

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE FRANCOISE

**Invariants analytiques des champs de vecteurs de  $\mathbb{C}^n, 0$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 35, n° 3 (1985), p. 207-214

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1985\\_\\_35\\_3\\_207\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_207_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## INVARIANTS ANALYTIQUES DES CHAMPS DE VECTEURS DE $\mathbb{C}^n, 0$

par Jean-Pierre FRANCOISE

Soit  $\chi$  l'ensemble des germes de champs de vecteurs analytiques de  $\mathbb{C}^n, 0$  qui fixent l'origine et  $\mathcal{O}$  l'anneau local des germes de fonctions analytiques de  $\mathbb{C}^n, 0$ . Choisissons une fois pour toutes un système de coordonnées analytiques  $\underline{x} = (x_i)$  de  $\mathbb{C}^n, 0$  et identifions  $\chi$  à  $\mathcal{O}^n$  en associant à un élément  $X \in \chi$  ses fonctions composantes  $f_i(\underline{x})$  par rapport aux  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Nous allons considérer un développement de Taylor  $f_i(\underline{x}) = \sum_{\alpha} f_i^{\alpha} x^{\alpha}$  comme point  $(f_i^{\alpha})$  dans un espace vectoriel  $F$ .

On fait opérer sur  $\chi$  le groupe  $\mathcal{O}_n$  des germes de difféomorphismes analytiques de  $\mathbb{C}^n, 0$  dans  $\mathbb{C}^n, 0$ .

**DEFINITION** — *Un invariant est une fonction  $A : \chi \rightarrow \mathbb{C}$  qui est constante le long des orbites de l'action de  $\mathcal{O}_n$  sur  $\chi$ .*

**DEFINITION** . — *On dit qu'un invariant est analytique s'il définit une fonction analytique sur l'espace des champs holomorphes en 0.*

Nous dirons qu'une famille d'invariants forme un *système complet* si elle permet de séparer les orbites.

J. Ecalle a proposé récemment [2] de construire des systèmes complets d'invariants analytiques avec sa méthode des *fonctions résurgentes*. Sa méthode repose sur l'utilisation du *champ réduit* que nous allons d'abord introduire.

*Mots-clés* : Singularités — Champs de vecteurs — Formes normales.

Dans la suite, nous ne considérons que les *champs génériques* de  $\mathbf{C}^n$ , 0 pour lesquels le jet d'ordre un  $j_1(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  est diagonal et les valeurs propres de  $\lambda_i$  sont toutes différentes de 0 et pour lesquels les fonctions composantes  $f_i(x)$  sont divisibles par  $x_i$ . Nous ferons opérer sur ces champs le sous-groupe  $\mathcal{O}_n^a \subset \mathcal{O}_n$  des difféomorphismes qui fixent les "axes"  $x_i = 0$ . Bien sûr, nous pourrions traiter des cas plus généraux, mais, il nous semble, sans que cela ajoute des phénomènes de nature essentiellement différente. Nous noterons  $\chi$  l'ensemble de ces champs génériques.

Notons  $M \subset \mathcal{O}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$ . Un élément  $X \in \chi$  opère sur  $\mathcal{O}$  comme dérivation et vérifie  $X.M \subset M$ . Il donne ainsi par troncation des opérateurs linéaires  $X_k : \mathcal{O}/M^k \rightarrow \mathcal{O}/M^k$ . A chacun de ces endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut associer une décomposition commutative de Jordan :

$$X_k = X'_k + X''_k, [X'_k, X''_k] = 0$$

en une partie semi-simple et une partie nilpotente. Ces décompositions sont compatibles et on obtient à la limite  $k \rightarrow \infty$  une décomposition de  $X$  lui-même  $X = X' + X''$ ,  $[X', X''] = 0$  en deux champs à coefficients dans  $\hat{\mathcal{O}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{O}/M^k$  que l'on appelle décomposition en semi-simple et nilpotent.

La partie semi-simple d'un champ  $X$ , élément de  $\chi$ , peut être formellement conjuguée à  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . De plus, il ne peut exister de champ formel non linéaire  $X''$  qui commute à  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  que si les valeurs propres ont des *résonances*, c'est-à-dire qu'il existe des relations  $\sum_{i=1}^n \lambda_i m_i = 0$ ,  $m_i \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$ . Les monômes  $x^m (= x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n})$  invariants par  $\sum \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  correspondent à des multi-entiers  $m$  tels que  $\langle \lambda, m \rangle = 0$ . Soit  $m^1, \dots, m^\mu$  une partie génératrice du module des relations  $\langle \lambda, m \rangle = 0$ . Soit  $y$  un système de coordonnées dans lequel  $X'$  est linéaire, nous dirons que, dans un tel système,  $X$  est dans une forme *normale*, et nous considérons les monômes  $y^{m^1}, \dots, y^{m^\mu}$ .

