MICHEL VAQUIÉ

Résolution simultanée d'une famille de singularités rationnelles de surface normale

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 4 (1985), p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_4_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 4 (1985), 1-37

RÉSOLUTION SIMULTANÉE D'UNE FAMILLE DE SINGULARITÉS RATIONNELLES DE SURFACE NORMALE

par Michel VAQUIE

Nous nous proposons d'étudier une condition faible d'équisingularité pour une famille plate de surfaces normales $\lambda : \mathcal{V} \to \mathrm{T}$ définie par l'existence d'une résolution simultanée très faible (cf. [21]).

Alors que dans le cas d'une famille de courbes nous pouvons trouver une condition d'existence de résolution simultanée ne dépendant que de la géométrie des fibres, il faut dans le cas d'une famille de surfaces autoriser un changement de base $\varepsilon : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ surjectif fini pour espérer avoir un résultat semblable.

Nous renvoyons à l'article de B. Teissier ([21]) pour l'étude du cas d'une famille de courbes et pour le lien entre l'existence d'une résolution simultanée très faible sans faire de changement de base et l'absence d'homologie évanescente.

Nous allons considérer différents invariants d'une surface normale V : les plurigenres $\gamma_m(\mathrm{V})$ qui sont définis comme la longueur du conoyau des morphismes canoniques $\pi_*(\omega_{\mathrm{M}}^{\otimes m}) \to \omega_{\mathrm{V}}^{[m]}$, où $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{V}$ est la résolution minimale des singularités de V, où ω_{M} est le faisceau canonique sur M et où $\omega_{\mathrm{V}}^{[m]}$ est le faisceau m-pluricanonique sur V, et le nombre rationnel K^2 qui peut être défini comme la limite de $\gamma_m(\mathrm{V})/m^2$ quand m tend vers l'infini. (Nous renvoyons au chapitre 1 pour des définitions précises).

Le premier résultat a été obtenu par Shepherd-Barron dans le cas d'une famille de surfaces de Gorenstein canoniquement libres ([20]). Ce résultat a

Mots-clés : Surface normale - Plurigenre - Déformation - Résolution simultanée.

été nettement amélioré par Laufer qui a démontré dans [13] :

THÉORÈME 5.7. — *Soit* $\lambda : \mathcal{V} \to T$ *une déformation plate d'une singularité* (V, p) *de surface normale de Gorenstein; alors* λ *admet une résolution simultanée très faible, quitte à faire un changement de base surjectif fini, si et seulement si* K_t^2 *est constant.*

Dans le cas non Gorenstein la condition d'équisingularité considérée est trop faible, et il est impossible de trouver une condition nécessaire et suffisante d'équisingularité portant uniquement sur la géométrie des fibres.

Dans le cas d'une famille de surfaces à singularités rationnelles nous pouvons énoncer un résultat similaire au théorème de Laufer en considérant la condition d'équisingularité :

a) La famille $\lambda : \mathcal{V} \to T$ admet une résolution simultanée très faible $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{V}$ quitte à faire un changement de base surjectif fini $\varepsilon : T' \to T$.

b) Il existe un entier m tel que le faisceau m-pluricanonique relatif $\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/T}$ soit inversible sur $\mathcal{V}$.

Comme la condition *b*) est toujours vérifiée dans le cas d'une famille de surfaces de Gorenstein, ce résultat peut être considéré comme une généralisation du théorème de Laufer.

La démonstration que nous donnons est très largement inspirée de celle de Laufer, et nous renvoyons à son article pour certains détails.

Ce texte est une version corrigée de la thèse de 3^e cycle de l'auteur.

1. Soit (V,p) une singularité de surface normale, nous supposons que V est un schéma affine $V = \operatorname{Spec} R$ où R est une algèbre normale de dimension 2 essentiellement de type fini sur un corps k algébriquement clos et que p est un point singulier de V. Comme nous nous plaçons au voisinage du point p nous supposerons parfois que l'anneau R est l'anneau local de V en p.

Soit $\pi : M \to V$ une résolution de la singularité (V,p), nous notons $E = \bigcup_{i=1}^{r} E_i$ le diviseur exceptionnel sur M et $U = V - \{p\}$ l'ouvert au-dessus duquel π induit un isomorphisme. Nous notons K_M le diviseur canonique sur M, c'est-à-dire le diviseur associé au faisceau inversible ω_M, faisceau dualisant sur M.

PROPOSITION 1.1 ([10] dém. de la Prop. 2.2.). — *Pour tout faisceau* $\mathscr{F}$ *localement libre sur* M *il existe un isomorphisme canonique de* k *espaces vectoriels entre l'espace de cohomologie à support* $H^1_E(\mathscr{F})$ *et le dual de l'espace de cohomologie* $H^1(M, \mathscr{F}^{-1} \underset{\mathcal{O}_M}{\otimes} \omega_M)$.

Dans le cas où nous avons une résolution $\pi : M \to V$ des singularités d'une surface normale V non supposée affine et pouvant avoir plusieurs points singuliers, nous en déduisons le résultat plus général :

$$\dim_k(\pi_*(\underline{H}^1_E(\mathscr{F}))_p = \dim_k(R^1\pi_*(\mathscr{F}^{-1} \underset{\mathcal{O}_M}{\otimes} \omega_M))_p .$$

PROPOSITION 1.2 ([23], [13]). — *Soit* L *un diviseur sur* M *vérifiant* $L.E_i \geqslant K_M.E_i \,\forall i$, *alors le faisceau* $R^1\pi_*(\mathcal{O}_M(L))$ *est nul.*

Nous supposons maintenant que $\pi : M \to V$ est la résolution minimale de la singularité (V,p); le diviseur exceptionnel E vérifie alors $K_M.E_i \geqslant 0 \,\forall i$ et $K_M.E_i = 0$ si et seulement si, E_i est une courbe de Du Val, c'est-à-dire une courbe rationnelle d'auto-intersection -2.

Nous déduisons de la proposition précédente que pour tout entier positif m, le faisceau $R^1\pi_*(\omega_M^{\otimes m})$ est nul.

PROPOSITION 1.3 ([20], [13]). — *Soit* L *un diviseur sur la résolution minimale* M *vérifiant* $L.E_i \geqslant 2K_M.E_i \,\forall i$, *alors le diviseur* L *est sans point base sur* M.

Au lieu de dire que le diviseur L n'a pas de point base sur M, nous utiliserons la propriété équivalente suivante : le morphisme canonique $\pi^*\pi_*\mathcal{O}_M(L) \to \mathcal{O}_M(L)$ est surjectif.

Nous en déduisons en particulier que les diviseurs mK_M sont sans point base sur M pour $m \geqslant 2$; nous posons alors la définition suivante [20] :

La singularité de surface normale (V, p) est canoniquement libre si le diviseur canonique K_M sur la résolution minimale M de (V,p) est sans point base.

Nous pouvons contracter les courbes de Du Val E_i du diviseur exceptionnel de la résolution minimale $\pi : M \to V$; nous obtenons alors un morphisme propre birationnel $g : M \to \bar{M}$ qui factorise $\pi : M \to V$, où $\bar{M}$ est une surface normale ayant uniquement des points doubles rationnels (P.D.R.) comme singularités.

Nous appelons le morphisme $f : \bar{M} \to V$ propre birationnel, la résolution en P.D.R. de la singularité (V,p).

THÉORÈME 1.4 ([16], [13]). — *La résolution en points doubles rationnels* $f : \bar{M} \to V$ *de la surface normale* V *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Proj}_V(\bigotimes_{m \geqslant 0} \pi_*(\omega_M^{\otimes md}))$ *pour tout* $d \geqslant 1$.

Les faisceaux $\pi_*(\omega_M^{\otimes m})$ sont notés S_m; si $\pi' : M' \to V$ est une résolution des singularités de la surface V, nous avons encore l'égalité $\pi'_*(\omega_{M'}^{\otimes m}) = S_m$. De même, nous avons $f_*(\omega_{\bar{M}}^{\otimes m}) = S_m$.

Comme la surface V est normale le faisceau dualisant ω_V sur V est réflexif, nous notons K_V le diviseur de Weil associé. Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, nous pouvons alors définir le faisceau réflexif $\omega_V^{[m]}$ associé au diviseur mK_V, mais en général ce faisceau est différent du faisceau $\omega_V^{\otimes m}$. Si la surface V est de Gorenstein, le faisceau ω_V est inversible et nous avons alors $\omega_V^{\otimes m} = \omega_V^{[m]}$.

Soit $j : U \to V$ l'immersion de l'ouvert des points non singuliers de V, alors $\omega_V^{[m]}$ est isomorphe à $j_*(\omega_U^{\otimes m})$ où ω_U est le faisceau dualisant sur U.

Soit $\pi : M \to V$ la résolution minimale des singularités de V, le morphisme π induisant un isomorphisme de $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ dans U. Nous avons la suite exacte de cohomologie locale sur M :

$$0 \to \omega_M^{\otimes m} \to \tilde{j}_*(\omega_{\tilde{U}}^{\otimes m}) \to \underline{H}_E^1(\omega_M^{\otimes m}) \to 0$$

dont nous déduisons la suite exacte de $\mathcal{O}_V$-modules :

$$0 \to \pi_*\omega_M^{\otimes m} \to \pi_*\tilde{j}_*(\omega_{\tilde{U}}^{\otimes m}) \to \pi_*\underline{H}_E^1(\omega_M^{\otimes m}) \to R^1\pi_*\omega_M^{\otimes m}.$$

Comme π induit un isomorphisme de $\tilde{U}$ dans U, nous avons :

$$\pi_*\tilde{j}_*(\omega_{\tilde{U}}^{\otimes m}) = j_*(\omega_U^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \omega_V^{[m]}.$$

Si $m \geqslant 1$ le faisceau $R^1\pi_*\omega_M^{\otimes m}$ est nul et nous trouvons la suite exacte :

$$0 \to \pi_*(\omega_M^{\otimes m}) \to \omega_V^{[m]} \to \pi_*\underline{H}_E^1(\omega_M^{\otimes m}) \to 0.$$

Le faisceau $\pi_*\underline{H}_E^1(\omega_M^{\otimes m})$ est cohérent sur V à support contenu dans le lieu singulier de V, par conséquent c'est un faisceau de longueur finie et nous pouvons définir le plurigenre d'ordre m de V par :

$$\gamma_m(V) = \dim_k \pi_* \underline{H}^1_E(\omega_M^{\otimes m}) = \dim_k R^1\pi_*(\omega_M^{\otimes 1-m})$$

d'après la proposition 1.1.

Si V ne contient qu'un point singulier p nous voyons que le faisceau $\pi_* \underline{H}^1_E(\omega_M^{\otimes m})$ ne dépend que du germe de V en p, nous disons alors que γ_m est le plurigenre de la singularité (V,p) et nous le notons $\gamma_m(V,p)$. Dans le cas général $\gamma_m(V)$ est égal à la somme des $\gamma_m(V,p)$ où p parcourt l'ensemble des points singuliers de V.

Pour $m = 1$, nous trouvons le genre de la singularité (V,p) et nous le notons : $\gamma_1(V,p) = h(V,p)$.

Si $m \leqslant 0$ le faisceau $\pi_* \underline{H}^1_E(\omega_M^{\otimes m})$ est isomorphe au faisceau $R^1\pi_*(\omega_M^{\otimes 1-m})$ donc est nul; nous avons alors l'isomorphisme :

$$\pi_*(\omega_M^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \omega_V^{[m]}.$$

Nous supposons que (V,p) est une singularité de surface normale, nous notons comme précédemment $\pi : M \to V$ la résolution minimale.

Comme la matrice d'intersection $(E_i . E_j)$ des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel E est définie négative ([18], p. 6), il existe un unique diviseur à support exceptionnel à coefficients rationnels $c_\pi(K_M)$ (i.e. $c_\pi(K_M) \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Q}E_i$) vérifiant :

$$\forall i, \qquad K_M . E_i = c_\pi(K_M) . E_i .$$

Si nous notons δ la valeur absolue du déterminant de la matrice d'intersection, alors $c_\pi(K_M) \in \frac{1}{\delta} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{Z}E_i$.

Proposition 1.5 ([17]). — *Le plurigenre d'ordre* m *de la singularité* (V,p) *est donné par la formule :*

$$\gamma_m(V,p) = h(V,p) - \frac{1}{2} m(m-1) c_\pi(K_M) . c_\pi(K_M) + \varepsilon(m)$$

où $\varepsilon(m)$ *est une fonction de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{Q}$ *ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et s'annulant pour les entiers* m *divisibles par* δ, *ou tels que* $1 - m$ *soit divisible par* δ.

Si la singularité (V,p) est de Gorenstein, le diviseur canonique K_M est à support exceptionnel; nous avons alors $K_M = c_\pi(K_M)$ et pour tout entier $m \geqslant 1$ l'égalité $\gamma_m(V,p) = h - \frac{1}{2}m(m-1)K_M.K_M$.

