

ANNE BERTRAND-MATHIS

**Applications de la notion d'entropie au développement
d'un nombre réel dans une base de Pisot**

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 3 (1985), p. 1-32

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_1_0

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DE LA NOTION D'ENTROPIE AU DÉVELOPPEMENT D'UN NOMBRE RÉEL DANS UNE BASE DE PISOT

par

Anne BERTRAND-MATHIS

1. Rappels et notations.

Etant donné un nombre réel y , nous désignerons par $[y]$ et $\{y\}$ les parties entières et fractionnaires de y ; $\|y\|$ désignera la distance de y à l'entier le plus proche.

Convergence modulo un

Soit $\mathbf{T}$ le tore et soit u un point de $\mathbf{T}$; nous dirons qu'une série réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ converge modulo un vers u si

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left\| \left(\sum_{k=-m}^n u_k \right) - u \right\| = 0$$

et nous écrirons alors

$$\sum_{\substack{k \in \mathbf{Z} \\ \text{mod. } 1}} u_k = u.$$

Nous ferons la même convention en ce qui concerne le tore à plusieurs dimensions.

Mesure associée à une suite (nous entendrons par mesure une mesure borélienne de masse 1).

Etant donné un espace métrique E et une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sur E , nous dirons que la mesure μ est associée à la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ suivant l'ensemble S s'il existe un sous-ensemble infini S de $\mathbf{N}$ tel que pour toute fonction continue f sur E

Mots-clés : Bruit – Entropie – Nombres de Pisot – Répartition modulo un –
Théorie des nombres – Théorie ergodique.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in S}} \frac{1}{n} [f(u_1) + \dots + f(u_n)] = \mu(f)$$

et nous dirons que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est μ -répartie si l'on peut prendre $S = \mathbb{N}$. Lorsque E est un tore nous dirons qu'une suite est équirépartie si elle est répartie selon la mesure de Lebesgue.

Processus

Nous entendrons par processus la donnée d'un espace métrique relativement compact E , d'une mesure μ et d'une transformation T conservant la mesure.

Processus disjoints

Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques compacts ; soit $E = E_1 \times E_2$. Etant donné deux fonctions réelles continues f et g sur E_1 et E_2 , posons

$$f \otimes g(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2).$$

L'espace vectoriel engendré par les fonctions $f \otimes g$ est dense au sens de la convergence uniforme dans l'ensemble des fonctions continues sur $E_1 \times E_2$ de sorte que l'on peut définir une mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $E_1 \times E_2$ par

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (f \otimes g) = \mu_1(f) \mu_2(g).$$

Etant donné une mesure μ sur $E_1 \otimes E_2$ nous appellerons $\mu_{|1}$ et $\mu_{|2}$ les mesures sur E_1 et E_2 respectivement définies par :

$$\mu_{|1} (f) = \mu(f \otimes 1)$$

$$\mu_{|2} (g) = \mu(1 \otimes g).$$

Nous dirons que deux processus (E_1, ν, T_1) et (E_2, τ, T_2) sont disjoints si pour toute mesure μ définissant un processus $(E_1 \times E_2, \mu, T_1 \times T_2)$ vérifiant

$$\mu_{|1} = \nu$$

$$\mu_{|2} = \tau$$

alors :

$$\mu = \nu \otimes \tau.$$

Entropie

Soit E un espace métrique, soit T une application mesurable de E dans E ; étant donné deux partitions $P = (P_1, \dots, P_k)$ et $Q = (Q_1, \dots, Q_k)$ de E , nous désignerons par $P \vee Q$ la partition dont les atomes sont ceux des $P_i \cap Q_j$ qui sont non vides. Nous noterons $T^{-n}P$ la partition $(T^{-n}P_1, \dots, T^{-n}P_k)$.

Etant donné une mesure μ conservant T , nous appellerons entropie de μ relative à T le nombre

$$h_\mu(T) = \sup \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \left(\sum_{A_i \in T^{-n}P \vee \dots \vee T^{-1}P \vee P} \mu(A_i) \log \mu(A_i) \right)$$

où le $\sup$ est pris sur l'ensemble des partitions finies de E .

Nous adopterons les usages et notations classiques (Walters [13], Parry [7], Smorodinsky [12] en ce qui concerne l'entropie.

DEFINITION 1. — *Etant donné un espace métrique relativement compact E , une transformation mesurable T et un point x de E , nous appellerons entropie supérieure (resp. inférieure) de x relativement à T la borne supérieure $\bar{h}(x, T)$ (resp. la borne inférieure $\underline{h}(x, T)$) de l'ensemble des entropies des mesures T -invariantes associées à la suite $(T^n x)_{n \geq 0}$.*

Nous dirons que x admet une entropie $h(x, T) = \bar{h}(x, T)$ lorsque $\bar{h}(x, T) = \underline{h}(x, T)$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur T nous écrirons simplement $h(x)$.

Fonction de sélection

Nous appellerons fonction de sélection une fonction strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$; soit E un ensemble $\alpha = (\alpha(n))_{n \geq 0}$ une suite sur E ; la sous-suite de α sélectionnée par τ est la suite sur E $\alpha \circ \tau$ définies par $\alpha \circ \tau(i) = \alpha(\tau(i))$.

Nous parlerons indifféremment de suite sur E ou d'élément de $E^{\mathbf{N}}$.

Notons θ_τ la suite sur $\{0, 1\}$: $\theta_\tau(i) = 1$ si $i \in \tau(\mathbf{N})$, $\theta_\tau(i) = 0$ sinon.

Nous dirons que la fonction de sélection τ est déterministe si l'entropie supérieure de l'élément θ_τ de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ relativement au shift T est nulle.

Le θ -shift

Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1 ; tout nombre réel x s'écrit de façon unique ([11]) sous la forme

$$x = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{\theta} + \frac{\epsilon_2}{\theta^2} + \dots + \frac{\epsilon_n}{\theta^n} + \dots$$

où la suite $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ est définie par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= [x] & \Omega_0 &= \{x\} \\ \epsilon_{n+1} &= [\theta \Omega_n] & \Omega_{n+1} &= \{\theta \Omega_n\} \end{aligned} \quad (1)$$

Lorsque n est strictement positif les chiffres ϵ_n appartiennent à l'ensemble $A = \{m \in \mathbf{N} ; 0 \leq m < \theta\}$.

Nous dirons que la suite $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ est le θ -développement de x . Les conditions (1) équivalent à la condition (2) :

$$\text{pour tout } n \quad \frac{\epsilon_{n+1}}{\theta^{n+1}} + \frac{\epsilon_{n+2}}{\theta^{n+2}} + \dots < \frac{1}{\theta^n}. \quad (2)$$

Lorsque θ est un nombre de Pisot θ est un β -nombre au sens de Parry ([2], [7]) et il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ périodique après un certain rang, dite suite caractéristique de θ , et un nombre strictement positif f tels que d'une part $(\epsilon_n)_{n \geq 0}$ est un θ -développement si et seulement si pour tout $n \geq 1$, pour l'ordre lexicographique sur $A^{\mathbf{N}}$

$$(\epsilon_n \epsilon_{n+1} \dots) < (a_1 a_2)$$

et d'autre part, étant donné les développements $(\epsilon_0 \epsilon_1 \dots)$ et $(\epsilon'_0 \epsilon'_1 \dots)$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \dots \epsilon_n \neq \epsilon'_1 \dots \epsilon'_n \Rightarrow & \left| \left(\frac{\epsilon_1}{\theta} + \frac{\epsilon_2}{\theta^2} + \dots + \frac{\epsilon_{n+1}}{\theta^{n+1}} + \dots \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\epsilon'_1}{\theta} + \frac{\epsilon'_2}{\theta^2} + \dots + \frac{\epsilon'_{n+1}}{\theta^{n+1}} + \dots \right) \right| > \frac{f}{\theta^n} \end{aligned} \quad (3)$$

sauf s'il existe s tel que

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \dots \epsilon_{s-1} &= \epsilon'_1 \dots \epsilon'_{s-1} \\ \epsilon_s &= \epsilon'_s + 1 \\ \epsilon_{s+1} \dots \epsilon_m &= 0 \dots 0 \\ \epsilon'_{s+1} \dots \epsilon'_n &= a_1 a_2 \dots a_{n-s} \end{aligned}$$

auquel cas l'inégalité suivante a lieu :

$$\left| \left(\frac{\epsilon_1}{\theta} + \frac{\epsilon_2}{\theta^2} + \dots \right) - \left(\frac{\epsilon'_1}{\theta} + \frac{\epsilon'_2}{\theta^2} + \dots \right) \right| < \frac{1}{\theta^n}.$$

Nous appellerons X le sous-ensemble de A^{N^*} formé par les suites $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ telles que pour tout k

$$\epsilon_k \epsilon_{k+1} \dots < a_1 a_2 \dots$$

et $\bar{X}$ le sous-ensemble de A^Z dont les éléments possèdent la même propriété. Les nombres de $[0, 1[$ admettent donc pour θ développements les suites de la forme $(0, \epsilon_1 \epsilon_2 \dots)$ où $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ appartient à X .

