ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RYUICHI ISHIMURA

Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentielles d'ordre infini

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 3 (1985), p. 49-57

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_49_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 3 (1985), 49-57

EXISTENCE LOCALE DE SOLUTIONS HOLOMORPHES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE INFINI

par Ryuichi ISHIMURA

Introduction.

Un morphisme du faisceau des germes de fonctions holomorphes est défini par un opérateur différentiel d'ordre infini s'il satisfait une condition de continuité naturelle ([3]). Par ailleurs pour transformer microlocalement un système d'équations pseudo-différentielles homogènes en un système très simple, on demande l'aide des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini (Sato-Kawai-Kashiwara [12]). Donc il est naturel de s'intéresser à une équation différentielle d'ordre infini $Pu = f$. Pour une équation d'ordre infini à coefficients constants Martineau [11] a démontré l'existence locale de solutions holomorphes (voir aussi [4]) et pour une équation pseudo-différentielle d'ordre infini Aoki [1] a montré que sous une condition de croissance du symbole un opérateur pseudo-différentiel donne un automorphisme du faisceau des germes de microfonctions. Par contre Korobeĭnik [8] a étudié une équation différentielle d'ordre infini d'une variable dans un cadre de fonctions entières.

Dans cet article on se propose d'étudier l'existence locale de solutions holomorphes d'équations différentielles d'ordre infini à coefficients variables d'un type spécial.

1. Préliminaires.

Soient X un ouvert de $\mathbf{C}^n$ contenant l'origine 0, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans X et $\mathcal{O}_0$ la

Mots-clés : Equations différentielles d'ordre infini – Existence locale des solutions.

tige de $\mathcal{O}_X$ à l'origine. $\mathcal{O}_0$ est un espace (DFS) dont le dual s'identifie avec $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$ l'espace des hyperfonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^n$ par rapport à la sous-variété $\{0\}$ (voir Kashiwara-Kawai [6], p. 953 et Sato-Kawai-Kashiwara [12]). Tout élément ϕ de $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$ est de la forme $\sum_{\mu \in \mathbf{Z}_+^n} \phi_\mu \, \delta^{(\mu)}(\xi)$ tel que la fonction $\sum_\mu \phi_\mu \, \zeta^\mu$ soit entière et du type minimal, où $\delta(\xi)$ désigne l'élément défini par $(2\pi\sqrt{-1})^{-n} \xi_1^{-1} \xi_2^{-1} \dots \xi_n^{-1}$. Pour tout $f \in \mathcal{O}_0$ en désignant par $f = \sum_\mu f_\mu \, x^\mu/\mu!$ son développement taylorien en 0, la dualité sera donnée par

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_\mu (-1)^{|\mu|} \phi_\mu \, f_\mu \, . \tag{1}$$

Soit P un endomorphisme continu de $\mathcal{O}_X$, c'est-à-dire que, d'après [3], P est un opérateur différentiel eventuellement d'ordre infini $\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ tel que la fonction $\sum_\alpha a_\alpha(x) \, \xi^\alpha \, \alpha!$ soit holomorphe pour tous $x \in X$ et $\xi \in \mathbf{C}^n$. On utilise le mot "opérateur différentiel" uniquement pour tel opérateur.

Pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, soit $\sum_\beta a_\alpha^\beta \, x^\beta$ le développement taylorien de $a_\alpha(x)$ en $x = 0$. Alors on a pour $f = \sum_\mu f_\mu \, x^\mu/\mu! \in \mathcal{O}_0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}f(x) &= \sum_\gamma a_\gamma(x) \Big(\sum_{\mu \geqslant \gamma} \frac{f_\mu}{(\mu-\gamma)!} \, x^{\mu-\gamma} \Big) \\
&= \sum_\mu \sum_{\alpha \leqslant \mu} a_{\mu-\alpha}(x) \frac{f_\mu}{\alpha!} \, x^\alpha \\
&= \sum_\mu \sum_{\alpha \leqslant \mu} \sum_\beta \frac{a_{\mu-\alpha}^\beta}{\alpha!} \, x^{\alpha+\beta} f_\mu \\
&= \sum_\nu \Big(\sum_\mu \sum_{\alpha \leqslant \nu, \mu} \frac{a_{\mu-\alpha}^{\nu-\alpha}}{\alpha!} \, f_\mu \Big) x^\nu \, .
\end{aligned}$$