Soit V une surface normale ayant plusieurs points singuliers isolés $p_1, \ldots, p_k$. Pour tout j nous pouvons définir la résolution minimale $\pi_j : M_j \to (V,p_j)$ de la singularité (V,p_j); nous notons δ_j la valeur absolue du déterminant de la matrice d'intersection des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel sur M_j, $c_{\pi_j}(K_{M_j})$ le diviseur à coefficients rationnels à support exceptionnel défini comme précédemment et nous avons alors :

$$\gamma_m(V,p_j) = h(V,p_j) - \frac{1}{2}m(m-1)c_{\pi_j}(K_{M_j}).c_{\pi_j}(K_{M_j}) + \varepsilon_j(m).$$

Le plurigenre $\gamma_m(V)$ de la surface normale V est égal à $\sum_{j=1}^{k} \gamma_m(V,p_j)$ c'est-à-dire :

$$\gamma_m(V) = \sum_{j=1}^{k} h(V,p_j) - \frac{1}{2}m(m-1)\left(\sum_{j=1}^{k} c_{\pi_j}(K_{M_j})^2\right) + \left(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j(m)\right).$$

$\sum_{j=1}^{k} h(V,p_j)$ est égal au genre $h(V)$ de la surface V, nous notons K^2 le nombre rationnel négatif égal à $\sum_{j=1}^{k} c_{\pi_j}(K_{M_j}).c_{\pi_j}(K_{M_j})$ et $\varepsilon(m)$ la fonction de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Q}$ égale à $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(m)$. Nous trouvons donc :

$$\gamma_m(V) = h(V) - \frac{1}{2}m(m-1)K^2 + \varepsilon(m)$$

où ε est une fonction de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Q}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et s'annulant pour les entiers m tels que m ou $1-m$ soit divisible par δ le ppcm de δ_j, $1 \leqslant j \leqslant k$.

La singularité (V,p) de surface normale est dite rationnelle si le genre $h(V,p)$ est nul.

Toute singularité rationnelle est canoniquement libre, en effet le diviseur canonique K_M sur la résolution minimale vérifie $K_M.E_i \geqslant 0, \forall i$, par conséquent est sans point base d'après le théorème 12.1 (ii) de [15].

Pour tout entier $m \in \mathbf{Z}$ divisible par δ nous avons $c_\pi(m\mathrm{K_M}) = mc_\pi(\mathrm{K_M})$ est égal à $m\mathrm{K_M}$. En effet, le diviseur $mc_\pi(\mathrm{K_M}) - m\mathrm{K_M}$ est un diviseur de Cartier sur M vérifiant $(mc_\pi(\mathrm{K_M}) - m\mathrm{K_M}).\mathrm{E}_i = 0, \forall i$, par conséquent d'après le théorème 12.1 (i) de [15] ce diviseur est trivial. Nous en déduisons en particulier l'égalité $c_\pi(\mathrm{K_M}).c_\pi(\mathrm{K_M}) = \mathrm{K_M}.\mathrm{K_M}$; si V est une surface ayant plusieurs singularités $p_1, \ldots, p_k$ toutes rationnelles, nous avons $\mathrm{K}^2 = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{K}_{\mathrm{M}_j}.\mathrm{K}_{\mathrm{M}_j}$ mais ce nombre n'est pas égal à $\mathrm{K_M}.\mathrm{K_M}$.

Nous en déduisons aussi que si m est divisible par δ, le faisceau $\omega_{\mathrm{V}}^{[m]}$ est inversible.

Soit $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ une famille plate de surfaces normales, nous pouvons définir le faisceau dualisant relatif $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ faisceau cohérent sur $\mathscr{V}$ plat sur T ([12], Prop. 9), et si les fibres de λ sont des surfaces de Gorenstein le faisceau $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ est inversible.

Le faisceau $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ commute au changement de base ([12]), en particulier si $k(s)$ est le corps résiduel d'un point s de T et si V_s est la fibre $\lambda^{-1}(s)$ de λ au-dessus de s, nous avons un isomorphisme canonique entre $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{T}} k(s)$ et le faisceau dualisant $\omega_{\mathrm{V}_s} = \omega_{\mathrm{V}_s/k(s)}$ sur la surface V_s.

Soit $j : \mathscr{V}^0 \hookrightarrow \mathscr{V}$ l'immersion de l'ouvert de lissité de λ; sur chaque fibre V_s l'ouvert $\mathscr{V}^0$ induit l'ouvert U_s des points non singuliers de la surface normale V_s. Nous notons $\omega_{\mathscr{V}^0/\mathrm{T}}$ le faisceau dualisant relatif de $\lambda|_{\mathscr{V}^0} : \mathscr{V}^0 \to \mathrm{T}$, c'est un faisceau inversible sur $\mathscr{V}^0$ et pour tout entier $m \in \mathbf{Z}$, nous posons $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{[m]} = j_*(\omega_{\mathscr{V}^0/\mathrm{T}}^{\otimes m})$.

En général, le faisceau $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{[m]}$ est différent du faisceau $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{\otimes m}$ et ne commute pas au changement de base.

Proposition 1.6. — *Le faisceau dualisant relatif* $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ *est égal au faisceau* $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{[1]} = j_*(\omega_{\mathscr{V}^0/\mathrm{T}}^{\otimes 1})$.

S'il existe un entier m tel que le faisceau $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{[m]}$ *soit inversible, alors il en est de même des faisceaux* $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{[mk]}$ *pour tout entier* k *et ces faisceaux commutent au changement de base. De plus, les faisceaux* $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{[mk+1]}$ *et* $\omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}} \otimes \omega_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}^{[km]}$ *sont isomorphes et commutent aussi au changement de base.*

Démonstration. — Nous notons $\mathscr{V}_{\mathrm{sing}}$ le fermé complémentaire de $\mathscr{V}^0$ dans $\mathscr{V}$; ce fermé induit sur chaque fibre V_s la partie singulière $\mathrm{V}_{s,\,\mathrm{sing}}$ de la surface normale V_s.

D'après le théorème 11.3.8 de [7], si $\mathcal{G}$ est un faisceau cohérent sur $\mathcal{V}$ plat sur T vérifiant $\operatorname{prof}_{V_{s,\,\mathrm{sing}}} \mathcal{G}_s \geqslant 2$ pour tout point s de T, alors le faisceau $\mathcal{G}$ vérifie $\operatorname{prof}_{\mathcal{V}_{\mathrm{sing}}} \mathcal{G} \geqslant 2$, c'est-à-dire est isomorphe à $j_*(\mathcal{G}|_{\mathcal{V}^0})$.

Nous appliquons ce résultat au faisceau $\mathcal{G} = \omega_{\mathcal{V}/\mathrm{T}}$ et nous trouvons la première partie de la proposition.

Nous pouvons appliquer ce théorème à tout faisceau inversible $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{V}$; en particulier, si le faisceau $\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}}$ est inversible, les faisceaux $\omega^{[mk]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}}$ et $(\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}})^{\otimes k}$ sont deux faisceaux sur $\mathcal{V}$ coïncidant sur $\mathcal{V}^0$ et de profondeur le long de $\mathcal{V}_{\mathrm{sing}} \geqslant 2$, ils sont donc égaux.

De la même manière, nous montrons que les faisceaux $\omega^{[m+k+1]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}}$ et $\omega_{\mathcal{V}/\mathrm{T}} \otimes \omega^{[mk]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}}$ sont isomorphes et que tous ces faisceaux commutent au changement de base.

Dans le cas général, nous déduisons du diagramme cartésien suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{V}^0 \arrow[rr, hook, "j"] & & \mathcal{V} \arrow[dd] \\
U_s \arrow[ur] \arrow[rr, hook, "j_s"] & & V_s \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & & & \mathrm{T} \\
 & & \operatorname{Spec} k(s) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

un morphisme canonique de $j_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{V}^0/\mathrm{T}}) \otimes k(s)$ dans $(j_s)_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{V}^0/\mathrm{T}} \underset{\mathcal{O}_\mathrm{T}}{\otimes} k(s))$, c'est-à-dire de $\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}} \underset{\mathcal{O}_\mathrm{T}}{\otimes} k(s)$ dans $\omega^{[m]}_{V_s}$.

Si la base T de la famille $\lambda : \mathcal{V} \to \mathrm{T}$ est une variété régulière, les faisceaux $\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}}$ sont réflexifs, donc de la forme $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_\mathcal{V}}(\mathcal{G},\mathcal{O}_\mathcal{V})$ où $\mathcal{G}$ est un faisceau cohérent sur $\mathcal{V}$.

Proposition 1.7. — *Il existe deux faisceaux $\mathcal{L}$ et $\mathcal{H}$ cohérents sur $\mathcal{V}$ tels que pour tout point s de* T, *nous ayons la suite exacte de faisceaux cohérents sur* V_s :

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathcal{H},k(s)) \to \omega^{[m]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}} \underset{\mathcal{O}_\mathrm{T}}{\otimes} k(s) \to \omega^{[m]}_{V_s} \to \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathcal{L},k(s)) \to 0 .$$

Si nous supposons que la base T *est de dimension* 1 (*i.e. une courbe régulière*) *les faisceaux* $\mathscr{H}$ *et* $\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ *sont plats sur* T, *en particulier le morphisme* $\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}} \underset{\mathscr{O}_\mathrm{T}}{\otimes} k(s) \to \omega^{[m]}_{\mathrm{V}_s}$ *est injectif pour tout point* s *de* T.

Démonstration. — Si nous notons $\mathscr{G}$ le faisceau cohérent sur $\mathscr{V}$ tel que $\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ soit égal à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathscr{V}}(\mathscr{G},\mathscr{O}_\mathscr{V})$, les faisceaux $\omega^{[m]}_{\mathrm{V}_s}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{V}_s}}(\mathscr{G} \underset{\mathscr{O}_\mathrm{T}}{\otimes} k(s),\mathscr{O}_{\mathrm{V}_s})$ sont isomorphes, car ce sont deux faisceaux réflexifs sur V_s isomorphes sur U_s.

La proposition se réduit alors immédiatement au lemme suivant :

LEMME. — *Soient* R *un anneau local régulier d'idéal maximal* $\mathscr{M}$, *de corps résiduel* k, $\mathcal{A}$ *une* R-*algèbre plate et* $\mathrm{A} = \mathcal{A} \underset{\mathrm{R}}{\otimes} k$.

Si $\mathscr{G}$ *est un* $\mathcal{A}$-*module de présentation finie, pour toute suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathscr{G},\mathcal{A}) \overset{d_1}{\to} \mathcal{A}^p \overset{d_2}{\to} \mathcal{A}^q$$

déduite d'une présentation de $\mathscr{G}$, *il existe une suite exacte de* A-*modules :*

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^\mathrm{R}(\mathscr{H},k) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathscr{G},\mathcal{A}) \underset{\mathrm{R}}{\otimes} k \to \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathscr{G} \underset{\mathrm{R}}{\otimes} k,\mathrm{A})$$
$$\to \mathrm{Tor}_1^\mathrm{R}(\mathscr{L},k) \to 0$$

où $\mathscr{H}$ *et* $\mathscr{L}$ *sont les deux* $\mathcal{A}$-*modules définis par*

$$\mathscr{H} = \mathrm{coker}\ d_1 = \ker d_2 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L} = \mathrm{coker}\ d_2 .$$

Si nous supposons que R *est un anneau de valuation discrète, tout sous-module d'un* $\mathcal{A}$-*module plat sur* R *est plat sur* R; *en particulier* $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathscr{G},\mathcal{A})$ *et* $\mathscr{H}$ *sont plats sur* R.

Démonstration. — De la suite exacte $\mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^p \to \mathscr{G} \to 0$, nous déduisons les deux suites exactes :

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathscr{G} \underset{\mathrm{R}}{\otimes} k,\mathrm{A}) \to \mathrm{A}^p \to \mathrm{A}^q$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(\mathscr{G},\mathcal{A}) \overset{d_1}{\to} \mathcal{A}^p \overset{d_2}{\to} \mathcal{A}^q .$$

Nous avons alors le diagramme commutatif suivant formé de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & & & & & & 0 \arrow[dl] \\
 & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathscr{G} \underset{\mathrm{R}}{\otimes} k, \mathrm{A}) \arrow[dr] & & & & \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{R}}(\mathscr{L}, k) \arrow[dl] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{R}}(\mathscr{H}, k) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{G}, \mathscr{A}) \underset{\mathrm{R}}{\otimes} k \arrow[r] & \mathrm{A}^p \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathscr{H} \underset{\mathrm{R}}{\otimes} k \arrow[r] \arrow[dl] & 0 & \\
 & & & & \mathrm{A}^q & & &
\end{tikzcd}$$

dont nous déduisons la suite exacte cherchée.

2. Dans toute la suite, nous supposerons que le corps de base k est algébriquement clos de caractéristique nulle.

Soit $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ une famille plate de surfaces normales paramétrée par une variété réduite T; nous la considérons comme le germe d'une déformation plate de la singularité de surface normale (V,p) où V est la fibre de λ au-dessus d'un point fermé 0 de T; pour tout point t de T différent de 0, nous notons V_t la fibre de λ au-dessus de t. Nous nous placerons toujours dans un voisinage « suffisamment petit » de p et de 0. Remarquons que la surface V_t peut avoir plusieurs points singuliers.

Pour tout $m \geqslant 1$, nous notons $\gamma_m(\mathrm{V}_t)$ (resp. $\gamma_m(\mathrm{V}) = \gamma_m(\mathrm{V},p)$) le plurigenre d'ordre m de la surface normale V_t (resp. de la singularité (V,p)) et $\mathrm{S}_{t,m}$ (resp. S_m) le faisceau $(\pi_t)_*(\omega_{\mathrm{M}_t}^{\otimes m})$ où $\pi_t : \mathrm{M}_t \to \mathrm{V}_t$ (resp. $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{V}$) est la résolution minimale des singularités. Nous notons $\mathrm{K}_{\mathrm{M}_t}$ (resp. K_{M}) le diviseur canonique, K_t^2 (resp. K^2) le nombre rationnel négatif défini au chapitre 1, δ_t (resp. δ) le p.p.c.m. des valeurs absolues des déterminants des matrices d'intersections des différents diviseurs exceptionnels sur la résolution M_t (resp. M).