Munissons A de la métrique discrète, A^{N^*} et A^Z de la topologie produit ; X et $\bar{X}$ sont des sous-espaces de A^{N^*} et A^Z respectivement et les cylindres

$$[b_1 \dots b_k]^2 = \{\epsilon \in X \text{ (resp. } \bar{X}) ; \epsilon_{l+1} \dots \epsilon_{l+k} = b_1 \dots b_k\}$$

forment une base d'ouverts de X (resp. $\bar{X}$).

Nous noterons T le shift sur X ou $\bar{X}$:

$$T \epsilon = \epsilon' \text{ où } \epsilon'_n = \epsilon_{n+1}.$$

Nous noterons d'ailleurs T toutes les transformations, sans que cela prête à confusion.

Etant donné ϵ appartenant à X , nous appellerons $\bar{\epsilon}$ la suite de $\bar{X}$ telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \bar{\epsilon}_n = \epsilon_n$$

$$\forall n \leq 0 \quad \bar{\epsilon}_n = 0.$$

Etant donné une mesure p sur X , nous noterons $\bar{p}$ son extension naturelle à $\bar{X}$.

Soit P la bijection de $[0, 1[$ dans X qui à un nombre réel x admettant pour θ -développement $(0, \epsilon_1 \epsilon_2 \dots)$ associe $\epsilon = (\epsilon_n)_{n \geq 1}$, et soit $\bar{P}$ l'application de $[0, 1[$ dans $\bar{X}$ qui au même nombre x associe $\bar{\epsilon}$.

Soit T l'application de $[0, 1[$ dans lui-même qui à x associe $\{\theta x\}$: avec les notations ci-dessus :

$$T^n x = \frac{\epsilon_{n+1}}{\theta} + \frac{\epsilon_{n+2}}{\theta^2} + \dots$$

et $T \circ P = P \circ T$; par contre T ne commute pas à $\bar{P}$.

Il existe ([11]) une unique mesure borélienne de masse 1 T -invariante $\dot{\mu}_\theta$ sur $[0, 1[$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ; soit μ_θ son image par l'application $P : \mu_\theta$ est T invariante et nous appellerons θ -shift unilatéral le processus (X, T, μ_θ) ; nous appellerons θ -shift bilatéral le processus $(\bar{X}, T, \bar{\mu}_\theta)$.

DEFINITION 2. — Nous appellerons $N(\theta)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $(T^n x)_{n \geq 0}$ de $[0, 1[$ soit répartie selon la mesure de Rényi $\dot{\mu}_\theta$.

Nous supposons désormais que θ est un nombre de Pisot de degré s vérifiant l'équation

$$\theta^s = b_s \theta^{s-1} + \dots + b_2 \theta + b_1.$$

Nous avons montré ([2]) que lorsque $\eta = (\eta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $\bar{X}$ la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \eta_n \theta^{-n}$ converge modulo un et que l'application de X dans le tore T :

$$q(\eta) = \sum_{\substack{\text{mod. } 1 \\ n \in \mathbb{Z}}} \eta_n \theta^{-n}$$

est uniformément continue et commute à T .

Il s'ensuit que si la suite $(T^m \epsilon)_{m \geq 0}$ admet une mesure sur X associée à μ , la suite $(q(T^m \epsilon))_{m \geq 0}$ admet pour associée la mesure image $q(\mu)$.

D'autre part, lorsque x admet la suite $\epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \dots$ pour θ -développement, alors

$$x \theta^n = q(T^n \bar{\epsilon}) \text{ mod. } 1.$$

Soit T^s le tore de dimension s , et soit T l'application du tore T^s dans lui-même :

$$T(x_1 \dots x_s) = (x_2, x_3, \dots, x_s, b_1 x_1 + \dots + b_s x_s).$$

Soit q_s l'application de X dans T^s :

$$q_s(\eta) = (q(\eta), q(T\eta), \dots, q(T^{s-1} \eta))$$

est encore continue, commute à T et si $\epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2 \dots$ est le développement de x

$$q_s(\bar{\epsilon}) = (x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1}) \bmod 1.$$

Et comme ci-dessus lorsque la suite $(T^n \epsilon)_{n \geq 0}$ admet une mesure associée μ , la mesure image $q_s(\mu)$ est associée à la suite $q_s(\epsilon)$.

Nous avons montré ([2]) que toute mesure T invariante sur le tore $\mathbf{T}^s$ est image par l'application q_s d'une mesure T invariante sur $\bar{X}$ et qu'il existe un nombre réel x tel que la suite $(x \theta^n \dots x \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$ soit ν -répartie dans le tore.

Nous désignerons par $\mathbf{Z}[\theta]$ l'ensemble des nombres réels de la forme :

$$\{c_0 + c_1 \theta + \dots + c_{s-1} \theta^{s-1} ; c_0, \dots, c_{s-1} \in \mathbf{Z}\}$$

et par $\mathbf{Q}(\theta)$ son corps de fractions.

2. Enoncé des résultats.

Dans tout ce paragraphe, θ désigne un nombre de Pisot de degré s vérifiant

$$\theta^s = b_s \theta^{s-1} + \dots + b_1$$

et nous munirons le tore $\mathbf{T}^s$ de la transformation T_s :

$$T_s(x_1 \dots x_s) = (x_2 \dots x_s, b_1 x_1 + \dots + b_s x_s),$$

$\mathbf{Q}(\theta)$ désignera le corps des nombres de θ .

THEOREME 1. — Soit μ une mesure sur X , d'entropie $h_T(\mu)$ par rapport au shift ; alors l'entropie de la mesure $q_s(\mu)$ par rapport à l'application T_s est encore égale à $h_T(\mu)$.

DEFINITION et PROPOSITION 2. — Soient x un nombre réel, $(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots)$ son développement en base θ , $\epsilon = (\epsilon_1 \epsilon_2 \dots)$. Alors les entropies supérieures du point ϵ relativement à $(X; T)$ et du point $(x, x\theta, \dots, x\theta^{n+s-1})$ relativement au tore $\mathbf{T}^s$ muni de l'application T_s sont égales et nous appellerons entropie supérieure du nombre réel x relativement à la base θ leur valeur commune $\bar{h}(x, \theta)$.

Nous définirons de même l'entropie inférieure et, si elle existe, l'entropie du nombre x .

PROPOSITION 3. — Soit x un nombre réel, soit α un nombre non nul du corps de θ

$$\overline{h}(x, \theta) = \overline{h}(\alpha x, \theta)$$

$$\underline{h}(x, \theta) = \underline{h}(\alpha x, \theta)$$

et lorsque $h(x, \theta)$, $h(\alpha x, \theta)$ existe aussi et :

$$h(x, \theta) = h(\alpha x, \theta).$$

PROPOSITION 4. — Soit x un nombre réel, et soit m un entier strictement positif. Alors

$$\overline{h}(x, \theta^m) = m \overline{h}(x, \theta).$$

La même égalité vaut pour $\underline{h}$ et h éventuellement.

COROLLAIRE et DEFINITION 5. — Soient θ et β deux nombres de Pisot vérifiant

$$\theta^r = \beta^t$$

où r et t sont des entiers strictement positifs (nous dirons que θ et β sont équivalents). Alors :

$$\frac{\overline{h}(x, \theta)}{\text{Log } \theta} = \frac{\overline{h}(x, \beta)}{\text{Log } \beta}$$

et nous appellerons bruit supérieur du nombre x dans la base θ le nombre

$$\overline{b}(x) = \frac{\overline{h}(x, \theta)}{\log \theta}.$$

Il en est de même pour $\frac{h(x, \theta)}{\log \theta}$ et $\frac{h(x, \theta)}{\log \theta}$ que nous appellerons bruit inférieur et bruit de x .

Cette définition du bruit diffère légèrement du bruit défini par Rauzy [10] mais recouvre la même notion.