A cause précisément des résonances, il n'y a pas unicité des systèmes de coordonnées linéarisant  $X'$ , mais l'anneau  $R = \mathbb{C}[[y^{m_1}, \dots, y^{m_\mu}]]$  lui est uniquement défini.

L'action de  $X$  sur cet anneau  $R$  détermine une dérivation de  $R$  que l'on appelle le *champ réduit* de  $X$ .

Soit  $X_0 \in \chi$  un champ dans une forme normale :

$$X_0 = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{\psi}_i(y^{m_1}, \dots, y^{m_\mu}) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

DEFINITION. — On dit que  $X_0$  vérifie la condition  $(\bar{A})$  si il existe :

(i) un ensemble de multi-indices  $P$  tel que

$$p, p' \in P \implies p - p' \notin \sum_{i=1}^{\mu} \mathbb{Z} m^i;$$

(ii) une suite  $\alpha_k, \alpha_k \in P, |\alpha_k| \longrightarrow \infty$ , de multi-indices pour laquelle  $\frac{\langle \alpha_k, \lambda \rangle}{\|\alpha_k\|} \longrightarrow 0$ ;

(iii) un coefficient de  $\frac{\langle \alpha_k, \tilde{\psi} \rangle}{\|\alpha_k\|}$  ne tend pas vers zéro.

THEOREME. — Soit  $X_0$  un élément de  $\chi$  qui est une forme normale dans le système  $\underline{x}$ , dont le champ réduit associé est nul, et qui satisfait la condition  $(A)$ . Il ne peut exister d'invariants analytiques formant un système complet au voisinage de  $X_0$ .

Avant d'entamer la preuve, il faut remarquer que la nullité du champ réduit se produit souvent dans la pratique.

Un champ  $X$  qui conserve le volume  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  a des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  reliées par la résonance "trace nulle"  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ . Si l'on fait l'hypothèse qu'il n'existe pas d'autres résonances (situation bien sûr générique), la forme

normale de  $X$  s'écrit  $X = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$  avec  $t = y_1 \dots y_n$ .

Le fait de conserver le volume implique la relation  $\sum_{i=1}^n \psi_i(t) = 0$  ce qui signifie que le *champ réduit* est nul [3].

Les champs *hamiltoniens* dans  $C^{2m}, 0$  dont les valeurs propres se répartissent en paires reliées par  $\lambda_{j+m} = -\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , et tels qu'il n'existe pas de relations sur  $\mathbf{Z}$  entre les  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , donnent un autre exemple plus classique.

Soient  $(E_1, \dots, E_s)$  une  $\mathbf{Q}$ -base de l'espace des champs  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  qui satisfont  $\langle \lambda, m^1 \rangle = \dots = \langle \lambda, m^\mu \rangle = 0$ .

Soit  $m^1, \dots, m^\mu$  un système générateur des résonances du champ  $X_0$ ; l'hypothèse que  $X_0$  ait un champ réduit nul équivaut à dire que  $X_0$  conserve  $x^{m^1}, \dots, x^{m^\mu}$ . Choisissons  $s$  champs  $E_1, \dots, E_j, \dots, E_s$  comme indiqué ci-dessus, alors,  $X_0$  s'écrit :

$$X_0 = \sum_{j=1}^s \psi_j(x^{m^1}, \dots, x^{m^\mu}) E_j.$$

Supposons qu'il existe un invariant analytique  $A$  au voisinage de  $X_0$ . Nous choisissons sur  $F$  un système de coordonnées centrées en  $X_0$  et nous restreignons l'invariant à un sous-espace  $F' \subset F$  que nous allons préciser ci-dessous. Nous noterons encore  $A$  cette restriction.

Nous choisissons pour  $F'$  l'espace vectoriel des champs qui s'expriment comme combinaison des  $E_j (j = 1, \dots, s)$ , et donc qui conservent les  $x^{m^1}, \dots, x^{m^\mu}$  et tels que les composantes  $f_j(\underline{x}) \in \mathbf{M}^2$  sur les  $s E_j$ ,  $Y = \sum_{j=1}^s f_j(\underline{x}) E_j$  ne comprennent aucun élément de  $\mathbf{R}$  dans leurs développements de Taylor.