Nous rappelons la définition suivante ([21]) :

Le morphisme $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{V}$ est une résolution simultanée très faible de la famille $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ si :

- le morphisme π est propre birationnel;
- le morphisme composé $\rho = \lambda \circ \pi$ est plat;
- pour tout point t de T, le morphisme $\pi_t : \mathrm{M}_t \to \mathrm{V}_t$ est une résolution des singularités de V_t.

Si la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ admet une résolution simultanée très faible, d'après [1] lemme 2.1, nous pouvons contracter simultanément toutes les courbes exceptionnelles de première espèce à support dans le diviseur. Nous obtenons alors une résolution simultanée très faible minimale, c'est-à-dire une résolution simultanée très faible qui induit sur chaque fibre la résolution minimale des singularités.

De même, nous posons la définition :

Le morphisme $\bar{\pi} : \overline{\mathscr{M}} \to \mathscr{V}$ est une résolution simultanée en points doubles rationnels (P.D.R.) de la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ si :

- le morphisme $\bar{\pi}$ est propre birationnel;
- le morphisme composé $\bar{\rho} = \lambda \circ \bar{\pi}$ est plat;
- pour tout point t de T, le morphisme $\bar{\pi}_t : \bar{M}_t \to V_t$ est la résolution en points doubles rationnels de V_t.

Si la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ admet une résolution simultanée très faible minimale, nous pouvons contracter simultanément toutes les courbes rationnelles d'auto-intersection -2 à support exceptionnel, par conséquent la famille admet une résolution simultanée en P.D.R.

Réciproquement, si la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ admet une résolution simultanée en P.D.R., il existe un morphisme surjectif fini $\varepsilon : T' \to T$ tel que la famille $\lambda' : \mathscr{V}' \to T'$ obtenue par changement de base ait une résolution simultanée très faible ([13], [1], [2]).

Nous supposons dans la suite de ce paragraphe que la variété T est une courbe régulière.

Soit $\pi : \mathscr{X} \to \mathscr{V}$ une résolution des singularités de la variété $\mathscr{V}$, grâce au théorème de lissité générique nous pouvons supposer que pour tout t différent de 0 la fibre X_t du morphisme $\rho = \lambda \circ \pi$ est régulière, que la fibre X_0 est un diviseur à croisements normaux de $\mathscr{X}$ et que $X' \subset X_0$ transformé strict de V par π est une résolution des singularités de V.

Le morphisme π induit une résolution simultanée très faible $\pi : \mathscr{N} = \mathscr{X} - X_0 \to \mathscr{U} = \mathscr{V} - V$ de la famille $\lambda : \mathscr{U} \to T - \{0\}$; il existe donc une résolution simultanée minimale $\theta : \mathscr{W} \to \mathscr{U}$ de la famille $\lambda : \mathscr{U} \to T - \{0\}$:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N} \arrow[r] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathscr{W} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mu"] & \mathscr{U} \arrow[dl, "\lambda"] \\ & T - \{0\} & \end{tikzcd}$$

Comme le morphisme $\theta_t : W_t \to V_t$ est la résolution minimale de V_t, les faisceaux $R^i(\theta_t)_*(\omega_{W_t}^{\otimes m})$ sont nuls $\forall i \geqslant 1$, $\forall m > 0$, $\forall t \in T - \{0\}$; nous déduisons alors du théorème de changement de base ([6], Prop. 6.9.8) les isomorphismes :

$$(\theta_t)_*(\omega_{W_t}^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \theta_*(\omega_{\mathscr{W}/T}^{\otimes m}) \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} k(t) \qquad \text{pour tout } t \text{ de } T - \{0\}.$$

Si nous notons $i : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ l'immersion ouverte de $\mathscr{U} = \mathscr{V} - V$ dans $\mathscr{V}$, le faisceau $\omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]}$ est un sous-faisceau du faisceau quasi-cohérent $i_*(\omega_{\mathscr{U}/T-\{0\}}^{[m]})$. Comme le faisceau $\theta_*(\omega_{\mathscr{W}/T-\{0\}}^{\otimes m})$ est un sous-faisceau de $\omega_{\mathscr{U}/T-\{0\}}^{[m]}$, nous pouvons définir le faisceau $\mathscr{I}_m$ sur $\mathscr{V}$ par :

$$\mathscr{I}_m = \omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]} \cap i_*\theta_*(\omega_{\mathscr{W}/T-\{0\}}^{\otimes m}).$$

Le faisceau $\mathscr{I}_m$ est l'intersection de deux sous-faisceaux quasi-cohérents d'un même faisceau quasi-cohérent sur $\mathscr{V}$ et il est inclus dans le faisceau cohérent $\omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]}$, il est donc lui-même cohérent sur $\mathscr{V}$.

Nous définissons le faisceau cohérent $Q_m = \omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]}/\mathscr{I}_m$, dont le support est inclus dans le fermé $\mathscr{V}_{\text{sing}}$ des points singuliers de $\mathscr{V}$.

Proposition 2.1. — *Le faisceau* Q_m *est plat sur* T.

Démonstration. — Il suffit de montrer que le faisceau $\lambda_*(Q_m)$ est sans torsion, pour cela il faut montrer que si α est un élément de $\omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]}$ qui vérifie $\alpha_t \in (\mathscr{I}_m)_t$pour $t \neq 0$, alors $\alpha_0 \in (\mathscr{I}_m)_0$. C'est une conséquence immédiate du résultat suivant :

Soit $\lambda : \mathscr{V} = \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} R = T$ un morphisme plat de type fini où R est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal (u), soit $V = \operatorname{Spec} A/uA$ la fibre spéciale de λ et $\mathscr{U} = \operatorname{Spec} A_u = \mathscr{V} - V$, nous notons $i : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ l'immersion ouverte, c'est un morphisme affine défini par $A \to A_u$.

Soit M un A_u-module considéré comme A-module (M correspond à un faisceau quasi-cohérent sur $\mathscr{V}$ de la forme $i_*(\mathscr{F})$ où $\mathscr{F}$ est un faisceau quasi-cohérent sur $\mathscr{U}$), soit N un A-module tels que M et N soient deux sous-A-modules d'un même A-module et soit $I = M \cap N$.

Soit α un élément de N; alors $\alpha \in I \otimes A_u \Rightarrow \alpha \in I$.

En effet :

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathrm{I} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{A}_u &\Rightarrow \exists k \in \mathbf{N} \quad \text{tel que} \quad u^k\alpha \in \mathrm{I} \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbf{N} \quad \text{tel que} \quad u^k\alpha \in \mathrm{M} \\ &\Rightarrow \alpha \in \mathrm{M} \quad \text{car M est un } \mathrm{A}_u\text{-module} \\ &\Rightarrow \alpha \in \mathrm{I}. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme le faisceau Q_m est plat sur T à support dans $\mathscr{V}_{\text{sing}}$ fini sur T, il est localement libre de rang r.

Si nous calculons le rang r en un point $t \neq 0$, nous trouvons $r = \dim_{k(t)}(\mathrm{Q}_m)_t = \gamma_m(\mathrm{V}_t)$. En effet, nous avons :

$$(\mathscr{S}_m)_t = (\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}} \cap i_*\theta_*(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{W}/\mathrm{T}-\{0\}}))_t = (\theta_*(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{W}/\mathrm{T}-\{0\}}))_t$$

qui est égal à $(\theta_t)_*(\omega^{\otimes m}_{\mathrm{W}_t})$ et $(\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}})_t$ qui est égal à $\omega^{[m]}_{\mathrm{V}_t}$ d'après la proposition 1.7.

Comme T est une courbe régulière, d'après la proposition 1.7, $(\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}})_0$ est un sous-faisceau de $\omega^{[m]}_{\mathrm{V}}$ et nous notons χ_m le quotient. Nous allons étudier les deux sous-faisceaux $(\mathscr{S}_m)_0$ et S_m de $\omega^{[m]}_{\mathrm{V}}$; nous avons le diagramme commutatif suivant où les flèches sont des inclusions :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \omega^{[m]}_{\mathrm{V}} & (\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}})_0 \arrow[l] & (\mathscr{S}_m)_0 \arrow[l] \arrow[ll, bend right, "\alpha(m)"'] \\ \mathrm{S}_m \arrow[u, "\beta(m)"] & & \mathrm{S}_m \cap (\mathscr{S}_m)_0 \arrow[ll, "\delta(m)"'] \arrow[u, "\gamma(m)"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} \beta(m) &= \dim \omega^{\mathrm{V}}_{[m]}/\mathrm{S}_m = \gamma_m(\mathrm{V}) \\ \operatorname{codim} \alpha(m) &= \dim \chi_m + \dim (\mathrm{Q}_m)_0 = \dim \chi_m + \gamma_m(\mathrm{V}_t). \end{aligned}$$

LEMME 2.2 ([13]). — *Si* $(\mathscr{S}_m)_0$ *n'est pas inclus dans* S_m, *alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $\forall \nu \gg 0$, $\operatorname{codim} \gamma(m\nu) \geqslant c\nu^2$.

(*) Nous renvoyons à [13] pour la démonstration des lemmes 2.2 et 2.3; nous donnons en appendice une démonstration du lemme 2.3 permettant d'éviter l'hypothèse de compactification de Laufer.

LEMME 2.3 ([13]). — *Il existe un diviseur effectif* D *sur la résolution minimale* M *de* V, *à support exceptionnel vérifiant :* $\forall m \geqslant 1$ *le diviseur* $m\mathrm{K}_{\mathrm{M}} - \mathrm{D}$ *est sans point base.*

Alors nous avons l'inégalité :

$$\operatorname{codim} \delta \leqslant \dim \left(\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \omega_{\mathrm{M}}^{\otimes m}) / \mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \omega_{\mathrm{M}}^{\otimes m}(-\mathrm{D}))\right)$$

qui est égale à une fonction linéaire en m : $am + b$.

Si nous supposons que $\mathscr{I}_{m,0}$ n'est pas inclus dans S_m, nous déduisons de l'égalité :

$$\operatorname{codim} \beta(m\nu) + \operatorname{codim} \delta(m\nu) = \operatorname{codim} \alpha(m\nu) + \operatorname{codim} \gamma(m\nu)$$

l'inégalité suivante :

$$am\nu + b + \gamma_{m\nu}(\mathrm{V}) \geqslant \gamma_{m\nu}(\mathrm{V}_t) + c\nu^2, \qquad \forall \nu \gg 0.$$

Si ν est divisible par δ et δ_t l'inégalité précédente devient :

$$am\nu + b + h(\mathrm{V}) - \frac{1}{2}\mathrm{K}^2 m\nu(m\nu - 1) \geqslant h(\mathrm{V}_t) - \frac{1}{2}\mathrm{K}_t^2\, m\nu(m\nu - 1) + c\nu^2,$$

d'où l'inégalité :

$$-\mathrm{K}^2 \geqslant -\mathrm{K}_t^2 + \frac{c}{m^2}.$$

Si nous supposons que $(\mathscr{I}_m)_0$ est inclus dans S_m, c'est-à-dire que $\operatorname{codim} \gamma(m)$ est nul, pour tout m nous trouvons de même l'inégalité $-\mathrm{K}^2 \geqslant -\mathrm{K}_t^2$.

Nous avons donc montré :

PROPOSITION 2.4. — *Soit* $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ *une famille plate de surfaces normales paramétrée par une courbe régulière, alors la fonction de* T *dans* $\mathbf{Q}$ *définie par* $t \mapsto -\mathrm{K}_t^2$ *est semi-continue supérieurement.*

Si la fonction est constante sur T *alors* $(\mathscr{I}_m)_0$ *est inclus dans* S_m ; *nous savons aussi que la fonction* $t \mapsto h(\mathrm{V}_t)$ *est semi-continue supérieurement* ([5]).

THÉORÈME 2.5. — *Soit* $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ *une famille de surfaces normales à singularités rationnelles paramétrée par une courbe régulière; alors les* *conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *la fonction* $t \mapsto -K_t^2$ *est constante sur* T.

ii) *La famille* $\lambda : \mathscr{V} \to T$ *admet une résolution simultanée en P.D.R. et il existe un entier* $m \neq 0$ *tel que le faisceau* $\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/T}$ *soit inversible.*

iii) *a) Il existe un morphisme surjectif fini* $\varepsilon : T' \to T$ *tel que la famille* $\lambda' : \mathscr{V}' \to T'$ *obtenue par changement de base admette une résolution simultanée très faible* $\pi' : \mathscr{M}' \to \mathscr{V}'$;

b) il existe un entier $m \neq 0$ *tel que le faisceau* $\omega^{[m]}_{\mathscr{V}'/T'}$ *soit inversible.*

iv) *a) Idem;*

b) il existe un entier m *négatif tel que le diviseur* mK_M *à support exceptionnel dans la fibre spéciale* M *de* $\mathscr{M}'$ *soit transporté par la déformation* $\mathscr{M}' \to T'$ *de* M.

Remarques 2.6. — 1) Il suffit de supposer que la fibre spéciale (V,p) de la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ est une singularité rationnelle, alors toutes les fibres V_t n'ont que des singularités rationnelles.

2) Comme le morphisme $\varepsilon : T' \to T$ est surjectif fini, pour tout point t' de T' les singularités de la fibre $V'_{t'}$ de la famille $\lambda' : \mathscr{V}' \to T'$ au-dessus de t' et les singularités de la fibre V_t de la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ au-dessus de $t = \varepsilon(t')$, ont les mêmes invariants numériques.

3) Pour pouvoir utiliser le théorème de Brieskorn—Artin, dont nous déduisons ii) $\Rightarrow$ iii), dans un cadre algébrique il faut supposer que nous travaillons dans la catégorie des espaces algébriques ou dans celle des anneaux locaux henséliens. Dans la suite, chaque fois que cela sera nécessaire, nous supposerons donc que les anneaux considérés sont locaux henséliens.