PROPOSITION 6. — Soit G un groupe compact et soit T un homomorphisme continu du groupe G .

Alors étant donné deux points u et v de G :

$$\overline{h}(u) - \overline{h}(v) \leq \overline{h}(u + v) \leq \overline{h}(u) + \overline{h}(v) ;$$

$$\underline{h}(u) - \underline{h}(v) \leq \underline{h}(u + v) \leq \underline{h}(u) + \underline{h}(v) .$$

En particulier si $h(\omega) = 0$ (nous dirons alors que ω est un élément déterministe de G)

$$\overline{h}(u + \omega) = \overline{h}(u) \quad \underline{h}(u + \omega) = \underline{h}(u)$$

et lorsque $h(u)$ existe, alors $h(u + \omega)$ existe et est égal à $h(u)$.

DEFINITION 3. — Nous dirons qu'un nombre est déterministe en base θ si :

$$\overline{h}(x, \theta) = h(x, \theta) = 0 .$$

Nous désignerons par $D(\theta)$ l'ensemble de ces nombres.

COROLLAIRE 7. — Soit x un nombre réel ; posons $h(x) = h(x, \theta)$. Alors :

$$\overline{h}(x) - \overline{h}(y) \leq \overline{h}(x + y) \leq \overline{h}(x) + \overline{h}(y)$$

$$\underline{h}(x) - \underline{h}(y) \leq \underline{h}(x + y) \leq \underline{h}(x) + \underline{h}(y)$$

et si z appartient à $D(\theta)$:

$$\overline{h}(x + z) = \overline{h}(x)$$

$$\underline{h}(x + z) = \underline{h}(x)$$

de plus lorsque x possède une entropie, $x + z$ en possède une aussi.

PROPOSITION 8. — $D(\theta)$ est un $\mathbf{Q}(\theta)$ -sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ contenant $\mathbf{Q}(\theta)$ et pour tout entier positif m :

$$D(\theta^m) = D(\theta) .$$

PROPOSITION 9. — Soit θ un nombre de Pisot de degré s ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $x \in \mathbf{N}(\theta)$

2) $h(x) = \log \theta$

3) la suite $(x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$ est équirépartie modulo un.

De plus lorsque β et θ sont deux nombres de Pisot équivalents

$$N(\theta) = N(\beta)$$

et pour tout nombre α non nul de $\mathbf{Q}(\theta)$ et tout nombre γ de $\mathbf{Q}(\theta)$:

$$\alpha N(\theta) + \gamma = N(\theta).$$

PROPOSITION 10. — Soit $N(\theta)^\perp$ l'ensemble des nombres réels tels que

$$x \in N(\theta) \quad y \in N^\perp(\theta) \Rightarrow x + y \in N(\theta)$$

alors

$$N^\perp(\theta) = D(\theta).$$

Ceci est une généralisation d'un théorème dû à Rauzy ([10]).

PROPOSITION 11. — Soit τ une fonction de sélection vérifiant

$$\sup \frac{\tau(n)}{n} < \infty.$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) la fonction de sélection τ est déterministe,
- 2) pour tout nombre réel x appartenant à $N(\theta)$ la suite $(x \theta^{\tau(n)}, x \theta^{\tau(n)+1}, \dots, x \theta^{\tau(n)+s-1})_{n \geq 0}$ est équirépartie dans le tore $\mathbf{T}^s$.

Cette proposition généralise un résultat de Kamae ([5]).

Le résultat suivant s'inspire d'un résultat de M. Bernay [1] :

PROPOSITION 12. — Soit θ un nombre strictement supérieur à 1 (pas nécessairement un nombre de Pisot). Alors

- 1) la dimension de Hausdorff de $D(\theta)$ est nulle.
- 2) Etant donné $\lambda \in [0, 1]$, soit $H(\theta, \lambda)$ l'ensemble des nombres dont l'entropie en base θ existe et est égale à $\lambda \log \theta$; alors la dimension de Hausdorff de $H(\theta, \lambda) \cap [0, 1]$ est supérieure ou égale à λ .

3. Démonstrations.

Preuve de la proposition 1. — Cette proposition est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 1. — Soit θ un nombre de Pisot de degré s ; il existe deux nombres réels positifs c et s et un nombre entier n_0 tels que pour toute partition P du tore T^s en cubes de côté inférieur à c , pour tout $n \geq n_0$, pour tout atome A de la partition $P \vee T^{-1}P \vee \dots \vee T^{-n}P$:

$$\sum 1 \leq s$$

où la somme est prise sur l'ensemble des cylindres $B = [\epsilon_1 \dots \epsilon_n]^0$ tels que

$$q_s(B) \cap A \neq \emptyset.$$

Soient $\alpha_2 \dots \alpha_s$ les conjugués de θ distincts de θ , qui sont donc de module strictement inférieur à 1 ; soit $\epsilon = (\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un élément de Y ; comme lorsque n appartient à $\mathbf{N}$, $\theta^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_s^n$ est entier naturel, modulo un :

$$\begin{aligned} q(\epsilon) &= \sum_{\text{mod } 1} \epsilon_n \theta^{-n} \\ &= (\epsilon_{-1} \alpha_2 + \epsilon_{-2} \alpha_2^2 + \epsilon_{-3} \alpha_2^3 + \dots) \\ &\quad \vdots \\ &= (\epsilon_1 \alpha_s + \epsilon_{-2} \alpha_s^{-2} + \epsilon_{-3} \alpha_s^{-3} + \dots) \\ &= t_1 + t_2 + \dots + t_s \end{aligned} \tag{4}$$

où $t_i = -(\epsilon_{-1} \alpha_i + \epsilon_{-2} \alpha_i^2 + \dots)$ est un nombre complexe pour $i = 2 \dots s$.

Soit $\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_s \end{pmatrix}$ le vecteur réel représentant $q_s(\epsilon)$ dont les coordonnées appartiennent à $[0, 1[$.

Il existe des nombres $m_1 \dots m_s$ bornés par

$$M = \max_{K=2 \dots s} \left(\theta^s + \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_K^j| \right)$$

tels que :

$$\begin{aligned}
 r_1 &= t_1 + \dots + t_s + m_1 \\
 r_2 &= \theta t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_s t_s + m_2 \\
 &\vdots \\
 r_s &= \theta^{s-1} t_1 + \alpha_2^{s-1} t_2 + \dots + \alpha_s^{s-1} t_s + m_s
 \end{aligned} \tag{5}$$

cette égalité a lieu dans $\mathbf{R}^n$ et non plus dans le tore.

Soit $\epsilon' = (\epsilon'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ un autre élément de Y , soient t'_i et m'_i définis comme pour ϵ .

Supposons $q_s(\epsilon)$ et $q_s(\epsilon')$ contenus dans un même parallélépipède du tore $\mathbf{T}^s$ de côté inférieur à c ; il existe alors des réels positifs $\delta_1 \dots \delta_s$ inférieurs à c et des entiers $n_i = m_i - m'_i$ bornés par $2M$ tels que :

$$\left(\frac{\epsilon_1}{\theta} + \frac{\epsilon_2}{\theta^2} + \dots \right) - \left(\frac{\epsilon'_1}{\theta} + \frac{\epsilon'_2}{\theta^2} + \dots \right) = t_1 - t'_1$$

$$= \frac{
 \begin{vmatrix}
 n_1 + \delta_1 & 1 & \dots & 1 \\
 n_2 + \delta_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_s \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 n_s + \delta_s & \alpha_2^{s-1} & \dots & \alpha_s^{s-1}
 \end{vmatrix}
 }{
 \begin{vmatrix}
 1 & 1 & \dots & 1 \\
 \theta & \alpha_2 & \dots & \alpha_s \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 \theta^{s-1} & \alpha_2^{s-1} & \dots & \alpha_s^{s-1}
 \end{vmatrix}
 }$$

Pour tout couple (δ, ℓ) de nombres réels positifs suffisamment petits on peut trouver c tel que le quotient $t_1 - t'_1$ prenne ses valeurs dans la réunion de $(2M)^s$ intervalles disjoints $(B_i)_{i \in I}$ du tore $\mathbf{T}$ au plus, de longueur inférieure à δ , séparés les uns des autres par des intervalles de longueur supérieure à ℓ .

Nous fixerons δ, ℓ appartenant à $\mathbf{R}$ et r et k appartenant à $\mathbf{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} r &< k \\ \delta &< \frac{f}{4 \theta^k} < \frac{f}{2 \theta^{r+1}} \\ \ell &> 4 \delta > \frac{4}{\theta^{r-1}} \geq \frac{4}{\theta^r} \end{aligned} \quad (6)$$

où f a été défini en (3) au premier paragraphe.