Considérons une famille à un paramètre  $X_0 + \epsilon Y$ ,  $Y \in F'$ ,  $\epsilon \in \mathbf{C}, 0$ , et écrivons  $A(X_0 + \epsilon Y) = A(X_0) + \epsilon^m A_m(Y) + O(\epsilon^{m+1})$ , où  $A_m$  est le premier polynôme homogène non identiquement nul du développement en  $\epsilon$  de  $A$  lorsque  $Y$  varie dans  $F'$ .

LEMME. —  $A_m(Y) = 0$  pour tout  $Y = \sum_{j=1}^s f_j(\underline{x}) E_j$  pour lesquels il existe des fonctions analytiques  $g_j(\underline{x})$  telles que  $f_j = X_0 \cdot g_j$ .

Supposons dans un premier temps que  $Y = \sum_{j=1}^s f_j(\underline{x}) E_j$ , et

qu'il existe des fonctions analytiques  $g_j(\underline{x}, \epsilon)$  telles que

$$f_j(\underline{x}) = (X_0 + \epsilon Y) \cdot g_j(\underline{x}, \epsilon),$$

alors,  $X_0 + \epsilon Y$  est analytiquement conjugué à  $X_0$  et donc  $A(X_0 + \epsilon Y) \equiv 0$  et  $A_m(Y) \equiv 0$ .

En effet, commençons par déployer le champ  $X_0 + \epsilon Y$  sur la base  $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ :

$$X_0 + \epsilon Y = \sum_{i=1}^n (\tilde{\psi}_i(x^{m^1}, \dots, x^{m^\mu}) + \epsilon \tilde{f}_i(\underline{x})) x_i \frac{\partial}{\partial x_i};$$

les fonctions composantes vérifient :

$$\begin{aligned} \langle m^1, \tilde{\psi} + \epsilon \tilde{f} \rangle &= \sum_{i=1}^n m_i^1 (\tilde{\psi}_i + \epsilon \tilde{f}_i) = 0 \\ &\vdots \\ \langle m^\mu, \tilde{\psi} + \epsilon \tilde{f} \rangle &= \sum_{i=1}^n m_i^\mu (\tilde{\psi}_i + \epsilon \tilde{f}_i) = 0. \end{aligned}$$

Par hypothèse, il existe des fonctions  $\tilde{g}_i$  telles que :

$$\tilde{f}_i = (X_0 + \epsilon Y) \cdot \tilde{g}_i, i = 1, \dots, n,$$

et qui vérifient :

$$\langle m^1, \tilde{g} \rangle = \dots = \langle m^\mu, \tilde{g} \rangle = 0. \quad (1)$$

On fait alors le changement de coordonnées

$$x_i \mapsto x'_i = x_i \exp(-\epsilon \tilde{g}_i).$$

Calculons  $X_0 + \epsilon Y$  dans ce nouveau système de coordonnées :

$$\begin{aligned} (X_0 + \epsilon Y) \cdot x'_i &= (X_0 + \epsilon Y) \cdot x_i \exp(-\epsilon \tilde{g}_i) \\ &\quad - \epsilon x_i \exp(-\epsilon \tilde{g}_i) (X_0 + \epsilon Y) \cdot \tilde{g}_i \\ &= \tilde{\psi}_i(x^{m^1}, \dots, x^{m^\mu}) x'_i. \end{aligned}$$

Maintenant, par (1), il vient

$$\begin{aligned}
 x'^{m^1} &= x'^{m^1} \exp - \langle m^1, \widetilde{g} \rangle = x'^{m^1} \\
 &\vdots \\
 x'^{m^\mu} &= x'^{m^\mu} \exp - \langle m^\mu, \widetilde{g} \rangle = x'^{m^\mu} ;
 \end{aligned}$$

et donc

$$(X_0 + \epsilon Y) \cdot x'_i = \psi_i(x'^{m^1}, \dots, x'^{m^\mu}) x'_i,$$

ce qui démontre que  $X_0 + \epsilon Y$  est analytiquement conjugué à  $X_0$ .

Démontrons maintenant le lemme. Soit donc

$$Y = \sum_{j=1}^s f_j(\underline{x}) E_j \text{ et } X_0 = \sum_{j=1}^s \psi_j(x'^{m^1}, \dots, x'^{m^\mu}) E_j,$$

et nous supposons qu'il existe des  $g_j \in \mathcal{O}$  tels que  $f_j(\underline{x}) = X_0 \cdot g_j(\underline{x})$ .