Démonstration.

i) $\Rightarrow$ ii). — Comme la singularité (V,p) est rationnelle, elle est canoniquement libre et dans le lemme 2.3, nous pouvons prendre $D = 0$; nous trouvons alors que codim $\delta(m)$ est nul pour tout m, c'est-à-dire que S_m est inclus dans $(\mathscr{I}_m)_0$.

Par conséquent, si la fonction $-K_t^2$ est constante sur T les deux faisceaux $(\mathscr{I}_m)_0$ et S_m sont égaux, le faisceau $\mathscr{I}_m$ sur $\mathscr{V}$ vérifie $\forall t \in T$, $(\mathscr{I}_m)_t = S_{t,m}$.

Nous définissons la variété $\overline{\mathscr{M}} = \mathrm{Proj}\,(\bigoplus_{m\geqslant 0} \mathscr{I}_m)$, en posant $\mathscr{I}_0 = \mathcal{O}_{\mathscr{V}}$ et où $\bigoplus_{m\geqslant 0} \mathscr{I}_m$ est une $\mathcal{O}_{\mathscr{V}}$-algèbre graduée, dont la multiplication correspond au morphisme canonique :

$$(i_*\theta_*(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{W}/\mathrm{T}}) \cap \omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}) \otimes (i_*\theta_*(\omega^{\otimes n}_{\mathscr{W}/\mathrm{T}}) \cap \omega^{[n]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}) \to (i_*\theta_*\omega^{\otimes m+n}_{\mathscr{W}/\mathrm{T}}) \cap \omega^{[m+n]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}.$$

Nous avons alors un morphisme propre $\bar{\pi} : \bar{\mathscr{M}} \to \mathscr{V}$; comme les faisceaux $\mathscr{S}_m$ sont plats sur T, nous vérifions que le morphisme $\lambda \circ \bar{\pi} : \bar{\mathscr{M}} \to \mathrm{T}$ est plat et que pour tout point t de T le morphisme $\bar{\pi}$ induit le morphisme $\bar{\pi}_t : \mathrm{Proj}_{\mathrm{V}_t}(\bigoplus_{m \geqslant 0} \mathrm{S}_{t,m}) \to \mathrm{V}_t$ qui est la résolution en P.D.R. d'après le théorème 1.4. Alors $\bar{\pi} : \bar{\mathscr{M}} \to \mathscr{V}$ est une résolution simultanée en P.D.R. de la famille $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$.

Nous déduisons du diagramme (*) et de l'égalité $(\mathscr{S}_m)_0 = \mathrm{S}_m$:

$$\gamma_m(\mathrm{V}) = \operatorname{codim} \beta(m) = \operatorname{codim} \alpha(m) = \gamma_m(\mathrm{V}_t) + \dim \chi_m$$

si m est divisible par δ et δ_t, nous avons alors :

$$-\frac{1}{2} m(m-1)\mathrm{K}^2 = -\frac{1}{2} m(m-1)\mathrm{K}_t^2 + \dim \chi_m$$

et comme $\mathrm{K}^2 = \mathrm{K}_t^2$, nous avons $\dim \chi_m = 0$ c'est-à-dire $(\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}})_0 = \omega^{[m]}_{\mathrm{V}}$.

Le faisceau $\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ cohérent sur $\mathscr{V}$ vérifie alors $\forall t \in \mathrm{T}$ $(\omega^{[m]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}})_t$ est isomorphe au faisceau $\omega^{[m]}_{\mathrm{V}_t}$ inversible sur V_t, par conséquent il est inversible.

ii) $\Rightarrow$ iii). — C'est une conséquence du théorème de Brieskorn-Artin et de la proposition 1.6.

iii) $\Rightarrow$ *i*). — D'après la remarque 2.6. 2), nous pouvons supposer que la famille $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ admet une résolution simultanée très faible minimale : $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{V}$. D'après la proposition 1.6, nous pouvons supposer que le faisceau $\omega^{[m_0]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}}$ est inversible pour un entier m_0 divisible par δ et δ_t; et pour tout point t de T les faisceaux $(\omega^{[m_0]}_{\mathscr{V}/\mathrm{T}})_t$ et $\omega^{[m_0]}_{\mathrm{V}_t}$ sont isomorphes.

Considérons les deux suites spectrales ayant même aboutissement E_n et dont les termes initiaux sont respectivement :

$$'\mathrm{E}^2_{pq} = \mathrm{R}^{-p}(\pi_t)_* (\mathrm{Tor}^{\mathscr{O}_\mathrm{T}}_q(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{M}/\mathrm{T}}, k(t)))$$
$$''\mathrm{E}^2_{pq} = \mathrm{Tor}^{\mathscr{O}_\mathrm{T}}_p(\mathrm{R}^{-q}\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{M}/\mathrm{T}}), k(t)).$$

Nous déduisons alors l'isomorphisme :

$$[R^1\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_t \xrightarrow{\sim} R^1(\pi_t)_*(\omega_{M_t}^{\otimes m})$$

et la suite exacte :

$$0 \to [\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_t \to (\pi_t)_*(\omega_{M_t}^{\otimes m}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_T}(R^1\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m}), k(t)) \to 0 .$$

Nous avons une suite exacte de faisceaux cohérents sur $\mathcal{V}$:

$$0 \to \pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m}) \to \omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]} \to B_m \to 0$$

où le faisceau B_m est à support dans $\mathcal{V}_{\text{sing}}$ le fermé complémentaire de l'ouvert de lissité $\mathcal{V}^0$ de λ, donc à support fini sur T.

Comme le faisceau $\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]}$ est plat sur T, nous avons pour tout point t de T une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_T}(B_m, k(t)) \to [\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_t \to [\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]}]_t \to [B_m]_t \to 0 .$$

Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} [\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_t & \longrightarrow & [\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]}]_t \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (\pi_t)_*(\omega_{M_t}^{\otimes m}) & \hookrightarrow & \omega_{V_t}^{[m]} \end{array}$$

par conséquent le morphisme de $[\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_t$ dans $[\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]}]_t$ est injectif pour tout t et le faisceau B_m est plat sur T.

$m < 0$: pour $t \neq 0$, nous avons les quatre faisceaux du diagramme (**) qui sont isomorphes, par conséquent le faisceau $(B_m)_t$ est nul. Comme le faisceau B_m est plat sur T, nous en déduisons qu'il est nul, donc que les faisceaux $\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})$ et $\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]}$ sont isomorphes.

Si de plus m est divisible par m_0 les faisceaux $(\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]})_0$ et $\omega_V^{[m]}$ sont isomorphes, donc il en est de même des faisceaux $[\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_0$ et $\pi_*(\omega_M^{\otimes m})$. Nous déduisons alors de la suite exacte associée aux suites spectrales de changement de base que le faisceau $R^1\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})$ est plat sur T, donc que la fonction qui à t associe $\dim_{k(t)}[R^1\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_t$ est constante sur T.

D'après la proposition 1.1, nous avons ce nombre qui est égal à $\gamma_{1-m}(V_t)$; d'où la propriété i).

iii) $\Rightarrow$ iv). — Soit $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{V}$ la résolution simultanée très faible minimale de la famille $\lambda : \mathcal{V} \to T$ et soit m_0 un entier positif tel que le faisceau $\omega^{[m_0]}_{\mathcal{V}/T}$ soit inversible.

Si m est un entier négatif le morphisme de $\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/T})$ dans $\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/T}$ est un isomorphisme (cf. iii) $\Rightarrow$ i)), si de plus m est divisible par m_0 le faisceau $\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/T})$ est inversible et nous déduisons du morphisme canonique $\pi^*\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/T}) \to \omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/T}$ l'existence d'un diviseur de Cartier $\mathcal{D}$ effectif sur $\mathcal{M}$ et à support exceptionnel vérifiant

$$\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/T} = \pi^*(\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/T}) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathcal{D}).$$

Par construction le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ est plat sur T, le morphisme propre $\mathcal{D} \to T$ restriction de $\rho = \lambda \circ \pi$ est une déformation plate de la fibre spéciale D_0. Comme (V,p) est un germe de singularité, tout faisceau inversible sur V est trivial, par conséquent nous avons $\omega^{[m]}_V \simeq \mathcal{O}_V$ et $\omega^{\otimes m}_M = \mathcal{O}_M(D_0)$, c'est-à-dire $D_0 = mK_M$.

iv) $\Rightarrow$ iii). — Soit $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{V}$ la résolution simultanée très faible minimale de la famille $\lambda : \mathcal{V} \to T$. Par hypothèse, il existe un diviseur $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{M}$ propre et plat sur T qui définit une déformation de sa fibre spéciale $D_0 = mK_M$. Nous pouvons supposer que l'entier négatif m est divisible par δ et δ_t.

Nous avons les isomorphismes

$$\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/T}) \to \omega^{[m]}_{\mathcal{V}/T} \qquad \text{et} \qquad (\pi_t)_*(\omega^{\otimes m}_{M_t}) \to \omega^{[m]}_{V_t}, \qquad \forall t \in T.$$

Soit $\mathcal{L}$ le faisceau inversible sur $\mathcal{M}$ égal à $\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/T} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(-\mathcal{D})$ et soient les deux suites spectrales de changement de base ayant même aboutissement et dont les termes initiaux sont respectivement :

$$'E^2_{pq} = R^{-p}(\pi_t)_*(\mathrm{Tor}^{\mathcal{O}_T}_q(\mathcal{L},k(t)))$$
$$''E^2_{pq} = \mathrm{Tor}^{\mathcal{O}_T}_p(R^{-q}\,\pi_*(\mathcal{L}),k(t)).$$

Nous déduisons l'isomorphisme $[R^1\pi_*(\mathcal{L})]_t \xrightarrow{\sim} R^1(\pi_t)_*(\mathcal{L}_t)$ et la suite exacte :

$$0 \to [\pi_*(\mathcal{L})]_t \to (\pi_t)_*(\mathcal{L}_t) \to \mathrm{Tor}^{\mathcal{O}_T}_1(R^1\pi_*(\mathcal{L}),k(t)) \to 0.$$

Pour $t = 0$, nous avons $\mathscr{L}_0 = \mathcal{O}_M$, d'où $R^1(\pi_0)_*(\mathscr{L}_0) = R^1\pi_*(\mathcal{O}_M)$ est nul, par conséquent $R^1\pi_*(\mathscr{L})$ est nul sur $\mathscr{V}$ et pour tout t nous avons l'isomorphisme $[\pi_*(\mathscr{L})]_t \xrightarrow{\sim} (\pi_t)_*(\mathscr{L}_t)$.

Nous avons alors un morphisme composé :

$$\mathcal{O}_V = \pi_*(\mathcal{O}_M) \xrightarrow{\sim} [\pi_*(\mathscr{L})]_0 \to [\pi_*(\omega_{\mathscr{M}/T}^{\otimes m})]_0 \xrightarrow{\sim} [\omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]}]_0 \to \omega_V^{[m]}$$

qui est un isomorphisme au-dessus de $U = V - \{p\}$; c'est donc un isomorphisme. Par conséquent, le faisceau $\omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]}$ vérifie $(\omega_{\mathscr{V}/T}^{[m]})_t$ est isomorphe au faisceau inversible $\omega_{V_t}^{[m]}$ pour tout t, il est donc inversible sur $\mathscr{V}$.

3. Nous allons étendre le résultat précédent au cas où la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ est paramétrée par une variété réduite quelconque.

Nous rappelons la définition suivante ([21]) :

La famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ admet une résolution simultanée faible le long de l'image T_1 d'une section $\sigma : T \to \mathscr{V}$ s'il existe un morphisme $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{V}$ tel que :

- $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{V}$ est une résolution simultanée très faible de $\lambda : \mathscr{V} \to T$;
- le morphisme induit par restriction $\tilde{\rho} : (\pi^{-1}(T_1))_{red} \to T$ est une déformation localement triviale de sa fibre au-dessus de tout point de T.

Nous pouvons définir la résolution simultanée faible d'une famille de surfaces normales sans introduire une section ([13], p. 21). Si la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ admet une résolution simultanée faible $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{V}$, toutes les fibres V_t ont le même nombre k de points singuliers qui correspondent à k sections distinctes $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de λ.

Pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant k$, nous considérons $\mathscr{E}_{(j)}$ la composante connexe réduite du diviseur exceptionnel $\mathscr{E}$ de π, correspondant à la section σ_j. Par hypothèse, la matrice d'intersection des composantes irréductibles des diviseurs exceptionnels $(\mathscr{E}_{(j)})_t$ est indépendante du point t.

Remarque 3.1. — Comme les nombres δ_t et K_t^2 sont déterminés uniquement par les matrices d'intersection des diviseurs exceptionnels sur la résolution minimale M_t, si la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ admet une résolution simultanée faible, les nombres δ_t et K_t^2 sont constants le long de T.

THÉORÈME 3.2. — *Soit* $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ *une déformation plate d'une surface normale, alors la fonction* $t \mapsto -\mathrm{K}_t^2$ *est semi-continue supérieurement sur* T.

En particulier, l'ensemble $\mathrm{S} = \{t \in \mathrm{T}/\mathrm{K}_t^2 = \mathrm{K}_0^2\}$ *est une sous-variété fermée de* T.

Démonstration. — Il existe un ouvert dense T^0 de T au-dessus duquel la famille $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ admet une résolution simultanée faible ([21], Prop. 2, p. 109), par conséquent la fonction $-\mathrm{K}_t^2$ est constante sur cet ouvert d'après la remarque 3.1. Nous déduisons alors de la proposition 2.4 que la fonction $-\mathrm{K}_t^2$ est semi-continue supérieurement.