Si on pose $c_\mu^\nu = \nu ! \sum_{\alpha \leqslant \nu, \mu} a_{\mu-\alpha}^{\nu-\alpha}/\alpha !$ pour tous ν et μ,

$$P = \sum_\alpha a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$$

peut s'écrire dans $\mathcal{O}_0$ sous la forme d'une "matrice" infinie $f = \sum_\mu f_\mu x^\mu/\mu ! \longmapsto g = \sum_\mu g_\mu x^\mu/\mu !$ avec $g_\nu = \sum_\mu c_\mu^\nu f_\mu$.

2. Surjectivité pour l'opérateur de Korobeĭnik.

Korobeĭnik [8] a étudié un opérateur différentiel du type suivant : $P = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}_+^n} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$ où chaque $a_\alpha(x)$ est un polynôme de la forme $\sum_{\lambda \leqslant \alpha} a_\alpha^\lambda x^\lambda$.

Remarque. – En réalité Korobeĭnik [8] a traité un opérateur un peu moins général $P = 1 + \sum_{\lambda < \alpha} a_\alpha^\lambda x^\lambda D_x^\alpha$ et étudié la résolubilité de l'équation différentielle $Pu = f$ dans un cadre de fonctions entières.

Dans ce cas la matrice infinie associée à P se réduit à une matrice "triangulaire" :

$$c_\mu^\nu = \begin{cases} \nu ! \sum_{\alpha \leqslant \nu} \dfrac{a_{\mu-\alpha}^{\nu-\alpha}}{\alpha !} & \text{pour } \nu \leqslant \mu \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Pour tel opérateur on montre le théorème suivant :

THEOREME 1. – *Pour un opérateur de Korobeĭnik* P, *supposons les conditions suivantes satisfaites :*

(2) *Il existe* $A_0 > 0$ *tel que l'on ait pour tout* μ

$$|c_\mu^\mu| \geqslant A_0 .$$

(3) *Pour tout* $R \gg 1$, *il existe* $\epsilon > 0$, $r > 0$ *et* $A > 0$ *tels que pour* $\lambda < \mu$ *on ait*

$$|c_\mu^\lambda| \leqslant A \frac{\epsilon^{|\mu-\lambda|}}{(\mu-\lambda)!} r^{|\lambda|}$$

et $\epsilon R + r < 1$.

Alors $P : \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$ *est surjectif.*

Remarque. – Notons que pour un opérateur de Korobeĭnik quelconque $P = \sum_{\lambda \leqslant \alpha} a_\alpha^\lambda x^\lambda D_x^\alpha$, on a toujours la condition suivante plus faible que (3) : Pour tout $C > 1$ il existe une fonction entière et du type minimal $G = \sum_\alpha G_\alpha \zeta^\alpha$ telle que pour $\lambda \leqslant \mu$, on ait

$$|c_\mu^\lambda| \leqslant C^{|\lambda|} G_{\mu-\lambda}.$$

Démonstration du théorème. – Puisque la matrice associée à P est triangulaire et d'après (2) chaque c_μ^μ est non nul, ${}^tP : \mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n} - \mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$ est injectif. Pour que $P : \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$ soit surjectif, il suffit de montrer que l'image ${}^tP(\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n})$ est fermée : Soit $(\phi^k)_{k \geqslant 0}$ une suite de $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$ telle que la suite $(\chi^k)_{k \geqslant 0}$ avec $\chi^k = {}^tP \phi^k$ converge vers χ dans $\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$. Si on pose pour tous k et k',

$$\phi^{kk'} = \phi^k - \phi^{k'} = \sum_\mu \phi_\mu^{kk'} \delta^{(\mu)}(\xi),$$

$$\chi^{kk'} = \chi^k - \chi^{k'} = \sum_\mu \chi_\mu^{kk'} \delta^{(\mu)}(\xi),$$

on a

$$(4) \quad \begin{cases} \phi_0^{kk'} = \dfrac{\chi_0^{kk'}}{c_0^0} \\ \phi_\mu^{kk'} = \dfrac{1}{c_\mu^\mu}\Big(\chi_\mu^{kk'} - \sum_{\lambda<\mu} (-1)^{|\mu-\lambda|} c_\mu^\lambda \phi^{kk'}\Big) \text{ pour } \mu > 0. \end{cases}$$