Soit c défini par δ et ℓ comme ci-dessus.

Soit $P = (P_1 \dots P_s)$ une partition du tore T^s en parallélépipèdes de côtés inférieurs à c .

Soit $A = P_{i_0} \cap T^{-1} P_{i_2} \cap \dots \cap T^{-n} P_{i_n}$ un atome de la partition $P \vee T^{-1} P \vee \dots \vee T^{-n} P$.

Soient $\epsilon = (\epsilon_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et $\epsilon' = (\epsilon'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ appartenant à $\bar{X}$, et vérifiant $\epsilon_1 \dots \epsilon_r = \epsilon'_1 \dots \epsilon'_r$.

Supposons $q_s(\epsilon)$ et $q_s(\epsilon')$ tous deux dans A :

$$\begin{aligned} q_s &\in P_{i_0} \\ q_s(T \epsilon) &\in P_{i_1} \\ &\vdots \\ q_s(T^n \epsilon) &\in P_{i_n} \end{aligned}$$

et il en est de même pour ϵ' donc

$$|t_1 - t'_1| = \left| \left(\frac{\epsilon_1}{\theta} + \frac{\epsilon_2}{\theta^2} + \dots \right) - \left(\frac{\epsilon'_1}{\theta} + \frac{\epsilon'_2}{\theta^2} + \dots \right) \right| < \frac{2}{\theta^r}.$$

Comme ℓ est supérieur à $\frac{4}{\theta^r}$, t_1 et t'_1 sont dans le même intervalle B_i , de longueur inférieure à δ et donc à $\frac{f}{4 \theta^k}$ d'après l'hypothèse (6).

D'après la remarque (3) du paragraphe 1

- . ou bien $\epsilon_1 \dots \epsilon_{r+1} = \epsilon'_1 \dots \epsilon'_{r+1}$
- . ou bien $\epsilon_{r+1} = \epsilon'_{r+1} + 1$ (ou l'inverse).

Recommençons le même raisonnement avec $T \epsilon$ et $T \epsilon' : q_s(T \epsilon)$

et $q_s(T\epsilon')$ se trouvent dans le même parallélépipède P_{i_1} de côté au plus $c : \left(\frac{\epsilon_2}{\theta} + \dots\right)$ et $\left(\frac{\epsilon'_2}{\theta} + \dots\right)$ doivent se trouver dans le même intervalle B_i de longueur inférieure à δ puisque leur distance est inférieure à ϱ .

• Si $\epsilon_{r+1} = \epsilon'_{r+1}$, alors comme ci-dessus :

$$\text{ou bien } \epsilon_{r+2} = \epsilon'_{r+2}$$

$$\text{ou bien } \epsilon_{r+2} = \epsilon'_{r+2} + 1$$

• Si $\epsilon_{r+1} = \epsilon'_{r+1} + 1$ alors $\epsilon_{r+2} = 0$ et $\epsilon'_{r+2} = a_1$ car sinon, la condition

$$\epsilon_2 \dots \epsilon_2 = \epsilon'_2 \dots \epsilon'_r$$

$$\epsilon_{r+1} = \epsilon'_{r+1} + 1$$

$$\epsilon'_{r+1} \neq a_1 \text{ ou } \epsilon_{r+1} \neq 0$$

implique d'après la remarque (3) du paragraphe 1 et la condition (2) sur les θ -développements :

$$\varrho > \frac{2}{\theta^{r-1}} > \left| \left(\frac{\epsilon_2}{\theta} + \frac{\epsilon_3}{\theta^2} + \dots \right) - \left(\frac{\epsilon'_2}{\theta} + \frac{\epsilon'_2}{\theta^2} + \dots \right) \right| > \frac{f}{\theta^r} > \delta.$$

Recommençons encore une fois :

• si $\epsilon_1 \dots \epsilon_r \epsilon_{r+1} \epsilon_{r+2} = \epsilon'_1 \dots \epsilon'_r \epsilon'_{r+1} \epsilon'_{r+2}$ alors $\epsilon_{r+3} = \epsilon'_{r+3}$

$$\text{ou } \epsilon_{r+3} = \epsilon'_{r+3} + 1$$

• si $\epsilon_1 \dots \epsilon_{r+1} = \epsilon'_1 \dots \epsilon'_{r+1}$ et $\epsilon_{r+2} = \epsilon'_{r+2} + 1$

alors $\epsilon_{r+3} = 0$ et $\epsilon'_{r+2} = a_1$

• si $\epsilon_1 \dots \epsilon_r = \epsilon'_1 \dots \epsilon'_r$

$$\epsilon_{r+1} = \epsilon'_{r+1} + 1$$

$$\epsilon_{r+2} = 0 \quad \epsilon'_{r+2} = a_1$$

alors toujours d'après (3)

$$\varrho > \frac{2}{\theta^{r-1}} > \left| \left(\frac{\epsilon_2}{\theta} + \frac{\epsilon_2}{\theta^2} + \dots \right) - \left(\frac{\epsilon'_2}{\theta} + \frac{\epsilon'_2}{\theta^2} + \dots \right) \right| > \frac{f}{\theta^r} > \delta$$

sauf si $\epsilon_{r+3} = 0$ et $\epsilon'_{r+3} = a_2$.

Itérant ce procédé nous arrivons à la conclusion que

$$\epsilon_1 \dots \epsilon_n = \epsilon'_1 \dots \epsilon'_n$$

sauf s'il existe un entier s ne dépendant que de $\epsilon_1 \dots \epsilon_r$, tel que

$$\begin{aligned}\epsilon_1 \dots \epsilon_s &= \epsilon'_1 \dots \epsilon'_s \\ \epsilon_{s+1} &= \epsilon'_{s+1} + 1 \\ \epsilon_{s+2} &= \dots = \epsilon_n = 0 \\ \epsilon'_{s+2} \dots \epsilon'_n &= a_1 a_2 \dots a_{n-s+1}.\end{aligned}$$

Une fois $\epsilon_1 \dots \epsilon_r$ fixé, $\epsilon_{r+1} \dots n$ ne peut prendre que deux valeurs au plus et la somme cherchée est majorée par :

$$S = 2 \times [\theta]^r M^s.$$

Preuve de la proposition 1

Comme l'application q_s est continue :

$$h_\mu(T) = h_{\bar{\mu}}(T) \geq h_{q_s(\mu)}(T)$$

et il reste à montrer l'inégalité inverse. Soit P une partition du tore T^s en parallélépipèdes de côté inférieur à c , où c et S sont fixés comme au lemme qui précède

$$h_{q_s(\mu)}(T) \geq h(P, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(P \vee T^{-1} P \vee \dots \vee T^{-n} P).$$

Soit Q l'image réciproque par l'application q_s de la partition P ; comme q_s commute aux shifts :

$$h(Q \vee T^{-1} Q \vee \dots \vee T^{-n} Q) = h(P \vee T^{-1} P \vee \dots \vee T^{-n} P).$$

Soit h la partition de $\bar{X}$ dont les atomes sont les cylindres $[u]^0$ où u parcourt l'ensemble $(0, 1, \dots, [\theta])$.

Cette partition est un générateur du θ -shift et donc

$$h_{\bar{\mu}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(h \vee T^{-1} R \vee \dots \vee T^{-n} R).$$

Appliquons la formule classique :

$$h(R_1) = h(R_1/R_2) + h(R_2)$$

$$\begin{aligned}h_{\bar{\mu}}(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(R \vee T^{-1} R \vee \dots \vee T^{-n} R / Q \vee T^{-1} Q \vee \dots \vee T^{-n} Q) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(Q \vee T^{-1} Q \vee \dots \vee T^{-n} Q).\end{aligned}$$

Montrons que $h(R \vee T^{-1} R \vee \dots \vee T^{-n} R / Q \vee \dots \vee T^{-n} Q)$ est borné indépendamment de n

$$\begin{aligned} h_{\bar{\mu}}(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(Q \vee T^{-1} Q \vee \dots \vee T^{-n} Q) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(P \vee T^{-1} P \vee \dots \vee T^{-n} P) \\ &\leq h_{q_s(\bar{\mu})}(T) \end{aligned}$$

$$h(R \vee \dots \vee T^{-n} R / Q \vee \dots \vee T^{-n} Q) = \sum \mu(d) h(R \vee \dots \vee T^{-n} R / d)$$

où d parcourt l'ensemble des atomes de la partition $R \vee T^{-1} R \vee \dots \vee T^{-n} R$.