LEMME 3.3. — *La fonction* $t \mapsto \delta_t$ *ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que pour toute famille plate $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ il existe un ouvert dense T^0 de T sur lequel la fonction δ_t est constante. L'existence d'un tel ouvert est une conséquence de la remarque 3.1 et de ([21], Prop. 2, p. 109).

PROPOSITION 3.4. — *Soit* $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ *un germe de déformation plate de surfaces normales n'ayant que des singularités rationnelles, paramétrée par une variété réduite* T. *Nous supposons qu'il existe un morphisme surjectif fini* $\varepsilon : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ *tel que la famille* $\lambda' : \mathscr{V}' \to \mathrm{T}'$ *obtenue par changement de base vérifie :*

a) *il existe une résolution simultanée très faible* $\pi' : \mathscr{M}' \to \mathscr{V}'$ *de* $\lambda' : \mathscr{V}' \to \mathrm{T}'$;

b) *il existe un entier non nul* m_0 *tel que le faisceau* $\omega_{\mathscr{V}'/\mathrm{T}'}^{[m_0]}$ *soit inversible ; alors la fonction* $t \mapsto -\mathrm{K}_t^2$ *est constante sur* T.

Démonstration. — D'après la remarque 2.6. 2), nous pouvons supposer que c'est la famille $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ qui admet une résolution simultanée très faible et nous supposons qu'elle est minimale.

D'après le théorème 3.2, il suffit de montrer que pour tout point t' de T et pour toute spécialisation t de t' les nombres K_t^2 et $\mathrm{K}_{t'}^2$ sont égaux. Par une récurrence sur le degré de transcendance de l'extension $k(t) \subset k(t')$, nous pouvons nous ramener au cas où ce degré vaut 1 ; il existe alors un anneau de valuation discrète A et un morphisme $\varepsilon : \bar{\mathrm{T}} = \operatorname{Spec} \mathrm{A} \to \mathrm{T}$ qui envoie le point fermé 0 de $\bar{\mathrm{T}}$ sur t et le point générique η de $\bar{\mathrm{T}}$ sur t'.

La famille $\bar{\lambda} : \bar{\mathscr{V}} \to \bar{\mathrm{T}}$ obtenue par le changement de base $\varepsilon : \bar{\mathrm{T}} \to \mathrm{T}$ vérifie encore les hypothèses *a*) et *b*) (d'après la proposition 1.6), le résultat est alors une conséquence de l'implication iii) $\Rightarrow$ i) du théorème 2.5.

Nous allons fixer maintenant quelques notations : V est une surface normale affine ayant un seul point singulier p et nous supposons que la singularité (V,p) est rationnelle; $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{V}$ est la résolution minimale de (V,p).

Nous notons $p : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{D}_\mathrm{V}$ et $q : \tilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{D}_\mathrm{M}$ les déformations verselles formelles respectivement de V et de M. D'après le théorème d'algébrisation d'Elkik ([4]), nous savons qu'il existe un représentant algébrique de la déformation verselle de V et nous le notons aussi $p : \tilde{\mathrm{V}} \to \mathrm{D}_\mathrm{V}$. Par contre, nous ne savons pas si un tel représentant existe pour la déformation verselle formelle de M.

Comme (V,p) est une singularité rationnelle toute déformation plate de M induit une déformation plate de V; nous définissons ainsi un morphisme $f : \mathrm{D}_\mathrm{M} \to \mathrm{D}_\mathrm{V}$ qui est fini ([1]; [25], Th. 3.2, p. 352).

Proposition 3.5 ([13]). — *La sous-variété* S *de* D_V *définie au théorème* 3.2 *est incluse dans la sous-variété* $f(\mathrm{D}_\mathrm{M})$ *de* D_V.

Nous donnons en appendice une démonstration de cette proposition dans le cas algébrique.

Théorème 3.6. — *Soit* $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ *un germe de déformation plate de la singularité rationnelle* (V,p) *de surface normale; alors les conditions* i) *à* iv) *du théorème* 2.5 *sont équivalentes.*

Démonstration.

iii) $\Rightarrow$ i) d'après la proposition 3.4.

i) $\Rightarrow$ iii) *a*) par hypothèse le morphisme g de T dans D_V qui induit la déformation $\lambda : \mathscr{V} \to \mathrm{T}$ a son image $g(\mathrm{T})$ incluse dans S. Nous avons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}' = \mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} f^{-1}(\mathrm{S}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & f^{-1}(\mathrm{S}) \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{T} \arrow[r, "g"'] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

Le morphisme $f: f^{-1}(S) \to S$ est fini et surjectif d'après la proposition 3.5; par conséquent, il en est de même du morphisme $\varepsilon: T' \to T$.

Le morphisme $h: T' \to f^{-1}(S) \subset D_M$ définit une déformation de M qui est une résolution simultanée très faible de la famille $\lambda': \mathscr{V}' \to T'$ obtenue à partir de λ par le changement de base ε.

b) nous supposons que la famille $\lambda: \mathscr{V} \to T$ vérifie l'hypothèse i) et qu'elle admet une résolution simultanée très faible minimale $\pi: \mathscr{M} \to \mathscr{V}$. Nous notons $j: \mathscr{V}^0 \to \mathscr{V}$ l'immersion de l'ouvert de lissité de λ; d'après la proposition 6.9.8 de [6], nous avons deux suites spectrales ayant même aboutissement E_n dont les termes initiaux sont respectivement :

$$'E^2_{p,q} = R^{-p}(j_t)_*(\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_T}(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{V}^0/T}, k(t)))$$

$$''E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_T}(R^{-q}(j)_*(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{V}^0/T}), k(t)).$$

Comme le faisceau $\omega^{\otimes m}_{\mathscr{V}^0/T}$ est plat sur T, la première suite spectrale dégénère et nous trouvons : $E_n = {}'E^2_{n,0}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E_n &= 0 \quad \text{pour} \quad n \neq 0, -1 \\ E_0 &= (j_t)_*(\omega^{\otimes m}_{V_t^0}) = \omega^{[m]}_{V_t} \\ E_{-1} &= R^1(j_t)_*(\omega^{\otimes m}_{V_t^0}). \end{aligned}$$

La suite spectrale $''E^2_{p,q}$ vérifie $''E^2_{p,q} = 0$ pour $p < 0$ et pour $q > 0$ et pour $q < -(d+1)$ où d est la dimension de la variété T.

Nous montrons par récurrence que la suite spectrale $''E^2_{p,q}$ vérifie en fait $''E^2_{p,q} = 0$ pour $q < -1$; il suffit de vérifier que la nullité de $''E^2_{p,q}$ pour $q < -q_0$ où $q_0 \geqslant 2$ entraîne la nullité de $''E^2_{0,-q_0} = R^{q_0}j_*(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{V}^0/T}) \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} k(t)$. Comme ceci est vrai pour tout t, on a la nullité du faisceau $R^{q_0}j_*(\omega^{\otimes m}_{\mathscr{V}^0/T})$ donc de tous les termes $''E^2_{p,-q_0}$. De l'hypothèse $''E^2_{p,q} = 0$ pour $q > 0$, $q < -q_0$, $p < 0$, nous déduisons une suite exacte $E_{-q_0} \to {}''E^2_{0,-q_0} \to {}''E^2_{-2,-q_0+1}$ et comme E_{-q_0} et $''E^2_{-2,-q_0+1}$ sont nuls, nous avons le résultat.

Comme la suite spectrale $''E^2_{p,q}$ vérifie $''E^2_{p,q} = 0$ pour $p < 0$ et pour $q \neq 0, -1$ nous avons une suite exacte :

$$0 \to {}''E^2_{2,-1} \to {}''E^2_{0,0} \to E_0 \to {}''E^2_{1,-1} \to 0$$

et un isomorphisme

$$\mathrm{E}_{-1} \xrightarrow{\sim} {}''\mathrm{E}^2_{0,\,-1}.$$

Nous étudions de la même manière les deux suites spectrales de changement de base suivantes :

$$'\mathrm{F}^2_{p,q} = \mathrm{R}^{-p}(\pi_t)_*(\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/\mathrm{T}}, k(t))) \Rightarrow \mathrm{F}_n$$

$$''\mathrm{F}^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathrm{R}^{-q}\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/\mathrm{T}}), k(t)) \Rightarrow \mathrm{F}_n.$$

Nous avons aussi un morphisme injectif de $\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/\mathrm{T}})$ dans $\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}}$ et nous notons $\mathscr{C}_m$ le conoyau; et pour tout point t de T nous notons $\xi_{t,m}$ le conoyau du morphisme canonique de $(\pi_t)_*(\omega^{\otimes m}_{\mathrm{M}_t})$ dans $\omega^{[m]}_{\mathrm{V}_t}$.

En rassemblant ces résultats, nous trouvons le diagramme commutatif suivant formé de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Tor}_2^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathrm{R}^1\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/\mathrm{T}}), k(t)) \arrow[d] & \mathrm{Tor}_2^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathrm{R}^1 j_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{V}^0/\mathrm{T}}), k(t)) \arrow[d] & & \\
\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathscr{C}_m, k(t)) \arrow[r] & (\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/\mathrm{T}}))_t \arrow[r] \arrow[d] & (\omega^{[m]}_{\mathcal{V}/\mathrm{T}})_t \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{C}_m)_t \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\pi_t)_*({}^{\otimes m}_{\mathrm{M}_t}) \arrow[r] \arrow[d] & \omega^{[m]}_{\mathrm{V}_t} \arrow[r] \arrow[d] & \xi_{t,m} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathrm{R}^1\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/\mathrm{T}}), k(t)) \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_\mathrm{T}}(\mathrm{R}^1 j_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{V}^0/\mathrm{T}}), k(t)) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Nous supposons que l'entier m est négatif et qu'il est divisible par tous les δ_t (c'est possible d'après le lemme 3.3).

Comme m est négatif, nous avons $\xi_{t,m} = 0$ et nous déduisons de l'isomorphisme entre $''\mathrm{F}^2_{0,\,-1}$ et $'\mathrm{F}^2_{-1,\,0}$ que $\dim_{k(t)}[\mathrm{R}^1\pi_*(\omega^{\otimes m}_{\mathcal{M}/\mathrm{T}})]_t$ est égal à $\gamma_{1-m}(\mathrm{V}_t)$.

Comme m est divisible par δ_t, le plurigenre $\gamma_{1-m}(V_t)$ est égal à $-\frac{1}{2}m(m-1)K_t^2$, donc est indépendant de t par hypothèse. Par conséquent, le faisceau $R^1\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})$ est plat sur T et les faisceaux $[\pi_*(\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m})]_t$, $(\pi_t)_*(\omega_{M_t}^{\otimes m})$ et $\omega_{V_t}^{[m]}$ sont isomorphes. Alors le faisceau $R^1j_*(\omega_{\mathcal{V}^0/T}^{\otimes m})$ vérifie $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_T}(R^1j_*(\omega_{\mathcal{V}^0/T}^{\otimes m}), k(t)) = 0$ pour tout point t de T, il est donc plat sur T et nous avons $(\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]})_t \xrightarrow{\sim} \omega_{V_t}^{[m]}$. Comme les faisceaux $\omega_{V_t}^{[m]}$ sont inversibles pour tout point t de T, le faisceau $\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]}$ est inversible sur $\mathcal{V}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) se démontre comme dans le cas où la base T de la déformation est une courbe régulière.

iii) $\Rightarrow$ *ii*) le seul point à démontrer est que la résolution simultanée en points doubles rationnels de la famille $\lambda : \mathcal{V} \to T$ s'obtient sans faire de changement de base.

Si nous notons $\bar{M}$ la résolution en P.D.R. de la singularité rationnelle (V,p), et $D_{\bar{M}}$ la base de la déformation verselle de la surface $\bar{M}$ le morphisme f de D_M dans D_V se factorise par $D_{\bar{M}} : D_M \to D_{\bar{M}} \to D_V$. D'après le théorème de Lipman ([16], [24], Th. 2.2, p. 48) le morphisme $\bar{f}$ de $D_{\bar{M}}$ dans D_V est une immersion fermée (c'est-à-dire que $D_{\bar{M}}$ est isomorphe à la composante d'Artin $f(D_M)$ de D_V). Par conséquent, si la famille $\lambda : \mathcal{V} \to T$ admet une résolution simultanée très faible après un changement de base surjectif fini, elle est induite par un morphisme $g : T \to D_V$ dont l'image est incluse dans $D_{\bar{M}} \simeq f(D_M)$ et admet une résolution simultanée en P.D.R. sans faire de changement de base.

iii) $\Rightarrow$ iv) nous faisons la même démonstration que dans le cas où la base T est une courbe régulière; c'est-à-dire nous déduisons du morphisme canonique

$$\pi^*\omega_{\mathcal{V}/T}^{[m]} = \pi^*\pi_*\omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m} \to \omega_{\mathcal{M}/T}^{\otimes m}$$

l'existence d'un diviseur effectif $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{M}$ à support exceptionnel. Pour montrer que le diviseur $\mathcal{D}$ est plat sur T, nous utilisons le critère valuatif de platitude et considérons la famille $\lambda_1 : \mathcal{V}_1 \to T_1$ obtenue par le changement de base $\varepsilon_1 : T_1 \to T$ où T_1 est le spectre d'un anneau de valuation discrète; le résultat provient alors du théorème 2.5.

iv) $\Rightarrow$ iii) se démontre comme dans le cas où la base T de la déformation est une courbe régulière.

Appendice.