On montre par récurrence que pour tout $R > 0$ il existe $B^{kk'}(R) > 0$ tel que l'on ait pour tous k, k' et μ,

$$(5) \qquad |\phi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! < B^{kk'}(R)$$

et que la suite $(B^{kk'}(R))_{k,k'\geqslant 0}$ converge vers 0 lorsque k et k' tendent vers ∞ : Prenons $m \in \mathbf{Z}_+$ le plus petit tel que

$$\frac{A}{A_0}\left((\epsilon R + r)^m - r^m\right) < \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs (4), (2) et (3) nous montrent qu'on a

$$(6) \qquad |\phi_\mu^{kk'}|\, R^{|\mu|}\, \mu!$$

$$\leqslant \frac{1}{A_0}\Big(|\chi_\mu^{kk'}|\, R^{|\mu|}\, \mu! + A \sum_{\lambda<\mu} \frac{\mu!}{(\mu-\lambda)!}\, \epsilon^{|\mu-\lambda|}\, r^{|\lambda|}\, R^{|\mu|}\, |\phi_\lambda^{kk'}|\Big)$$

$$\leqslant X^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0}\sum_{\lambda<\mu} \binom{\mu}{\lambda} (\epsilon R)^{|\mu-\lambda|}\, r^{|\lambda|}\, |\phi_\lambda^{kk'}|\, R^{|\lambda|}\, \lambda!$$

où on a posé pour tout $k \geqslant 0$ et tout $R > 0$,

$$X^{kk'}(R) = A_0^{-1} \sup_\lambda |\chi_\lambda^{kk'}|\, R^{|\lambda|}\, \lambda!\,.$$

Par récurrence (3) montre que pour tout μ, il existe un polynôme $Q_\mu(x, y, z)$ de degré au plus $2^{|\mu|}$ tel que l'on ait

$$|\phi_\mu^{kk'}|\, R^{|\mu|}\, \mu! \leqslant X^{kk'}(R)\, Q_\mu\Big(\epsilon R, r, \frac{A}{A_0}\Big).$$

On prend $B^{kk'}(R) = 2\, X^{kk'}(R) \max\left[1, \max\limits_{|\mu|<m} Q_\mu\Big(\epsilon R, r, \frac{A}{A_0}\Big)\right]$,

alors bien-entendu $B^{kk'}(R)$ converge vers 0 lorsque k et k' tendent vers ∞ et pour tout μ tel que $|\mu| < m$ on a (5). Pour μ tel que $|\mu| \geqslant m$ on a d'après (6)

$$|\phi_\mu^{kk'}|\, R^{|\mu|}\, \mu! \leqslant \frac{1}{2} B^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0}\left((\epsilon R + r)^{|\mu|} - r^{|\mu|}\right) B^{kk'}(R)$$

$$< B^{kk'}(R)$$

d'où on a (5) aussi. Donc (ϕ^k) est une suite de Cauchy dans $B_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$ et par conséquent converge vers un élément $\phi \in B_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$ dans $B_{\{0\}|\mathbf{C}^n}$.

3. Bijectivité pour un opérateur du type singulier régulier.

Korobeĭnik [9] et van der Steen [14] ont étudié un opérateur du type $P = \sum_\alpha a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$ où chaque $a_\alpha(x)$ est de la forme $x^\alpha \tilde{a}_\alpha(x)$ avec une fonction holomorphe $\tilde{a}_\alpha(x)$. Ici on appellera un tel opérateur qui est un opérateur différentiel *un opérateur différentiel du type singulier régulier.*

Remarque. — [9] et [14] ont cherché une solution fonction entière.