Comme il y a au plus S atomes (S est défini au lemme ci-dessus) de $R \vee \dots \vee T^{-n} R$ pour recouper d

$$h(R \vee \dots \vee T^{-n} R / d) \leq \log S$$

et puisque $\sum \mu(d)$ est égal à 1, la borne cherchée est $\log S$.

L'application q_s , définie dès que θ est un nombre de Pisot laisse donc invariante l'entropie d'une mesure et c'est une application surjective ([2]).

Il semble par contre impossible, lorsque θ est un nombre algébrique admettant un conjugué de module strictement supérieur à 1, d'établir une telle relation entre le θ -shift et le tore T^s car les entropies de ces processus ne sont plus les mêmes ([13]).

Justification de la définition 2

Soit x un nombre réel que nous supposons compris entre 0 et 1 (cela ne modifie que le terme partie entière du développement de x et n'affecte pas la répartition modulo un de la suite $(x \theta^n)_{n \geq 0}$); soit $e = (e_1 e_2 \dots)$ son développement en base θ .

Soit ν une mesure associée à la suite $(T^n e)_{n \geq 0}$ de X ; alors la mesure $q_s(\nu)$ a même entropie et est associée à la suite du tore $(T^s(x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1}))_{n \geq 0}$

Soit τ une mesure associée à la suite du tore :

$$(x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$$

il existe alors une mesure ν associée à la suite $(T^n e)_{n \geq 0}$ et telle que :

$$q_s(\nu) = \tau$$

donc :

$$h_\nu(T) = h_\tau(T).$$

L'entropie supérieure de ϵ est donc égale à celle du point $(x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1})$ du tore $\mathbf{T}^s$; il en va de même de l'entropie inférieure et de l'entropie lorsqu'elle existe. D'où la cohérence de la définition.

Preuve de la proposition 3

Soit $\gamma = c_0 + c_1 \theta + \dots + c_{s-1} \theta^{s-1}$ un élément de $\mathbf{Z}[\theta]$.

Soit q^γ l'application de $\bar{\mathbf{X}}$ dans $\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned} q^\gamma(\eta) &= \sum_{\substack{\text{mod. } 1 \\ n \in \mathbf{Z}}} \eta_n \gamma \theta^{-n} \\ &= \sum_{\substack{\text{mod. } 1 \\ n \in \mathbf{Z}}} \eta_n (c_0 + c_1 \theta + \dots + c_{s-1} \theta^{s-1}) \theta^{-n} \end{aligned}$$

et soit q_s^γ l'application de $\bar{\mathbf{X}}$ dans $\mathbf{T}^s$:

$$q_s^\gamma(\eta) = \begin{pmatrix} q(\eta) \\ q(\mathbf{T} \eta) \\ \vdots \\ q(\mathbf{T}^{s-1} \eta) \end{pmatrix}$$

De même que q_s, q_s^γ est continue et commute aux shifts ; soit x un nombre réel, soit $\epsilon = p(x)$; alors modulo un :

$$q_s^\gamma(\bar{\epsilon}) = \begin{pmatrix} \alpha x \theta^n \\ \alpha x \theta^{n+1} \\ \vdots \\ \alpha x \theta^{n+s-1} \end{pmatrix}$$

Montrons que le lemme 1 reste vrai si l'on y remplace q_s par q_s^γ ; soient $\gamma_2 \dots \gamma_s$ les conjugués de θ :

$$\gamma_i = c_0 + c_1 \alpha_i + c_2 \alpha_i^2 + \dots + c_{s-1} \alpha_i^{s-1}.$$

Avec les notations (4) précédentes, modulo un

$$\begin{aligned} q_s^\gamma(\epsilon) &= \gamma t_1 + \gamma_2 t_2 + \dots + \gamma_s t_s \\ &\quad \gamma \theta t_2 + \gamma_2 \alpha_2 t_2 + \dots + \gamma_s \alpha_s t_s \\ &\quad \vdots \\ &\quad \gamma \theta^{s-1} t_1 + \gamma_2 \alpha_2^{s-1} t_2 + \dots + \gamma_s \alpha_s^{s-1} t_s. \end{aligned}$$

Le déterminant du système, analogue au précédent, est encore non nul et nous tirerions t_1 et poursuivrions la démonstration de la même façon.

Il s'ensuit que l'entropie supérieure du point $(\gamma x, \gamma x \theta, \dots, \gamma x \theta^{n-1})$ du tore $\mathbf{T}^s$ est égale à celle du point $\epsilon = p(x)$ de X et que donc :

$$\bar{h}(x, \theta) = \bar{h}(\gamma x, \theta)$$

lorsque γ appartient à $\mathbf{Z}[\theta]$.

Comme

$$\bar{h}\left(\frac{x}{\gamma}, \theta\right) = \bar{h}\left(\gamma \cdot \frac{x}{\gamma}, \theta\right) = \bar{h}(x, \theta)$$

ceci est encore vrai si γ est un élément de $\mathbf{Q}(\theta)$.

Il en va de même pour $\underline{h}$ et h .

Preuve de la proposition 4

Elle s'appuie sur le

LEMME 2. — Soient E un espace métrique compact, T une transformation de E dans E , x un point de E . Alors pour tout entier m strictement positif :

$$\bar{h}_{T^m}(x) = m \bar{h}_T(x)$$

et de plus

$$\bar{h}_{T^m}(Tx) = \bar{h}_{T^m}(x).$$

Montrons le lemme dans le cas où $m = 2$.

Soit ν une mesure associée à la suite $(T^{2^n} x)_{n \geq 0}$; il existe donc un ensemble infini S tel que pour toute fonction continue f de E dans $\mathbf{R}$:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in S}} \frac{1}{2N} \sum_{2^n < N} f(T^{2^n} x) = \int f d\nu.$$

Il existe alors un sous-ensemble infini S_1 de S et une mesure T invariante μ tels que pour toute fonction continue f de E dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{N \in S_1} \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(T^n x) = \int f d\mu$$

et si ν_1 est la mesure image de ν par T :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{p < N/2} f(T^{2p+1} x) = \int f d\nu,$$

et ainsi

$$\mu = \frac{1}{2} (\nu + \nu_1)$$

d'où

$$h_{T^2}(\mu) = \frac{1}{2} (h_{T^2}(\nu) + h_{T^2}(\nu_1)).$$

Or $h_{T^2}(\nu_1)$ est égale à $h_{T^2}(\nu)$: soit en effet une partition P de E telle que

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_\nu(P \vee T^{-2}P \vee \dots \vee T^{-2n+1}P) - h(\nu) \right| < \epsilon.$$

La partition $T^{-1}P$ de E vérifie puisque ν_1 est la mesure image de ν :

$$\begin{aligned} h_\nu(P \vee T^{-2}P \vee \dots \vee T^{-n}P) \\ = h_{\nu_1}(T^{-1}P \vee T^{-2}(T^{-1}P) \vee \dots \vee T^{-n}(T^{-1}P)) \end{aligned}$$

et

$$h_{T^2}(\nu_1) \geq h_{T^2}(\nu) - \epsilon.$$

Comme ν et ν_1 jouent des rôles symétriques :

$$h_{T^2}(\nu_1) = h_{T^2}(\nu)$$

et

$$h_{T^2}(\mu) = h_{T^2}(\nu_1).$$

Par ailleurs

$$h_{T^2}(\mu) = 2 h_T(\mu)$$

$$h_{T^2}(\mu) = 2 h_T(\nu).$$

Inversement, si μ est associé à la suite $(T^n x)_{n \geq 0}$ on peut écrire de la même façon :

$$\mu = \frac{1}{2}(\nu + \nu_1)$$

où ν_1 et ν sont T invariantes et images réciproques l'une de l'autre : le même raisonnement conduit à la même égalité, d'où la première partie du lemme.

La seconde est vraie car si ν est une mesure associée à la suite $(T^{2n}(x))_{n \geq 0}$ la mesure image réciproque ν_1 par T est associée à la suite $(T^{2n+1}(x))_{n \geq 0}$ et les entropies de ces mesures sont égales.

Preuve de la proposition 4

Montrons la dans le cas où $m = 2$.