Démonstration du lemme 2.3. — Comme la matrice d'intersection du diviseur exceptionnel sur la résolution minimale $\pi : M \to V$ de V est définie négative, il existe un diviseur effectif D à support exceptionnel vérifiant $\forall i\ D.E_i \leqslant -K_M.E_i$, alors d'après la proposition 1.3 pour tout $m \geqslant 1$, le diviseur $mK_M - D$ est sans point-base. En particulier si (V,p) est une singularité de Gorenstein, nous pouvons prendre $D = -K_M$.

Nous avons la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr] & X_0 \arrow[rrr, "j"] \arrow[d] \arrow[ddr] & & & \mathscr{X} \arrow[dl] \arrow[dd, "\rho"] \\
M \arrow[r, "\pi"'] & V \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] & & \mathscr{V} \arrow[dr] & \\
& & \{0\} \arrow[rr] & & T
\end{tikzcd}$$

$\pi : \mathscr{X} \to \mathscr{V}$ est une résolution des singularités de $\mathscr{V}$ telle que la fibre $X_0 = \rho^{-1}(0)$ est un diviseur à croisements normaux sur $\mathscr{X}$ et telle que le transformé strict X' de V par π est une résolution des singularités de V; le morphisme $\pi' : X' \to V$ se factorise alors par la résolution minimale $\pi : M \to V$.

Soit α le morphisme de X' dans M ainsi obtenu, soit F le diviseur exceptionnel de α; comme α est obtenu par une suite finie d'éclatements pour tout diviseur D sur M si nous notons D' le transformé total de D par α, et pour tout entier m il existe un isomorphisme canonique α_* de $H^0(M,\mathcal{O}_M(mK_M - D))$ dans $H^0(X',\mathcal{O}_{X'}(mK_{X'} - mF - D'))$. Nous choisissons D diviseur effectif sur M tel que $\forall m \geqslant 1$, $mK_M - D$ soit sans point base et tel que D soit à support dans le diviseur exceptionnel de M; si nous notons $E = \bigcup_{i \in J} E_i$ le diviseur exceptionnel de $\pi' : X' \to V$ alors D' s'écrit sous la forme $D' = \sum_{i \in J} d_i E_i$ avec $\forall i, d_i \geqslant 0$. Le diviseur F est aussi un diviseur effectif sur X' à support dans E et nous posons $F = \sum_{i \in J} f_i E_i$ avec $\forall i, f_i \geqslant 0$.

Le diviseur X_0 peut s'écrire sous la forme $X_0 = X' + \sum_{i \in I} a_i A_i$; quitte à faire des éclatements, nous pouvons supposer que chaque composante irréductible E_i du diviseur exceptionnel sur X' est égale à $A_i \cap X'$, d'où $J \subset I$ et $\forall i \in I \backslash J$, A_i ne rencontre pas X'. Pour tout i dans I, nous avons $a_i \geqslant 1$ et nous posons $f_i = d_i = 0$ pour $i \in I \backslash J$.

Soit $\omega_{\mathscr{V}}$ un faisceau dualisant sur $\mathscr{V}$ et $\omega_{\mathscr{X}} = \pi^!(\omega_{\mathscr{V}})$ le faisceau dualisant sur $\mathscr{X}$ associé; $\omega_{\mathscr{X}}$ est un faisceau inversible et nous notons $K_{\mathscr{X}}$ le diviseur associé. En fait, nous considérons $\omega_{\mathscr{V}}$ et $\omega_{\mathscr{X}}$ comme les faisceaux dualisants relatifs $\omega_{\mathscr{V}/T}$ et $\omega_{\mathscr{X}/T}$. Nous avons alors $\omega_{X_0} \simeq \omega_{\mathscr{X}/T} \otimes \mathscr{O}_{X_0}$ et le diviseur canonique K_{X_0} sur X_0 est égal à $K_{\mathscr{X}|X_0}$.

Le faisceau dualisant sur X' est égal à $\pi'^!(\omega_V) = j'^!(\omega_{X_0})$; comme X_0 est égal à $X' + \sum_{i \in I} a_i A_i$ par adjonction, nous trouvons que le diviseur $K_{X'}$ associé au faisceau $\omega_{X'}$ est égal à $\left(K_{\mathscr{X}} - \sum_{i \in I} a_i A_i\right)|_{X'}$.

Pour tout $m \geqslant 1$, nous définissons le faisceau $\mathscr{L}^{(m)}$ par :

$$\mathscr{L}^{(m)} = \mathscr{O}_{\mathscr{X}}\left(mK_{\mathscr{X}} - \sum_{i \in I} (ma_i + mf_i + d_i)A_i\right),$$

alors $\mathscr{L}^{(m)}|_{X'}$ est égal au faisceau $\mathscr{O}_{X'}(mK_{X'} - mF - D')$. Nous considérons les deux propositions suivantes définies pour $m \geqslant 1$:

$(*)_m$: toute section de $H^0(M, \mathscr{O}_M(mK_M - D))$ est induite par une section de $H^0(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}(mK_{\mathscr{X}}))$;

$(**)_m$: quitte à faire un éclatement, nous pouvons supposer que la partie fixe de $mK_{\mathscr{X}}$ est un diviseur F_m; alors il existe un diviseur effectif G_m sur $\mathscr{X}$ à support disjoint de X' tel que $\mathscr{L}^{(m)}(-G_m) \subset \mathscr{O}_{\mathscr{X}}(mK_{\mathscr{X}} - F_m)$.

$(*)_m \Rightarrow (**)_m$: nous pouvons toujours faire un éclatement de manière à ce que la partie fixe de $mK_{\mathscr{X}}$ soit un diviseur F_m, comme une telle opération ne modifie pas le groupe $H^0(\mathscr{X}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}}(mK_{\mathscr{X}}))$, par hypothèse toute section globale de $\mathscr{O}_M(mK_M - D)$ provient d'une section globale de $\omega_{\mathscr{X}}^{\otimes m}$.

Alors, grâce à l'isomorphisme α_* il en est de même pour toute section globale de $\mathscr{O}_{X'}(mK_{X'} - mF - D') = \mathscr{L}^{(m)}|_{X'}$.

Par hypothèse sur D et grâce à l'isomorphisme α_* $\mathscr{L}^{(m)}|_{X'}$ est sans point base sur X' et, comme ses sections globales sur X' se remontent en sections globales de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(mK_{\mathscr{X}})$ sur $\mathscr{X}$, nous trouvons le résultat.

$(**)_m \Rightarrow (*)_{m+1}$: nous supposons que $\mathscr{X}$ est choisi tel que la partie fixe de $m\mathrm{K}_{\mathscr{X}}$ est un diviseur F_m, et par hypothèse, nous avons l'inclusion :

$$\mathscr{L}^{(m+1)}(-\mathrm{G}_m) = \mathscr{L}^{(m)}(-\mathrm{G}_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathscr{X}}\Big(\mathrm{K}_{\mathscr{X}} - \sum_{i \in \mathrm{I}} (a_i + f_i)\mathrm{A}_i\Big)$$
$$\subset \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(m\mathrm{K}_{\mathscr{X}} - \mathrm{F}_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{K}_{\mathscr{X}}).$$

Le fibré $m\mathrm{K}_{\mathscr{X}} - \mathrm{F}_m$ est quasi-positif, nous déduisons alors du théorème de Grauert-Riemenschneider ([9]) que $\mathrm{H}^1(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(m\mathrm{K}_{\mathscr{X}} - \mathrm{F}_m) \otimes \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{K}_{\mathscr{X}}))$ est nul. Si nous notons u un paramètre sur T (nous pouvons même supposer que T est le spectre d'un anneau de valuation discrète R), nous avons la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}}((m+1)\mathrm{K}_{\mathscr{X}} - \mathrm{F}_m) \xrightarrow{\times u} \mathcal{O}_{\mathscr{X}}((m+1)\mathrm{K}_{\mathscr{X}} - \mathrm{F}_m)$$
$$\to \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0}((m+1)\mathrm{K}_{\mathrm{X}_0} - \mathrm{F}_m|_{\mathrm{X}_0}) \to 0$$

et nous trouvons alors un morphisme surjectif de

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}}((m+1)\mathrm{K}_{\mathscr{X}} - \mathrm{F}_m))$$

dans

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_0, \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0}((m+1)\mathrm{K}_{\mathrm{X}_0} - \mathrm{F}_m|_{\mathrm{X}_0})).$$

Par conséquent, toute section de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}^{(m+1)}(-\mathrm{G}_m|_{\mathrm{X}_0})$ se relève en une section de $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}}((m+1)\mathrm{K}_{\mathscr{X}}))$ et comme le support de G_m est disjoint de X', il en est de même de toute section de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}', \mathscr{L}^{(m+1)}|_{\mathrm{X}'})$, donc de toute section de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{O}_{\mathrm{M}}((m+1))\mathrm{K}_{\mathrm{M}} - \mathrm{D})$ grâce à l'isomorphisme α_*.

$(*)_1$ est vérifiée : nous déduisons du théorème de Grauert-Riemenschneider et de la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{K}_{\mathscr{X}}) \xrightarrow{\times u} \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{K}_{\mathscr{X}}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{K}_{\mathrm{X}_0}) \to 0$$

un morphisme surjectif $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{K}_{\mathscr{X}})) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_0, \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{K}_{\mathrm{X}_0}))$.

Par conséquent, toute section de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{O}_{\mathrm{M}}(\mathrm{K}_{\mathrm{M}} - \mathrm{D}))$ qui se relève en une section de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_0, \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0}(\mathrm{K}_{\mathrm{X}_0}))$ est induite par une section de $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}, \mathcal{O}_{\mathscr{X}}(\mathrm{K}_{\mathscr{X}}))$.

Nous avons ainsi montré par récurrence que les propositions $(*)_m$ et $(**)_m$ sont vérifiées pour tout $m \geqslant 1$. Comme toute section de $\omega_{\mathrm{V}}^{[m]}$ provenant d'une section globale de $\omega_{\mathscr{X}}^{\otimes m}$ est dans $\mathscr{I}_{m,0}$ nous avons alors l'inclusion $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{O}_{\mathrm{M}}(m\mathrm{K}_{\mathrm{M}} - \mathrm{D})) \subset \mathscr{I}_{m,0} \cap \mathrm{S}_m$ d'où l'inégalité :

$$\dim \mathrm{S}_m / \mathscr{I}_{m,0} \cap \mathrm{S}_m \leqslant \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{O}_{\mathrm{M}}(m\mathrm{K}_{\mathrm{M}})) / \mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{O}_{\mathrm{M}}(\mathrm{m}\mathrm{K}_{\mathrm{M}} - \mathrm{D})).$$

De la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_M(mK_M - D) \to \mathcal{O}_M(mK_M) \to \mathcal{O}_D(mK_M) \to 0$$

nous déduisons que $\dim S_m / \mathcal{I}_{m,0} \cap S_m$ est inférieur à $\dim H^0(D, \mathcal{O}_D(mK_M))$ qui, d'après le théorème de Riemann Roch, est majoré par une fonction linéaire en m.

Démonstration de la proposition 3.5. — V est une surface normale affine ayant un seul point singulier p et nous supposons que la singularité (V,p) est rationnelle; $\pi : M \to V$ est une résolution minimale de la singularité (V,p).

Nous notons $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des k-algèbres locales artiniennes de corps résiduel k, et $\hat{\underset{\sim}{C}}$ la catégorie des k-algèbres locales complètes Λ telles que pour tout n l'algèbre quotient $\Lambda / \mathcal{M}_\Lambda^n$ appartient à $\underset{\sim}{C}$.

Soit D_V (resp. D_M) le foncteur qui, à une k-algèbre R de $\underset{\sim}{C}$, associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de déformation de V (resp. M) au-dessus de Spec R. Nous savons que ces deux foncteurs admettent une enveloppe et nous notons $p : \tilde{V} \to D_V$ et $q : \tilde{M} \to D_M$ les déformations verselles formelles respectivement de V et de M.

D'après le théorème d'algébrisation d'Elkik ([4]) nous savons qu'il existe un représentant algébrique de la déformation verselle formelle de V et nous le notons aussi $p : \tilde{V} \to D_V$. Par contre, nous ne savons pas si un tel représentant existe pour la déformation verselle formelle de M.

D_M est le spectre d'un anneau complet Q; si nous notons Q_n l'anneau $Q/\mathcal{M}_Q^n$ la déformation formelle $q : \tilde{M} \to D_M$ est définie par une famille $q_n : \tilde{M}_n \to \operatorname{Spec} Q_n$ de déformation de M telle que q_n se déduit de q_{n+1} par le morphisme canonique $Q_{n+1} \to Q_n$.

Comme M est une variété lisse, les faisceaux $T^1_{M/K}$ et $T^2_{M/K}$ définis par le complexe cotangent sont nuls ([14]); comme $\pi : M \to V$ induit un isomorphisme au-dessus de $V \setminus \{p\}$ et comme la surface V est affine pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur M, le groupe $H^2(M,\mathcal{F})$ est nul, en particulier, le groupe $H^2(M,\theta_{M/K})$ est nul. Nous déduisons de ces résultats que la base D_M de la déformation verselle de M est lisse ([2]), Prop. 2.17, p. 104), c'est-à-dire que l'anneau Q est égal à l'anneau des séries formelles $k[[t_1,\dots,t_\mu]]$ où μ est la dimension de l'espace tangent $H^1(M,\theta_{M/K})$.

Soit R la sous-variété de D_M définie par :

$$R = \{t \in D_M /\ h_t = \dim H^1(M_t, \mathcal{O}_{M_t}) \text{ est égal à } h_0 = \dim H^1(M, \mathcal{O}_M)\};$$

alors R définit les déformations de M qui se contractent en des déformations de V ([26], Th. 1.4, p. 329). Nous avons alors un morphisme f de B dans D_V. Comme la singularité (V,p) est rationnelle, nous avons $R = D_M$.