Dans ce cas la matrice associée à P se réduit à une matrice triangulaire :

$$c_\mu^\gamma = \begin{cases} \gamma! \sum\limits_{\alpha \leqslant \mu} \dfrac{a_{\mu-\alpha}^{\gamma-\alpha}}{\alpha!} & \text{pour } \gamma \geqslant \mu \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que pour tous ϵ et $R > 0$ il existe $N > 0$ tel que pour tous γ et μ avec $\gamma \geqslant \mu$ on ait

$$|c_\mu^\gamma| \leqslant N \frac{\gamma!}{\mu!} (R^{-1} + \epsilon)^{|\mu|} \epsilon^{-|\gamma|} .$$

THEOREME 2. — *Pour un opérateur différentiel du type singulier régulier* $P = \sum\limits_\alpha a_\alpha(x)\, D_x^\alpha = \sum\limits_{\substack{\lambda \geqslant \alpha \\ \alpha}} a_\alpha^\lambda\, x^\lambda\, D_x^\alpha$ *supposons les conditions suivantes satisfaites :*

(7) *Il existe* $r > 0$ *tel que* $0 < r < 1$ *et que l'on ait pour tout* μ

$$|c_\mu^\mu| \geqslant r^{|\mu|} .$$

(8) *Pour tous* δ *et* $\epsilon > 0$ *il existe* $N_{\delta,\epsilon} > 0$ *tel que pour tous* γ *et* μ *avec* $\gamma > \mu$ *on ait*

$$|c_\mu^\gamma| \leqslant N_{\delta,\epsilon} \frac{\gamma!}{\mu!} \delta^{|\mu|} \epsilon^{-|\gamma|} .$$

Alors $P : \mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$ *est un automorphisme d'espace de Fréchet.*

Démonstration. – Soit $f = \Sigma f_\gamma x^\gamma/\gamma ! \in \mathcal{O}_0$ quelconque et on pose pour tout $\epsilon > 0$, $M_\epsilon = \sup\limits_{|x|<\epsilon} |f(x)|$. On a pour tout γ

$$|f_\gamma| \leqslant \gamma !\, M_\epsilon\, \epsilon^{-|\gamma|} . \tag{9}$$

On doit chercher $g = \sum\limits_\gamma g_\gamma x^\gamma/\gamma ! \in \mathcal{O}_0$ satisfaisant $Pg = f$, c'est-à-dire pour tout γ

$$\sum_{\mu \leqslant \gamma} c^\gamma_\mu g_\mu = f_\gamma ,$$

donc on a

$$\left\{\begin{aligned} g_0 &= \frac{f_0}{c^0_0} \\ g_\gamma &= \frac{1}{c^\gamma_\gamma}\Big(f_\gamma - \sum_{\mu<\gamma} c^\gamma_\mu g_\mu\Big) \text{ pour } \gamma > 0 . \end{aligned}\right. \tag{10}$$

On montre par récurrence qu'il existe $R > 0$ tel que l'on ait $|g_\gamma| \leqslant R^{|\gamma|}$ pour tout $\gamma \geqslant 0$: On a pour tous δ et $\epsilon > 0$ assez petits d'après (10), (9), (7) et (8) et par l'hypothèse de récurrence

$$|g_\gamma| \leqslant r^{-|\gamma|}\Big[M_\epsilon\, \epsilon^{-|\gamma|} + N_{\delta,\epsilon} \sum_{\mu<\gamma} \delta^{|\mu|}\, \epsilon^{-|\gamma|} R^{|\mu|}\Big]$$

$$= \Big[M_\epsilon (r\epsilon R)^{-|\gamma|} + N_{\delta,\epsilon} \sum_{\mu<\gamma} (r\epsilon R)^{-|\gamma-\mu|} \Big(\frac{\delta}{r\epsilon}\Big)^{|\mu|}\Big] R^{|\gamma|} .$$