Soit X^2 le shift pour θ^2 ; nous noterons S la transformation associée (car il pourrait ici y avoir confusion) à θ^2 :

$$S \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ d_1 v_1 + \dots + d_n v_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta^{2n} = d_n \theta^{2(n-1)} + \dots + d.$$

La transformation : $x \longrightarrow \{\theta^2 x\}$ n'est pas le carré de la transformation $x \longrightarrow \{\theta x\}$; ces transformations sont probablement conjuguées.

La transformation S du tore T^s associée à θ^2 n'est pas non plus le carré de celle associée à θ et nous ne l'utiliserons pas.

Nous utiliserons l'application q_s^2 de X^2 dans T^s qui à u associe le point du tore T^s :

$$q_S^2(u) = \begin{pmatrix} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \theta^{-2n} \\ \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \text{mod. } 1}} u_n \theta^{-2n+1} \\ \vdots \\ \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \text{mod. } 1}} u_n \theta^{-2n+s-1} \end{pmatrix}$$

Si $v = (v_1 \ v_2 \ \dots)$ est le θ^2 -développement de x en base θ^2

$$q_S^2(S^n v) = \begin{pmatrix} x \theta^{2n} \\ x \theta^{2n+1} \\ \vdots \\ x \theta^{2n+s-1} \end{pmatrix}$$

et l'entropie supérieure de x par rapport à θ^2 est celle de v par rapport à S .

Procédant comme au lemme 1, écrivant l'image de u sous la forme :

$$q_S^2(u) = \begin{pmatrix} t_1 + \dots + t_s \\ \theta t_1 + \dots + \alpha_s t_s \\ \vdots \\ \theta^{s-1} t_1 + \dots + \alpha_s^{s-1} t_s \end{pmatrix}$$

nous prouverons que

$$\bar{h}_S(v) = \bar{h}_1(x, \theta^2) = \bar{h}_{T^2}(x, x\theta, \dots, x\theta^{s-1});$$

d'après le lemme 2

$$\begin{aligned} \bar{h}_{T^2}(x, x\theta, \dots, x\theta^{s-1}) &= 2 \bar{h}_T(x, x\theta, \dots, x\theta^{s-1}) \\ &= 2 \bar{h}(x, \theta) \end{aligned}$$

d'où la proposition.

Le corollaire 5 s'ensuit de façon immédiate.

Preuve de la proposition 6

Soit $f : G \times G \longrightarrow G$

$$(x, y) \longrightarrow x + y$$

f est une application continue et $f \circ (T \times T) = T \circ f$.

Soit $(x + y)$ un point de G .

Soit μ une mesure associée à la suite $(T^n(x + y))_{n \geq 0}$, et soit S un ensemble tel que pour toute fonction continue g de G dans $\mathbf{R}$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in S}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(T^n(x + y)) = \mu(g).$$

Il existe un sous-ensemble infini S_1 de S et une mesure ν sur $G \times G$ tels que pour toute fonction continue g de G dans $\mathbf{R}$ et ℓ de $(G \times G)$ dans $\mathbf{R}$:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in S_1}} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \ell(T^n \times T^n(x, y)) = \nu(\ell)$$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in S_1}} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(T^n x) = \nu_{|1}(g)$$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in S_1}} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(T^n y) = \nu_{|2}(g).$$

Alors (G, T, μ) est facteur du processus $(G \times G, T \times T, \nu)$: il nous suffit de montrer que l'application f conserve la mesure ; cela est vrai car étant donné un ensemble mesurable A

$$T^n(x + y) = T^n(x) + T^n(y) \in A \Leftrightarrow (T^n x, T^n y) \in f^{-1}(A)$$

et donc

$$h_T(\mu) \leq h_{T \times T}(\nu).$$

Montrons que $h_{T \times T}(\nu) \leq h_{|1} + h_{|2}$.

Comme G est à base dénombrable il existe une suite croissante $(A_n)_{n \geq 0}$ de sous-algèbres finies de l'algèbre des boréliens telle que la sous-algèbre engendrée par les réunions soit précisément l'algèbre des boréliens.

Soit B_n la sous-algèbre de $G \times G$ formée par $\{D \times G ; D \in A_n\}$ et $C_n = \{G \times D ; D \in A_n\}$.

La suite de sous-algèbres $B_n \times C_n = \{E \times F ; E \in B_n, C \in C_n\}$ est croissante et engendre la tribu des boréliens de $G \times G$.

D'après un théorème classique (Walters, p. 90)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_\nu(T \times T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_\mu(T \times T, B_n \vee C_n)$$

où $h_\mu(T \times T, B_n \vee C_n)$ désigne l'entropie de $G \times G$ muni de la σ -algèbre engendrée par $B_n \vee C_n \vee T^{-1} B_n \vee T^{-1} C_n \vee \dots$ et de la mesure μ par rapport à la transformation $T \times T$.

Or

$$\begin{aligned} h_\mu(T \times T, B_n \times C_n) &\leq h_\nu(T \times T, B_n) + h_\nu(T \times T, C_n) \\ &= h_{\nu|_1}(T, B_n) + h_\nu(T, C_n) \end{aligned}$$

et la limite de cette quantité lorsque n tend vers l'infini est égale toujours selon le même théorème à $h_{\nu|_1} + h_{\nu|_2}$.

Nous en déduisons

$$\bar{h}(u + v) \leq \bar{h}(u) + \bar{h}(v).$$

Comme $h(v) = -h(v)$

$$\bar{h}(u - v) \leq \bar{h}(u + v) + \bar{h}(v)$$

$$\bar{h}(u) - \bar{h}(v) \leq h(u + v).$$

Nous procéderions de même pour $\underline{h}$ et h .

La proposition 8 et le corollaire 7 se déduisent immédiatement des propositions 4 et 6 ($\mathbf{Q}(\theta)$ est inclus dans $D(\theta)$ parce que 1 s'y trouve déjà).

Preuve de la proposition 9

J'ai déjà donné ([2]) de ce théorème une preuve plus longue mais plus explicite, qui ne s'appuie pas sur la notion d'entropie mais sur des travaux de Salem.

La mesure de Rényi-Parry μ_θ est la seule mesure T invariante sur $[0, 1[$ dont l'entropie est égale à $\text{Log } \theta$ ([2] [14]) ; les propositions 1 et 2 sont donc équivalentes d'après la définition 2 et la proposition 2.

La mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbf{T}^s$ est la seule mesure T invariante d'entropie $\text{Log } \theta$ ([13]) ; ainsi les assertions 2 et 3 sont équivalentes.

L'équivalence entre 1 et 2 confrontée au corollaire 5 prouve que lorsque θ et β sont équivalents $N(\theta)$ est égale à $N(\beta)$.

Comme $h(\alpha x, \theta)$ est égal à $h(x, \theta)$ d'après la proposition 3 lorsque α est un nombre non nul de $\mathbf{Q}(\theta)$,

$$\alpha N(\theta) = N(\theta)$$

et comme $\mathbf{Q}(\theta)$ est inclus dans $D(\theta)$, d'après la proposition 6 :

$$\alpha N(\theta) + \gamma = N(\theta).$$

Preuve de la proposition 10

D'après la proposition 6, $D(\theta)$ est inclus dans $N(\theta)^\perp$. Montrons l'inclusion inverse.

LEMME 3. — Soit θ un nombre de Pisot ; y appartient à $N(\theta)^\perp$ si et seulement si

$$\forall x \in N(\theta), \forall \alpha \neq 0 \in \mathbf{Z}[\theta], \forall \beta \in \mathbf{Z}[\theta], \alpha x + \beta y \in N(\theta).$$

Soient x, α et β comme ci-dessus, y appartenant à $N(\theta)^\perp$:

$$\frac{\alpha}{\beta} x \in N(\theta)$$

$$\frac{\alpha x}{\beta} + y \in N(\theta).$$

Multiplions par β :

$$\alpha x + \beta y \in N(\theta).$$

La réciproque est claire.