Soit S la sous-variété de D_V définie par :

$$S = \{t \in D_V / \ K_t^2 = K^2\};$$

d'après le théorème 3.2, S est une sous-variété fermée de D_V.

Comme le morphisme f est fini, l'image $f(R)$ de la sous-variété R est une sous-variété fermée de D_V.

Nous supposons que la variété $f(R)$ ne contient pas S, c'est-à-dire qu'il existe une composante irréductible S_1 de S qui n'est pas incluse dans $f(R)$. Nous notons S_i les différentes composantes irréductibles de la sous-variété S, nous avons donc $S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$.

Soit $e : S' \to S$ l'éclatement du point 0 dans S, nous notons E le diviseur exceptionnel et par $'$ le transformé strict par e d'une sous-variété de S. Comme S_1 n'est pas inclus dans $f(R)$, il existe un point fermé y de $E \cap S_1'$ tel que y n'appartienne pas à $(S_1 \cap f(R))'$.

Nous pouvons trouver alors un morphisme $\gamma' : T \to S_1'$, où T est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, tel que l'image $\gamma'(0)$ du point fermé de T soit égale à y et l'image $\gamma'(\eta)$ du point générique de T n'appartienne pas à $E \cup (f(R) \cap S)' \cup \left(\bigcup_{i=2}^{N} S_i' \right)$.

Nous définissons ainsi un morphisme $\gamma = e \circ \gamma' : T \to S_1$ et nous en déduisons une déformation $\lambda : \mathscr{V} \to T$ de V de base T. Comme la variété T est le spectre d'un anneau de valuation discrète et comme le morphisme de T dans D_V a son image incluse dans S, nous savons d'après le théorème 2.5 que la famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ admet une résolution simultanée très faible, quitte à faire un changement de base surjectif fini $\varepsilon : T_1 \to T$.

Soit $\lambda_1 : \mathscr{V}_1 \to T_1$ la déformation plate de V obtenue par le changement de base $\varepsilon : T_1 \to T$ et soit $\pi_1 : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{V}_1$ la résolution simultanée très faible. Nous obtenons ainsi une déformation plate de M que nous notons $\rho_1 = \lambda_1 \circ \pi_1 : \mathscr{M}_1 \to T_1$ et à laquelle nous pouvons associer un morphisme $\varphi : T_1 \to D_M$.

La déformation $\rho_1 : \mathscr{M}_1 \to T_1$ de M se contracte simultanément en une déformation de V qui est isomorphe à $\lambda_1 : \mathscr{V}_1 \to T_1$. Par conséquent les deux morphismes $\gamma_1 = \gamma \circ \varepsilon$ et $f \circ \varphi$ de T_1 dans D_V induisent la même classe d'isomorphisme de déformations de V, et par hypothèse ils vérifient : $\gamma_1(T_1) \subset S_1$ et $f \circ \varphi(T_1) \subset f(R)$. Nous allons montrer que si S_1 n'est pas inclus dans $f(R)$ cette situation est impossible.

Quitte à nous restreindre à une composante irréductible de T_1, nous pouvons supposer que T_1 est égal au spectre d'un anneau de valuation discrète complet $D = k[[t]]$. Le morphisme φ de T_1 dans D_M correspond alors à un morphisme de k-algèbre de Q dans D défini par :

$$t_i \mapsto p_i \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant i \leqslant \mu\,.$$

Les séries formelles $p_i(t)$ vérifient $p_i(0) = 0$ et comme la déformation $\rho_1 : \mathscr{M}_1 \to T_1$ n'est pas triviale, il existe un i, $1 \leqslant i \leqslant \mu$, tel que la série p_i ne soit pas la série nulle.

Nous notons 0 le point fermé des différents schémas D_M, T_1 et $D_M \underset{k}{\times} T_1$, nous pouvons définir le complété $D_M \hat{\times} T_1$ de $D_M \underset{k}{\times} T_1$ qui est égal au spectre de l'anneau $Q \underset{k}{\hat{\otimes}} D = k[[t_1,\ldots,t_\mu,t]]$.

Soient i_1 et i_2 les immersions fermées respectivement de D_M et de T_1 dans $D_M \hat{\times} T_1$, correspondant aux morphismes :

- $[[t_1,\ldots,t_\mu,t]] \to k[[t_1,\ldots,t_\mu]]$

$$f(t_1,\ldots,t_\mu,t) \mapsto f(t_1,\ldots,t_\mu,0)$$

- $k[[t_1,\ldots,t_\mu,t]] \to k[[t]]$

$$f(t_1,\ldots,t_\mu,t) \mapsto f(0,\ldots,0,t)\,.$$

Nous pouvons alors définir un morphisme ψ de $D_M \hat{\times} T_1$ dans D_M tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
D_M \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "i_{D_M}"'] & D_M \hat{\times} T_1 \arrow[d, "\psi"] & T_1 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\varphi"] \\
& D_M &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ψ correspond au morphisme de k-algèbres de $k[[t_1,\ldots,t_\mu]]$ dans $k[[t_1,\ldots,t_\mu,t]]$ défini par :

$$t_i \mapsto t_i + p_i = q_i, \qquad \forall i, \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu .$$

Le morphisme φ est fini; en effet, comme les schémas T_1 et D_M sont complets, il suffit de vérifier qu'il est quasi-fini, c'est-à-dire que le k-espace vectoriel $k[[t]]/(p_1,\ldots,p_\mu)$ est de dimension finie. Or, ceci est immédiat, car une des séries formelles p_i n'est pas la série nulle.

Soit B' l'image de $i_2(T_1)$ par le morphisme ψ; comme φ est fini $B' = \varphi(T_1)$ est une sous-variété fermée de D_M. Le morphisme $\varphi : T_1 \to D_M$ induit la déformation $\rho_1 : \mathscr{M}_1 \to T_1$ de M qui se contracte simultanément; par conséquent, la sous-variété B' est incluse dans R.

Soit B l'image réciproque de la sous-variété B' par le morphisme ψ; B est une sous-variété fermée de $D_M \hat{\times} T_1$ contenant $i_1(B')$ et $i_2(T_1)$.

Le morphisme ψ induit par restriction un morphisme de B dans D_M dont l'image est incluse dans R, la déformation $\mathscr{N} \to B$ de M ainsi définie se contracte donc simultanément en une déformation $\tau : \mathscr{Y} \to B$ de V. Cette déformation correspond au morphisme $f \circ (\psi|_B) : B \to D_V$.

Par construction, la restriction de la déformation $\tau : \mathscr{Y} \to B$ à la sous-variété T_1 de B est égale à la déformation $\lambda_1 : \mathscr{V}_1 \to T_1$.

Nous considérons maintenant le morphisme g de la sous-variété fermée $(B' \times \{0\}) \cup (\{0\} \times T_1)$ de $D_M \hat{\times} T_1$, à valeurs dans D_V, défini par ses restrictions :

$$g|_{B' \times \{0\}} = f|_{B'}$$
$$g|_{\{0\} \times T_1} = \gamma_1 .$$

Le morphisme g existe, car les sous-variétés $B' \times \{0\} = i_1(B')$ et $\{0\} \times T_1 = i_2(T_1)$ sont transverses dans $D_M \hat{\times} T_1$, et g définit une déformation ξ de V isomorphe à la restriction de la déformation $\tau : \mathscr{Y} \to B$ à la sous-variété $(B' \times \{0\}) \cup (\{0\} \times T_1) = C$.

Nous allons montrer que nous pouvons prolonger le morphisme g en un morphisme h de B dans D_V qui définit une déformation de V de base B isomorphe à $\tau : \mathscr{Y} \to B$.

Pour tout $n \geqslant 1$, nous posons :

$$(D_M \hat{\times} T_1)_n = \operatorname{Spec}(k[[t,\ldots,t_\mu t]]/(t_1,\ldots,t_\mu,t)^n ,$$

et

$$\begin{aligned} C_n &= C \cap (D_M \hat{\times} T_1)_n \\ B_n &= B \cap (D_M \hat{\times} T_1)_n . \end{aligned}$$

Nous définissons alors les k-algèbres locales artiniennes F_n, G_n et H_n par $B_n = \operatorname{Spec} F_n$, $C_n = \operatorname{Spec} G_n$ et $B_{n-1} \cup C_n = \operatorname{Spec} H_n$. Nous déduisons des immersions fermées $C_n \to B_{n-1} \cup C_n$ et $B_{n-1} \cup C_n \to B_n$ les surjections $H_n \to G_n$ et $F_n \to H_n$.

La base D_V de la déformation verselle $\tilde{V} \to D_V$ de V est égale au spectre d'une k-algèbre locale E, alors par définition de la déformation verselle, le morphisme de foncteurs $H_E = \operatorname{Hom}_k(E, .) \to D_V$ est lisse, c'est-à-dire, pour toute surjection $A \to A'$ dans $\underline{C}$, l'application $H_E(A) \to H_E(A') \underset{D_V(A')}{\times} D_V(A)$ est surjective ([19]).

Le morphisme g de C dans D_V induit pour tout n un morphisme $g_n \in H_E(G_n)$ qui définit la déformation $\xi_n \in D_V(G_n)$ restriction de la déformation ξ à la sous-variété fermée C_n de C. De même, nous notons τ_n et τ'_n les restrictions de la déformation τ respectivement aux sous-variétés fermées B_n et $B_{n-1} \cup C_n$ de B; nous avons $\tau_n \in D_V(F_n)$ et $\tau'_n \in D_V(H_n)$.

Nous allons montrer par récurrence que nous pouvons trouver une suite $(\underline{h}_n)$ de morphismes vérifiant :

i) $\underline{h}_n \in H_E(F_n)$, c'est-à-dire le morphisme $\underline{h}_n$ correspond à un morphisme de B_n dans D_V.

(ii) Le morphisme $\underline{h}_n$ induit par restriction le morphisme $g_n \in H_E(G_n)$, et induit la déformation $\tau_n \in D_V(F_n)$.

(iii) Le morphisme $\underline{h}_{n+1}$ induit par restriction le morphisme $\underline{h}_n$.

Pour $n = 1$, nous avons les égalités $F_n = G_n = k$ et le résultat est trivial.

Nous supposons que nous avons trouvé $\underline{h}_n$, alors le morphisme $\underline{h}_n$ de B_n dans D_V et le morphisme g_{n+1} de C_{n+1} dans D_V coïncident sur $C_n = C_{n+1} \cap B_n$; ils se recollent donc en un morphisme h'_{n+1} de $B_n \cup C_{n+1}$. Nous notons $\underline{h}'_{n+1}$ le morphisme de $H_E(H_{n+1})$ correspondant et par construction le couple $(\underline{h}'_{n+1}, \tau_{n+1})$ appartient à $H_E(H_{n+1}) \underset{D_V(H_{n+1})}{\times} D_V(F_{n+1})$. De la lissité du morphisme $H_E \to D_V$, nous déduisons l'existence d'un morphisme $\underline{h}_{n+1} \in H_E(F_{n+1})$ qui induit $\underline{h}'_{n+1}$ et τ_{n+1}, c'est-à-dire qui vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii).

Nous avons ainsi trouvé une suite de morphismes h_n de B_n dans D_V, comme B est une variété complète, nous en déduisons un morphisme h *de* B dans D_V qui vérifie :

- $h : B \to D_V$ induit la déformation $\tau : \mathcal{Y} \to B$;
- la restriction de h à la sous-variété fermée C de B est égale à g.

Nous remarquons que nous avons les deux inclusions suivantes :

$$f \circ \varphi(T_1) = f(B') \subset h(B) \qquad \text{et} \qquad \gamma_1(T_1) \subset h(B).$$

Comme le morphisme h induit la déformation $\tau : \mathcal{Y} \to B$, l'image de B par h est incluse dans S, et comme B est une variété irréductible, l'image $h(B)$ est incluse dans une composante irréductible S_i de S. Or, nous avons l'inclusion $\gamma_1(T_1) \subset h(B)$, donc $h(B)$ est incluse dans S_1.

Nous avons donc montré que l'image $f \circ \varphi(T_1)$ de T_1 par $f \circ \varphi$ est incluse dans la sous-variété S_1.

La contradiction cherchée est alors une conséquence immédiate de la construction de γ_1, qui se factorise par l'éclatement $e : S' \to S$ de 0 dans S, et du lemme suivant.

LEMME ([13]). — *Soit* $\lambda_1 : \mathcal{V}_1 \to T_1$ *un germe de déformation plate de la singularité de surface normale* (V,p) *dont la base* T_1 *est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet* $k[[t]]$. *Alors si la déformation* λ_1 *n'est pas triviale, il existe un plus petit entier* $n \geqslant 1$ *tel que pour tout morphisme* $g : T_1 \to D_V$ *qui induit la famille* λ_1 *de la déformation verselle* $V \to D_V$:

(i) g *est l'application nulle sur la sous-variété fermée :*

$$T_{1,n} = \operatorname{Spec}(k[[t]]/(t)^n) \quad de \quad T_1 ;$$

(ii) g *est non nulle et uniquement déterminée sur la sous-variété fermée :*

$$T_{1,n+1} = (\operatorname{Spec} k[[t]]/(t)^{n+1}) \quad de \quad T_1 .$$

Exemple d'une famille $\lambda : \mathcal{V} \to T$ *à* K_t^2 *constant :*

L'exemple que nous construisons est celui d'une singularité torique de surface qui se déforme en une singularité torique. Pour les définitions et les résultats sur les variétés toriques, nous renvoyons au premier chapitre de [11] ou à l'article [8].