Dans ce cas, par le théorème des fonctions implicites, nous pouvons construire des  $a_j(\underline{x}, \epsilon) \in \mathcal{O}\{\epsilon\}$  tels que :

$$a_j(\underline{x}, 0) = f_j(\underline{x})$$

et

$$a_j(\underline{x}, \epsilon) = \left( X_0 + \epsilon \sum_{\ell=1}^s a_\ell(\underline{x}, \epsilon) E_\ell \right) \cdot g_j(\underline{x}).$$

Comme nous l'avons précédemment remarqué,  $X_0 + \epsilon \sum_{j=1}^s (a_j(\underline{x}, \epsilon) E_j)$  est alors analytiquement conjugué à  $X_0$ . Nous pouvons écrire ce champ

$$X_0 + \epsilon Y + \epsilon^2 Z(\epsilon),$$

et ainsi,  $A(X_0 + \epsilon Y + \epsilon^2 Z(\epsilon)) - A(X_0)$  est nul identiquement en  $\epsilon$ .

Comme  $A(X_0 + \epsilon Y + \epsilon^2 Z(\epsilon)) = A(X_0) + \epsilon^m A_m(Y) + \epsilon^{m+1}(\dots)$ , on trouve que  $A_m(Y) = 0$ .  $\square$

Nous allons démontrer le théorème en prouvant :

(i) que la restriction d'un invariant à  $F'$  doit être nulle.

(ii) qu'il existe dans n'importe quel voisinage de  $X_0$  dans  $F'$  des champs non analytiquement conjugués à  $X_0$ .

(i) se déduit facilement du lemme. En effet, d'après ce lemme, pour tout champ  $Y \in F'$  dont le développement de Taylor en  $\underline{x}$  comporte un nombre fini de termes, nous avons  $A_m(Y) = 0$

car il suffit dans ce cas de prendre, si  $f_j(\underline{x}) = \sum_{|\alpha| \leq N} f_j^\alpha x^\alpha$ ,

$$g_j(\underline{x}) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{f_j^\alpha x^\alpha}{\langle \alpha, \tilde{\psi} \rangle}.$$

De tels champs sont denses dans  $F'$  et comme  $A_m$  est continue,  $A_m$  est identiquement nulle sur  $F'$  et donc  $A \equiv 0$  sur  $F'$ .

Soit  $\alpha_k$  une suite qui satisfait la condition  $(\bar{A})$ . Il faut voir qu'il existe une racine de l'équation  $\langle \alpha_k, \tilde{\psi} \rangle = 0$  qui tend vers zéro.

En effet, la famille  $\frac{\langle \alpha_k, \tilde{\psi} \rangle}{\|\alpha_k\|}$  est normale ; on peut en extraire une sous-famille qui converge vers une fonction holomorphe limite non nulle. Cette fonction limite doit s'annuler en  $\{0\}$  et donc les fonctions  $\langle \alpha_k, \tilde{\psi} \rangle$  doivent avoir un zéro dans le voisinage.

Un champ  $X_0 + \epsilon Y$ , avec  $Y = \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha \in P} f_j^\alpha x^\alpha E_j$ , ne peut alors être analytiquement conjugué à  $X_0$  pour tout  $\epsilon \rightarrow 0$ , car on trouve

$$g_j(x) = \sum_{j=1}^{n-\mu} \sum_k \frac{f_j^{\alpha_k} x^{\alpha_k}}{\langle \alpha_k, \tilde{\psi} \rangle}$$

et donc le rayon de convergence des  $g_j(\underline{x})$  est inférieur à la distance du premier zéro de  $\langle \alpha, \tilde{\psi} \rangle = 0$  à l'origine. Toutes les conjugaisons formelles à la forme normale sont alors divergentes selon un argument général de Brjuno [1] qui est aussi établi différemment pour les champs isochores dans [3]. On démontre ainsi le théorème énoncé.

En considérant les réduites rationnelles successives des quotients des valeurs propres prises deux à deux, on voit que la condition  $\bar{A}$  équivaut à la condition  $A$  de Martinet dans [4].

L'auteur exprime toute sa reconnaissance à B. Malgrange pour ses remarques qui permirent de préciser la rédaction.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.D. BRJUNO , Analytical form of differential equations, *Trudy Moskov Math. Obsc.*, Tom. 25 (1971) ; *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 25 (1971), 131-287.
- [2] J. ECALLE, Fonctions résurgentes, *Publ. Math. d'Orsay*, tome 3 (en préparation).
- [3] J.-P. FRANCOISE, Singularités de champs isochores, *Duke Mathematical Journal*, 67, n° 3 (1980), 665-685.
- [4] J. MARTINET, Exposé n° 564, Séminaire Bourkabi 1980-1981, *Lecture Notes in Math.*, n° 901.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1983  
révisé le 15 mars 1985.

Jean-Pierre FRANCOISE,  
L. P. 13 du CNRS  
Topologie différentielle  
Université Paris – Sud  
Mathématiques  
91405 Orsay Cedex.