Prenons $\delta > 0$ plus petit que $r\epsilon < 1$ et $R > 0$ plus grand que $\max[\delta^{-1}, 2\epsilon^{-1} M_\epsilon]$, alors on a

$$|g_\gamma| \leqslant \Big[\frac{1}{2} + N_{\delta,\epsilon} \sum_{\mu<\gamma} (r\epsilon R)^{-|\gamma-\mu|}\Big] R^{|\gamma|}$$

$$\leqslant \Big[\frac{1}{2} + N_{\delta,\epsilon} (r\epsilon R)^{-1}\, n \sum_{\nu \geqslant 0} (r\epsilon R)^{-|\nu|}\Big] R^{|\gamma|}$$

$$\leqslant \Big[\frac{1}{2} + N_{\delta,\epsilon} (r\epsilon R)^{-1}\, n \Big(\frac{1}{1-(r\epsilon R)^{-1}}\Big)^n\Big] R^{|\gamma|} .$$

En outre en choisissant $R > 0$ si grand que l'on ait

$$N_{\delta,\epsilon}(r\epsilon R)^{-1} n \left(\frac{1}{1-(r\epsilon R)^{-1}}\right)^n < \frac{1}{2}$$

qui est possible, on a $|g_\gamma| \leqslant R^{|\gamma|}$ et la récurrence s'avance.

4. Opérateur d'Euler.

Dans cette section on énonce des résultats concernant l'opérateur différentiel du type suivant sans démonstration : $P = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha D^\alpha$ avec a_α nombre complexe. Un tel opérateur sera appelé *un opérateur d'Euler.*

Dans ce cas la condition de surjectivité devient simplement (7) :

PROPOSITION – *Pour qu'un opérateur d'Euler soit surjectif :* $\mathcal{O}_0 \longrightarrow \mathcal{O}_0$ *la condition (7) est nécessaire et suffisante.*

En outre on peut montrer le théorème suivant en faisant un changement de variable du type $x_{j_1} = e^{t_{j_1}}, x_{j_2} = e^{t_{j_2}}$ $x_{j_m} = e^{t_{j_m}}$:

THEOREME 3. – *Sous la condition* (7), $P : \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n} - \mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$ *est une surjection.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. AOKI, Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini. I, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 33-4 (1983), 227-250.

[2] L. HÖRMANDER, On the range of convolution operators, *Ann. Math.,* 76 (1962), 148-170.

[3] R. ISHIMURA, Homomorphismes du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui-même et opérateurs différentiels II, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.,* 34 (1980), 131-145.

[4] R. ISHIMURA, Théorèmes d'existence et d'approximation pour les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre infini, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.,* 16 (1980), 393-415.

[5] R. ISHIMURA, Sur les équations différentielles dans l'espace des polynômes et dans l'espace des séries formelles, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.,* 37 (1983), 87-97.

[6] M. KASHIWARA and T. KAWAI, On holonomic systems of microdifferential equations III, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.,* 17 (1981), 813-979.

[7] M.G. KHAPLANOV, Linear differential equations of infinite order with analytic coefficients, *Dokl. Acad. Nauk, SSSR,* 105-6 (1955), 1162-1165.

[8] Yu. F. KOROBEĬNIK, Investigations of differential equations of infinite ordre with polynomial coefficients by means of operator equations of intergral type, *Mat. Sb.,* 49-2 (1959),191-206.

[9] Yu. F. KOROBEĬNIK, On a class of differential equations of infinite order with variable coefficient, *Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mat.,* 4 (29) (1962), 73-80.

[10] B. MALGRANGE, Existence et approximations des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 6 (1955-1956), 271-354.

[11] A. MARTINEAU, Equations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. Math. France,* 95 (1967), 109-154.

[12] M. SATO, T. KAWAI and M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Lecture notes in Math.,* 287, Springer, (1973), 263-529.

[13] M. SATO, M. KASHIWARA and T. KAWAI, Linear differential equations of infinite order and theta functions, *Adv. in Math.,* 47 (1983), 300-325.

[14] P. VAN DER STEEN, Note on a class of differential equations of infinite order, *Indag. Math.,* 33 (1971), 361-364.

Manuscrit reçu le 2 janvier 1984
révisé le 4 septembre 1984.

Ryuichi ISHIMURA,
Université du Kyushu
Département de Mathématiques
Fukuoka 812 (Japon).