Soit V la singularité torique associée au cône polyhédral convexe rationnel $\sigma = \{(u,v) \in \mathbf{N}^2 / v \geqslant 0, 24u - 17v \geqslant 0\}$. Le cône σ est engendré par $\varepsilon_0 = (1,0)$ et $e = (17,24)$; nous calculons le développement en fraction continue de $\frac{n}{p} = \frac{24}{17}$:

$$\begin{aligned} n &= k_1 p + n_1 \Rightarrow k_1 = 1, \quad n_1 = 7 \\ p &= u_1 n_1 + p_1 \Rightarrow u_1 = 2, \quad p_1 = 3 \\ n_1 &= k_2 p_1 + n_2 \Rightarrow k_2 = 2, \quad n_2 = 1 \\ p_1 &= u_2 = 3. \end{aligned}$$

Les points anguleux de la frontière $\partial\sigma'$ de l'enveloppe convexe de $\sigma\backslash\{0\}$ sont alors $\varepsilon_0 = (1, 0)$; $\varepsilon_1 = (1, 1)$; $\varepsilon_2 = (5, 7)$ et $\varepsilon'_2 = e = (17, 24)$. Les points à coefficients entiers des faces bornées de $\partial\sigma'_0$ sont $q_0 = \varepsilon_0$, $q_1 = \varepsilon_1$; $q_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 = (3, 4)$; $q_3 = \varepsilon_2$ et $q_4 = \varepsilon'_2 = e$.

Nous en déduisons que le diviseur exceptionnel E de la résolution minimale $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{V}$ de la singularité V est composé de trois courbes rationnelles E_1, E_2 et E_3 vérifiant :

$$\begin{gathered} \mathrm{E}_1.\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_2.\mathrm{E}_3 = 1; \qquad \mathrm{E}_1.\mathrm{E}_3 = 0; \\ \mathrm{E}_1^2 = \mathrm{E}_3^2 = -4; \qquad \mathrm{E}_2^2 = -2; \quad ([8]). \end{gathered}$$

A partir de la matrice d'intersection, nous pouvons calculer le diviseur $c_\pi(\mathrm{K_M}) \in \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbf{Q}\mathrm{E}_i$ et l'invariant $\mathrm{K}^2 = c_\pi(\mathrm{K_M}).c_\pi(\mathrm{K_M})$. Si nous écrivons $c_\pi(\mathrm{K_M}) = k_1\mathrm{E}_1 + k_2\mathrm{E}_2 + k_3\mathrm{E}_3$, le triplé (k_1, k_2, k_3) est l'unique solution du système linéaire $c_\pi(\mathrm{K_M}).\mathrm{E}_i = \mathrm{K_M}.\mathrm{E}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Comme la singularité est rationnelle, toutes les composantes irréductibles E_i sont des courbes rationnelles et nous déduisons de la formule d'adjonction $\mathrm{E}_i^2 + \mathrm{E}_i.\mathrm{K_M} = 2_{g_i} - 2$ l'égalité $\mathrm{K_M}.\mathrm{E}_i = -\mathrm{E}_i^2 - 2$.

Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} -4k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 - 4k_3 = 2 \end{cases}$$

et nous trouvons $k_1 = k_2 = k_3 = -\frac{2}{3}$.

D'où $c_\pi(\mathrm{K_M}) = -\frac{2}{3}(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3)$ et $\mathrm{K}^2 = -\frac{8}{3}$.

Le cycle fondamental Z est égal à $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3$, la multiplicité de V est alors égale à $-\mathrm{Z}^2 = 6$ et la dimension de plongement est égale à 7.

$V = \operatorname{Spec} A$ avec $A = P/I$ où $P = k[x_1, x_2, \ldots, x_7]$ et $I = (f_1, \ldots, f_{15})$. Nous connaissons le nombre de générateurs (15) de l'idéal, ainsi que le nombre de relations (40) entre ces générateurs grâce au théorème de Wahl ([47]). Par définition, nous avons $A = \operatorname{Spec} k[\sigma^v \cap M]$ où σ^v est le cône dual de σ; nous trouvons alors :

$$A = \operatorname{Spec} k[X, Y, X^2Y^{-1}, X^3X^{-2}, X^{10}Y^{-7}, X^{17}Y^{-12}, X^{24}Y^{-17}]$$

et les générateurs cherchés sont :

$$\begin{array}{lll}
f_1 = x_1^2 - x_2x_3, & f_2 = x_3^2 - x_1x_4, & f_3 = x_1x_3 - x_2x_4 \\
f_4 = x_1x_5 - x_3x_4^3, & f_5 = x_2x_5 - x_1x_4^3, & f_6 = x_3x_5 - x_4^4 \\
f_7 = x_1x_6 - x_4^6, & f_8 = x_2x_6 - x_1x_4^2x_5, & f_9 = x_3x_6 - x_4^3x_5 \\
f_{10} = x_4x_6 - x_5^2, & f_{11} = x_1x_7 - x_3x_4x_5^2, & f_{12} = x_2x_7 - x_3^2x_5^2 \\
f_{13} = x_3x_7 - x_6x_4^3, & f_{14} = x_4x_7 - x_6x_5, & f_{15} = x_5x_7 - x_6^2.
\end{array}$$

De la même manière, nous étudions la singularité torique V' associée au cône polyhédral convexe rationnel σ' engendré par $(1, 0)$ et $(11, 15)$. Nous trouvons que le diviseur exceptionnel E' de la résolution minimale $\pi' = M' \to V'$ a deux composantes irréductibles E'_1 et E'_2 vérifiant $E_1'^2 = E_2'^2 = -4$ et $E'_1E'_2 = 1$. Le cycle fondamental Z' est égal à $E'_1 + E'_2$, la multiplicité de V' est égale à $-Z'^2 = 6$ et la dimension de plongement à 7.

$V' = \operatorname{Spec} A'$ avec $A' = P/I'$ où $I' = (f'_1, \ldots, f'_{15})$ avec :

$$\begin{array}{lll}
f'_1 = x_1^2 - x_2x_3, & f'_2 = x_3^2 - x_1x_4, & f'_3 = x_1x_3 - x_2x_4, \\
f'_4 = x_1x_5 - x_3x_4^2, & f'_5 = x_2x_5 - x_1x_4^2, & f'_6 = x_3x_5 - x_4^3, \\
f'_7 = x_1x_6 - x_4^4, & f'_8 = x_2x_6 - x_5x_3^2, & f'_9 = x_3x_6 - x_5x_4^2, \\
f'_{10} = x_4x_6 - x_5^2, & f'_{11} = x_1x_7 - x_5x_4^3, & f'_{12} = x_2x_7 - x_6x_3^2, \\
f'_{13} = x_3x_7 - x_6x_4^2, & f'_{14} = x_4x_7 - x_5x_6, & f'_{15} = x_5x_7 - x_6^2.
\end{array}$$

Nous définissons alors le fermé $\mathscr{V}$ de $A_k^8 = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_7, t]$ par l'idéal engendré par les polynômes $F_1, \ldots, F_{15}$ suivants :

$$\begin{array}{ll}
F_1(x,t) = x_1^2 - x_2x_3, \quad F_2(x,t) = x_3^2 - x_1x_4, & F_3(x,t) = x_1x_3 - x_2x_4, \\
F_4(x,t) = x_1x_5 - (t+x_4)x_4^2x_3, & F_5(x,t) = x_2x_5 - (t+x_4)x_4^2x_1, \\
F_6(x,t) = x_3x_5 - (t+x_4)x_4^3, & F_7(x,t) = x_1x_6 - (t+x_4)^2x_4^4, \\
F_8(x,t) = x_2x_6 - (t+x_4)x_4x_1x_5, & F_9(x,t) = x_3x_6 - (t+x_4)x_4^2x_5, \\
F_{10}(x,t) = x_4x_6 - x_5^2, & F_{11}(x,t) = x_1x_7 - (t+x_4)x_3x_5^2, \\
F_{12}(x,t) = x_2x_7 - (t+x_4)x_4x_1x_6, & F_{13}(x,t) = x_3x_7 - (t+x_4)x_4^2x_6, \\
F_{14}(x,t) = x_4x_7 - x_6x_5, & F_{15}(x,t) = x_5x_7 - x_6^2.
\end{array}$$

Nous vérifions que les 40 relations entre les $F_i(x,0) = f_i$ se relèvent en des relations entre les $F_i(x,t)$.

(Par exemple, la relation $x_2f_7 - x_1f_8 - x_4^2x_5f_1 - x_4^2x_2f_6$ se relève en $x_2F_7 - x_1F_8 - x_4(x_4+t)x_5F_1 - x_4(x_4+t)x_2F_6)$.

Par conséquent le morphisme $\lambda : \mathscr{V} \to T = A_k^1$ induit par la projection de A_k^8 sur A_k^1 est plat; nous avons ainsi défini une famille plate de surfaces normales et nous considérons le germe de déformation plate de la singularité (V,p) où $V = \lambda^{-1}(0)$.

La singularité (V,p) est la singularité torique associée au cône σ et pour $t \neq 0$ assez voisin de 0, la surface $V_t = \lambda^{-1}(t)$ a un point singulier p_t et la singularité (V_t,p_t) est isomorphe à la singularité torique associée au cône σ'. La famille $\lambda : \mathscr{V} \to T$ vérifie $K^2 = K_t^2$, elle admet donc une résolution simultanée très faible $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{V}$, et nous notons $\mathscr{E}$ le diviseur exceptionnel.

$\mathscr{E}$ a deux composantes $\mathscr{E}_1$ *et* $\mathscr{E}_2$ qui induisent sur la fibre spéciale les diviseurs $E_1 = (\mathscr{E}_1)_0$ et $E_2 + E_3 = (\mathscr{E}_2)_0$ et sur la fibre générique les diviseurs $E_1' = (\mathscr{E}_1)_t$ et $E_2' = (\mathscr{E}_2)_t$. Nous vérifions alors que le diviseur $-3K_M = 2(E_1+E_2+E_3)$ est transporté par la déformation et induit sur la fibre générique le diviseur $-3K_{M_t} = 2(E_1'+E_2')$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, Algebraic construction of Brieskorn's resolutions, *J. Algebra*, 29 (1974), 330-348.

[2] A. Beauville, Foncteurs sur les anneaux artiniens. Application aux déformations verselles, Séminaire de géométrie analytique, *Astérisque*, 16 (1974), 82-104.

[3] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, *Proc. Cong. Int. Math. Nice* (1970), vol. 2, 279-284.

[4] R. Elkik, Algébrisation du module formel d'une singularité isolée, Séminaire de géométrie analytique, *Astérisque*, 16 (1974), 133-144.

[5] R. Elkik, Singularités rationnelles et déformations, *Inv. Math.*, 47 (1978), 139-147.

[6] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique III, *Publ. Math. IHES*, 11 (1961), et 17 (1963).

[7] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique IV, *Publ. Math. IHES*, 20 (1964), 24 (1964), 28 (1966), 32 (1967).

[8] G. Gonzalez-Springberg, Eventail en dimension 2 et transformé de Nash, *Pré-publication de l'E.N.S.* (1977).

[9] H. Grauert, O. Riemenschneider, Verschwindungssätze für analytische Kohomologie gruppen auf Komplexen Räumen, *Inv. Math.*, 11 (1970), 263-292.

[10] R. Hartshorne, A. Ogus, On the factoriality of local rings of small embedding codimension, *Comm. in Alg.*, 1 (1974), 415-437.

[11] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal Embedding I, *Springer Lecture Notes*, 339 (1973).

[12] S. Kleiman, Relative duality for quasicoherent sheaves, *Comp. Math.*, 41 (1980), 39-60.

[13] H. Laufer, Weak simultaneous resolution for deformations of Gorenstein surface singularities, *Proc. Symp. Pure Math.*, 40, vol. 2 (1983), 1-29.

[14] S. Lichtenbaum, M. Schlessinger, The cotangent complex of a morphism, *Trans. A.M.S.*, 128 (1967), 41-70.

[15] J. Lipman, Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Publ. Math. IHES*, 36 (1969), 195-279.

[16] J. Lipman, Double point resolutions of deformations of rational singularities, *Comp. Math.*, 38 (1979), 37-42.

[17] M. Morales, Calcul de quelques invariants des singularités des surfaces normales, Nœuds, Tresses et singularités, *Comptes rendus du séminaire tenu aux Plans-sur-Bex*, (1982), 191-203.

[18] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface, *Publ. Math. IHES*, 9 (1961), 5-22.

[19] M. Schlessinger, Functors of Artin rings, *Trans. A.M.S.*, 130 (1968), 208-222.

[20] N. Shepherd-Barron N., *Some questions on singularities in two and three dimensions*, Thesis, Math. Inst., University of Warwick, 1980.

[21] B. Teissier, Résolution simultanée I, II, Séminaire sur les singularités de surfaces, éd. Demazure et al., *Springer Lecture Notes*, 777 (1980).

[22] G. N. Tjurina, Resolution of singularities for flat deformations of rational double points, *Funk. Anal. i Pril.*, 4 (1970), 77-83.

[23] J. Wahl, Vanishing theorems for resolutions of surface singularities, *Inv. Math.*, 31 (1975), 17-41.

[24] J. Wahl, Simultaneous resolution of rational singularities, *Comp. Math.*, 38 (1979), 43-54.

[25] J. Wahl, Simultaneous resolution and discriminantal loci, *Duke Math. J.*, 46 (1979), 341-375.

[26] J. Wahl, Equisingular deformations of normal surface singularities, *Ann. Math.*, 104 (1976), 325-356.

[27] J. Wahl, Equations defining rational singularities, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 10 (1977), 231-264.

Manuscrit reçu le 7 mars 1984.

Michel Vaquie,

Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS n° 188
B.P. 74
38402 St-Martin d'Hères cedex.