hypothèse du théorème, il existe un symbole $q(x,\xi)$ d'ordre 1-0 défini au voisinage de x^* tel que $P(x,\xi) = \exp q(x,\xi)$. On peut alors construire un symbole formel $p(t;x,\xi)$ d'ordre 1-0 tel que $\exp :p(t;x,\xi): = :\exp q(x,\xi):$. L'inverse de $:P(x,\xi): = :\exp\ q(x,\xi):$ s'écrit donc sous la forme

$$(:P:)^{-1} = \exp(-:p:),$$

ce qui prouve le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Aoki, Invertibility for microdifferential operators of infinite order, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 18 (1982), 421-449.

[2] T. Aoki, Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini I, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 33-4 (1983), 227-250.

[3] T. Aoki, Symbols and formal symbols of pseudodifferential operators, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 4 (1984), Group Representations and Systems of Differential Equations, pp. 181-208.

[4] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 22-3 (1972), 229-268.

[5] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques d'ordre infini, *Astéristique*, 2-3 (1973), 128-134.

[6] L. Boutet de Monvel and P. Kree, Pseudo-differential operators and Gevrey class, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 17-1 (1967), 295-323.

[7] K. Kataoka, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, Sec. IA, 28 (1981), 331-413.

[8] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo*, Sec. IA, 17 (1970), 467-517.

[9] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara, Microfunctions and pseudodifferential equations, *Lect. Notes in Math.*, Springer, No 287 (1973), 265-529.

Manuscrit reçu le 19 novembre 1984.

Takashi Aoki,
Université de Kinki
Département de Mathématiques
Higashi-Osaka 577 (Japon).