LEMME 4. — Soient $\mathfrak{L} = dx_1 \dots dx_s$ la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbf{T}^s$, θ un nombre de Pisot de degré s , et soit y appartenant à $N(\theta)^\perp$; alors pour tout x appartenant à $N(\theta)$, pour toute mesure γ associée à la suite

$$(x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1}, y \theta^n, y \theta^{n+1}, \dots, y \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$$

du tore $\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^s$, il existe une mesure ν associée à la suite

$(y \theta^n \dots y \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$ du tore $\mathbf{T}^s$ telle que

$$\gamma = \ell \otimes \nu.$$

Soient $(b_1 \dots b_s)$ un s -uplet non nul de $\mathbf{Z}^s$, $(c_1 \dots c_s)$ un s -uplet de $\mathbf{Z}^s$; soit x appartenant à $N(\theta)$; d'après le lemme précédent

$$x(b_1 + b_2 \theta + \dots + b_s \theta^{s-1}) + y(c_1 + c_2 \theta + \dots + c_s \theta^{s-1}) \in N(\theta),$$

et d'après le critère de Weyl pour l'équirépartition modulo un :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{2i\pi [(b_1 + b_2 \theta + \dots + b_s \theta^{s-1})x + (c_1 + c_2 \theta + \dots + c_s \theta^{s-1})y]\theta^n} = 0$$

ou encore, puisque

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{2i\pi (c_1 + \dots + c_s \theta^{s-1})x \theta^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} & \left[\frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{2i\pi x \theta^n (b_1 + \dots + b_s \theta^{s-1})} e^{2i\pi (c_1 + \dots + c_s \theta^{s-1})y \theta^n} \right. \\ & \left. - \frac{1}{N} \sum_{n < N} e^{2i\pi y \theta^n (c_1 + \dots + c_s \theta^{s-1})} \int e^{2i\pi (b_1 + \dots + b_s x_s)} dx_1 \dots dx_s \right] = 0. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel engendré par les fonctions $e^{2i\pi (x_1 b_1 + \dots + x_s b_s)}$ est dense au sens de la convergence uniforme dans l'ensemble des fonctions continues sur le tore $\mathbf{T}^s$; il en résulte par passage à la limite que pour toutes les fonctions continues f et g sur le tore $\mathbf{T}^s$:

$$\begin{aligned} \lim & \left[\frac{1}{N} \sum_{n < N} f(x \theta^n \dots x \theta^{n+s-1}) \cdot g(y \theta^n \dots y \theta^{n+s-1}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(y \theta^n \dots y \theta^{n+s-1}) \int_{\mathbf{T}^s} f(x_1 \dots x_s) \right] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

et si la mesure μ est associée à la suite

$$(x \theta^n, \dots, x \theta^{n+s-1}, y \theta^n, \dots, y \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$$

du tore $\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^s$, il existe un sous-ensemble infini S de $\mathbf{N}$ et une mesure ν sur $\mathbf{T}^s$ telle que

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in S}} \frac{1}{N} f(x \theta^n, \dots, x \theta^{n+s-1}) g(y \theta^n, \dots, y \theta^{n+s-1}) \\ = \int_{T^s \times T^s} (f, g) d\gamma$$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in S}} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(y \theta^n, \dots, y \theta^{n+s-1}) = \int_{T^s} g d\nu,$$

et d'après (7),

$$\gamma = \ell \otimes \nu.$$

Cette démonstration a été recopiée dans Rauzy [10].

LEMME 5. — L'application $q_{2s} = q_s \otimes q_s$ de l'ensemble des mesures $T \times T$ invariantes sur $\bar{X} \times \bar{X}$ dans l'ensemble des mesures $T \times T$ invariantes sur $T^s \times T^s$ est surjective.

Soit une mesure γ ergodique sur $T^s \times T^s$: elle admet un point générique (u, v) (c'est-à-dire un point tel que la suite $(T^n u, T^n v)_{n \geq 0}$ soit répartie selon la mesure γ).

$$\text{Soient } w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \vdots \\ \theta^{s-1} \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_2^{s-1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad w_s = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_s \\ \vdots \\ \alpha_s^{s-1} \end{pmatrix}$$

les vecteurs propres de T pour les valeurs propres $\theta, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ dans $\mathbf{C}^s$ où les α_i sont les conjugués de θ , de module strictement inférieur à 1.

Ecrivons :

$$u = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_s w_s \text{ dans } \mathbf{C}^s$$

$$v = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_s w_s \text{ dans } \mathbf{C}^s.$$

La suite $(T^n u, T^n v)$ est adjacente à la suite du tore $T^s \times T^s$:

$$(x_1 \theta^n, x_1 \theta^{n+1}, \dots, x_1 \theta^{n+s}, y_1 \theta^n, \dots, y_1 \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}.$$

Si ϵ est le θ -développement de x et η celui de y , et si δ est une mesure associée à la suite $(T^n \epsilon, T^n \eta)$ de $\bar{X} \times \bar{X}$ alors γ est image de δ par l'application $q_{2s} = q_s \otimes q_s$.

L'application $q_{2,s}$ est affine et continue pour la topologie vague : comme les points extrémaux (qui sont les mesures ergodiques) de l'ensemble des mesures sur $\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^s$ sont atteints, toutes les mesures sur $\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^s$ le sont (elles sont limite vague d'une suite de combinaisons linéaires finies de points extrémaux).

LEMME 6. — Soit $v = (y, y\theta, \dots, y\theta^{s-1})$ un point de $\mathbf{T}^s$; soit ν une mesure associée à $(T^n v)_{n \geq 0}$, soit γ une mesure T -invariante sur $\mathbf{T}^s \times \mathbf{T}^s$ telle que :

$$\gamma_1 = \nu.$$

Il existe un point (x, y) de $[0, 1[\times [0, 1[$ tel que la suite $(x\theta^n, x\theta^{n+1}, \dots, x\theta^{n+s-1}, y\theta^n, y\theta^{n+1}, \dots, y\theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$ admette la mesure γ pour mesure associée ; on peut prendre x dans $N(\theta)$ lorsque $\gamma_{|1}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^s$.

Soit δ une mesure sur $\bar{X} \times \bar{X}$ dont γ est la mesure image ; cette mesure existe d'après le lemme 5.

Soit η le θ -développement de y : la mesure $\delta_{|2} = q_s^{-1}(\nu)$ est associée à la suite $(T^n \eta)_{n \geq 0}$.

Considérons δ comme une mesure sur

$$\{0, \dots, [\theta]\}^{\mathbf{Z}} \times \{0, \dots, [\theta]\}^{\mathbf{Z}} ;$$

d'après le théorème 2 de Kamae [5] il existe un point ϵ de $\{0, 1, \dots, [\theta]\}^{\mathbf{Z}}$ tel que la mesure δ soit associée à la suite $(T^n \epsilon, T^n \eta)_{n \geq 0}$; ϵ n'est pas nécessairement un θ -développement

mais si $x = \sum_{n \geq 0} (\epsilon_n)/\theta^n$ alors la suite

$$(x\theta^n, \dots, x\theta^{n+s-1}, y\theta^n, \dots, y\theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$$

est γ -répartie.

Si $\gamma_{|1}$ est la mesure de Lebesgue, $\delta_{|1}$ est ergodique et toujours d'après le théorème 3 de Kamae, on peut choisir ϵ tel que la suite $(T^n \epsilon)_{n \geq 0}$ soit $\delta_{|1}$ -répartie : x est alors un nombre de $N(\theta)$.

Preuve de la proposition 10. — Soit y n'appartenant pas à $\nu(\theta)$: il existe une mesure ν d'entropie strictement positive sur $\mathbf{T}^s$ associée à la suite $(y\theta^n, \dots, y\theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$. La mesure ν n'est donc pas indépendante de la mesure de Lebesgue (Furstenberg [3]) qui est

d'entropie strictement positive aussi : il existe une mesure γ telle que :

$$\gamma_{|1} = \ell$$

$$\gamma_{|2} = \nu$$

$$\gamma \neq \ell \otimes \nu$$

et il existe donc x appartenant à $N(\theta)$ d'après le lemme 6, tel que la suite $(x \theta^n, \dots, x \theta^{n+s-1}, y \theta^n, \dots, y \theta^{n+s-1})_{n \geq 0}$ admette la mesure γ comme mesure associée.

D'après le lemme 4, y ne peut appartenir à $N(\theta)^\perp$ qui est donc inclus dans $D(\theta)$.

Soit y appartenant à $D(\theta)$; alors $h(x + y, \theta) = h(x, \theta)$ pour tout x d'après le corollaire 7; comme d'après la proposition 9, x appartient à $N(\theta)$ si et seulement si $h(x, \theta) = \text{Log } \theta$, $x + y$ appartient à $N(\theta)$ dès que y appartient : ainsi $D(\theta)$ est inclus dans $N(\theta)$.

Preuve de la proposition 11. — Cette démonstration est directement inspirée de Kamae [5].

Montrons que $1 \Rightarrow 2$.

Soit τ une fonction de sélection déterministe telle que

$$\sup \frac{\tau(n)}{n} < \infty.$$

Soit $\theta_\tau \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, $\theta_\tau(n) = 1$ si $n \in \tau(\mathbf{N})$
= sinon.

Soit μ une mesure associée à la suite

$$(x \theta^{\tau(n)}, x \theta^{\tau(n)+1}, \dots, x \theta^{\tau(n)+s-1})_{n \geq 0}$$

selon l'ensemble S .

Soit V l'ensemble infini : $\{n; n \in \mathbf{N}, \tau(n) \in S\}$.

Soit γ une mesure associée selon un ensemble $W \subset V$ à la suite $(x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1}, \theta_\tau(n))_{n \geq 0}$ de $\mathbf{T}^s \times \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$.

Alors $\gamma_{|1} = \mu_\theta$

$\gamma_{|2}$ est une mesure d'entropie nulle et (Pinsker [9]) les mesures μ_θ et $\gamma_{|2}$ sont disjointes :

$$\gamma = \mu_\theta \otimes \gamma_{|2}.$$

Soit A un sous-ensemble mesurable de T^s , soit B l'ensemble des suites $(\omega_0, \omega_1, \dots)$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dont la première coordonnée vaut 1

$$\gamma_{|2}(B) = \lim_{N \in S} \frac{1}{N} \# \{n < N, \exists p \ n = \tau(p)\}$$

$$\gamma(A \times B) = \mu_\theta(A) \cdot \gamma_{|2}(B).$$

Or

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in W}} \frac{1}{N} \# \{n < N; (x \theta^n, x \theta^{n+1}, \dots, x \theta^{n+s-1}) \in A; T^n(\theta_\tau) \in B\} \\ &= \gamma(A \times B) = \mu_\theta(A) \cdot \gamma_{|2}(B) \\ &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \in W}} \frac{1}{N} \# \{n < N, \exists p \ n = \tau(p) \text{ et } (x \theta^{\tau(p)}, \dots, x \theta^{\tau(p)+s-1}) \in A\} \\ &= \lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ P \in S}} \frac{P}{\tau(P)} \# \{p < P; (x \theta^{\tau(p)}, \dots, x \theta^{\tau(p)+s-1}) \in A\} \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{\substack{P \rightarrow \infty \\ P \in S}} \# \{p < P (x \theta^{\tau(p)}, \dots, x \theta^{\tau(p)+s-1}) \in A\} = \mu_\theta(A)$$

et ainsi $\mu(A) = \mu_\theta(A)$: (1) implique (2).

Montrons que $2 \Rightarrow 1$.

Soit τ une fonction de sélection non déterministe, soit θ_τ défini comme plus haut ; soit une mesure ν associée à θ_τ selon un ensemble S , d'entropie non nulle.

Comme le processus (T^s, T) est facteur par l'application q_s du θ -shift bilatéral qui est lui-même un processus de Bernoulli [12] son extension naturelle est un processus de Bernoulli. Il existe donc une mesure γ sur $T^s \times [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\gamma_{|1} = \mu_\theta$$

$$\gamma_{|2} = \nu$$

$$\gamma \neq \mu_\theta \otimes \nu$$

et en particulier il existe un ensemble mesurable A de T^s tel que si

$$B = \{(u_n)_{n \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} ; u_0 = 1\}$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma(A \times B) &\neq \gamma_{|1}(A) \cdot \gamma_{|2}(B) \\ &\neq \mu_\theta(A) \cdot \nu(B) \end{aligned}$$

sinon le lemme 3.1 de Kamae serait en défaut.

Par le même procédé qu'au lemme 6 nous montrerions qu'il existe un point x de $N(\theta)$ tel que la suite

$$(x \theta^n, \dots, x \theta^{n+s-1}, \theta_\tau(n))_{n \geq 0} \text{ de } T^s \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

soit répartie selon la mesure γ .

Comme ci-dessus nous montrerions que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(A \times B)}{\nu(B)} &= \lim_{p \in S} \frac{1}{P} \# \{p < P(x \theta^{\tau(p)}, \dots, x \theta^{\tau(p)+s-1}) \in A\} \\ &\neq \mu_\theta(A) \end{aligned}$$

et donc $2 \Rightarrow 1$.

Preuve de la proposition 12.1

Recopier soigneusement la démonstration de M. Bernay [1] en y intégrant le fait que le nombre de cylindres d'ordre n $[c_1, \dots, c_n]^0$ de mesure non nulle du θ -shift est de l'ordre de θ^n et que la longueur d'un intervalle de la forme

$$\{x \in [0, 1] ; x = \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots ; \epsilon_1, \dots, \epsilon_n = c_1, \dots, c_n\}$$

est inférieure ou égale à $\frac{1}{\theta^n}$.

Preuve de l'assertion 12.2

Soit $\delta = \theta^\lambda$.

Soit δ_k une suite croissante de β -nombres de limite δ .

Soit $A = \left\{ x = \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{\theta^n} : \exists y \in N(\delta), y = \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \text{ en base } \delta \right\}$.

L'entropie d'un nombre de A est $\text{Log } \delta = \lambda \text{Log } \theta$.

Considérons le recouvrement de A par des intervalles de la forme $I_{c_1 \dots c_k} = \{z; z = 0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots \text{ en base } \theta; \epsilon_1, \dots, \epsilon_k = c_1, \dots, c_k\}$ où $c_1, \dots, c_k$ parcourt l'ensemble des mots figurant dans les δ -développements.

Nous savons qu'il existe deux nombres réels a et b strictement positifs tels que le nombre de ces intervalles soit compris entre $a\delta^n$ et $b\delta^n$ (Ito-Takahashi, [4]) et que leur longueur est majorée par $\frac{1}{\theta^n}$; la mesure de A dans la dimension γ est finie : la dimension de A est inférieure ou égale à γ .

Nous ne la majorerons pas directement car nous ne savons pas minorer la longueur des intervalles $I_{c_1, \dots, c_k}$, mais par l'intermédiaire de la suite δ_k . Comme plus haut, le nombre d'intervalles de la forme $I_{c_1, \dots, c_k}$ ou le mot $c_1, \dots, c_k$ figure dans les δ_k -développements (donc dans les δ -développements) est minoré par $a_k \delta_k^n$ et comme δ_k est un β -nombre, il existe v_k tel que $(v_k)/(\delta_k^n)$ minore la longueur d'un tel intervalle.

Ainsi la mesure de A dans la dimension γ est supérieure à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k \frac{\delta_k^n v_k}{\theta^{n\gamma}}$$

qui est infini si $\theta^\gamma < \delta_k$.

La dimension de Hausdorff de A est donc supérieure ou égale à λ , donc égale à λ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BERNAY, La dimension de Hausdorff de l'ensemble des nombres r -déterministes, *C.R.A.S.*, 280 (1975), 539-541.
- [2] A. BERTRAND, Répartition module un de la suite $(x\theta^n)_{n \geq 0}$ et développements en base de Pisot (à paraître).
- [3] H. FÜRSTENBERG, Disjointness in ergodic Theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation, *Math. Syst. Th.*, 1 (1967), 1-50

- [4] ITO - TAKAHASHI, Markov subshifts and realisation of β -expansions, *J. Math. Soc. Japan*, vol. 26, n° 1 (1974).
- [5] T. KAMAE, Subsequences of normal sequences, *Israel J. of Math.*, 16, 2 (1973), 121-149.
- [6] M. MISUREWICZ, Topological Conditional Entropy, *Studia Mathematica*, LV (1976), 175-200.
- [7] W. PARRY, On the β expansions of Real Numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 11 (1960), 401-416.
- [8] W. PARRY, *Entropy and Generators in Ergodic Theory*, Benjamin, 1969.
- [9] PINSKER, Dynamical systems with completely positive an zero entropy, *Dok. Akad. Nauk. SSSR*, 133 (1960), 1025-1026.
- [10] G. RAUZY, Nombres normaux et Processus déterministes, *Acta Arithmetica*, 29 (1996), 211-225.
- [11] RENYI, Representations for real numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8 (1957), 447-493.
- [12] M. SMORODINSKY, Ergodic Theory, Entropy, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 214 (1971).
- [13] P. WALTERS, Ergodic Theory, *Lectures Notes*.
- [14] F. HOFBAUER, B-shifts have unique maximal measure, *Monatshefte*, 85 (1978), 189-198.

Manuscrit reçu le 21 juin 1984

révisé le 16 octobre 1984.

Anne BERTRAND-MATHIS,
U.E.R. de Math. et d'Informatique
L.A. n° 226
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F - 33405 Talence cedex.