

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

VLAD SERGIESCU

Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 3 (1985), p. 137-158

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_137_0

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COHOMOLOGIE BASIQUE ET DUALITÉ DES FEUILLETAGES RIEMANNIENS

par
Vlad SERGIESCU

0. Introduction.

Les feuilletages riemanniens ont été introduits par B. Reinhart (voir [17]). Plusieurs auteurs se sont intéressés depuis à la topologie algébrique de ces feuilletages en étudiant la cohomologie des formes différentielles basiques. Des questions de finitude et de dualité ont été abordées ([16], [15], [5], [6]).

Dans ces travaux, les résultats de dualité ont été obtenus en utilisant des méthodes d'opérateurs elliptiques. Reinhart a été à l'origine de cette direction dans [16]. A la suite d'un contre-exemple dû à Y. Carrière [4], les résultats de [16] ont été complétés par F. Kamber et P. Tondeur qui démontrent la dualité de Poincaré lorsque le feuilletage est minimalisable [11].

Le but de cet article est de poursuivre l'étude de ces questions à l'aide d'une approche topologique. Celle-ci nous permet d'obtenir des résultats dans un cadre général et, en particulier, sur des variétés non compactes.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien complet transversalement orientable de codimension n sur une variété M de dimension m . P. Molino a introduit dans [14] le faisceau transverse central de $\mathcal{F}$ qui décrit la structure des adhérences des feuilles.

Il existe, sur M , un faisceau localement constant $\mathcal{R}$ d'espaces vectoriels de dimension 1, lié au faisceau transverse central, que l'on appellera faisceau d'orientation homologique de $\mathcal{F}$. On dira que $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable si $\mathcal{R}$ est trivial.

Mots-clés : Feuilletage riemannien — Cohomologie basique.

Soit $H_b^*(M)$ (resp. $H_{b,c}^*(M; \mathcal{R})$) la cohomologie des formes basiques (resp. des formes basiques à valeurs dans $\mathcal{R}$, dont le support se projette sur un compact de l'espace des adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$).

Notre premier résultat concerne la dualité de Poincaré.

THEOREME I. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien complet. Alors :

- (i) La cohomologie $H_{b,c}^n(M; \mathcal{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.
- (ii) Le produit extérieur des formes différentielles induit un isomorphisme

$$\phi : H_b^p(M) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(M, \mathcal{R})^*.$$

Supposons la variété M compacte. La cohomologie basique est alors de dimension finie [5].

COROLLAIRE I. — (i) $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable si et seulement si $H_b^n(M) \neq 0$.

- (ii) Si $H_b^n(M) \neq 0$, alors l'accouplement

$$H_b^p(M) \times H_b^{n-p}(M) \longrightarrow H_b^n(M) \simeq \mathbb{R}$$

est non-dégénéré.

A l'aide d'un théorème de Hodge pour les formes basiques, A. El-Kacimi et G. Hector démontrent indépendamment dans [6] la dualité de Poincaré sur une variété compacte telle que $H_b^n(M) \neq 0$.

L'exemple donné dans [4] montre qu'il existe des feuilletages qui ne sont pas homologiquement orientables, bien que transversalement orientables.

La démonstration du théorème I fait appel aux résultats de P. Molino sur la structure des feuilletages riemanniens. Nous les utilisons en conjonction avec une méthode qui remonte à André Weil et un argument de suite spectrale basé sur le théorème de comparaison.

Nous obtenons par cette même voie un second résultat. Désignons par $C_*^{\mathcal{F}}(M)$ le complexe des $\mathcal{F}$ -courants invariants transverses (voir §.1). Ce complexe a été introduit par A. Haefliger dans [8].

Supposons M orientée. Dans [11], Kamber et Tondeur ont remarqué l'existence d'une application de "de Rham" :

$$\psi : \Omega_b^p(M) \longrightarrow C_{m-p}^{\mathcal{F}}(M)$$

tel que $\psi(\omega) \cdot \eta = \int_M \omega \wedge \eta$.

THEOREME II. — *Pour un feuilletage riemannien complet ψ induit un isomorphisme*

$$\psi : H_b^p(M) \longrightarrow H_{m-p}^{\mathcal{F}}(M).$$

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien avec feuilles minimales, et plus généralement si $\mathcal{F}$ est étiré (tense), Kamber et Tondeur esquissent une démonstration de ce résultat dans [11].

Nous remarquons à l'aide d'un exemple que l'énoncé ne s'étend pas à un feuilletage quelconque (ce qui contredit une affirmation dans [12]).

Le premier paragraphe est destiné aux rappels et aux notations. Nous abordons ensuite la dualité de Poincaré. Le troisième paragraphe traite de la dualité de de Rham. Nous exposons brièvement dans un appendice la suite spectrale d'une $\mathcal{G}$ -algèbre différentielle graduée sous une forme qui nous est utile et qui s'étend aux situations nous concernant.

L'approche de la dualité des feuilletages riemanniens présentée dans ce travail est également connue d'André Haefliger. Je le remercie pour ses encouragements et pour ses suggestions qui m'ont permis d'améliorer le théorème I.

Je remercie également Etienne Ghys et Pierre Molino pour leur intérêt et leurs observations qui m'ont été utiles.

1. Préliminaires.

Nous rappellerons dans ce paragraphe les notions et les résultats utiles dans la suite. Nous fixons également quelques notations. Pour plus de détails, on renvoie à [13], [14], [15], [17].

Les structures considérées seront de classe C^∞ . Tous les feuilletages seront transversalement orientables.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension n sur une variété M de dimension m . Une forme $\omega \in \Omega^*(M)$ est appelée basique si, pour tout champ X tangent à $\mathcal{F}$, elle vérifie :

$$(i) \quad i_X \omega = 0$$

$$(ii) \quad i_X d\omega = 0.$$

Nous noterons $\Omega_b^*(M)$ le complexe des formes basiques. Cette notation diffère de celle utilisée dans [5] ; nous l'adoptons pour la simplicité de l'écriture.

De même, si $\mathcal{R}$ est un faisceau localement constant d'espaces vectoriels de dimension 1, nous noterons $\Omega_b^*(M; \mathcal{R})$ les formes C^∞ à valeurs dans $\mathcal{R}$ vérifiant (i) et (ii) (voir [2], [9] pour des généralités). Ce complexe s'identifie aux formes basiques à valeurs dans le fibré vectoriel associé à $\mathcal{R}$, muni de sa trivialisation de fibré plat.

Rappelons, d'autre part, qu'une forme différentielle ω est dite $\mathcal{F}$ -triviale si pour tous champs $X_1, \dots, X_{m-n}$ tangents aux feuilles on a :

$$(i_{X_1} \dots i_{X_{m-n}})(\omega) = 0.$$

On désignera par $C_*(M)$ le complexe des courants de de Rham sur M . Soit $C_*^{\mathcal{F}}(M)$ le sous-complexe des courants qui s'annulent sur les formes $\mathcal{F}$ -triviales ainsi que sur leur différentielles. Il est montré dans [8] qu'un élément de $C_*^{\mathcal{F}}(M)$ s'identifie à un courant invariant par l'holonomie sur une transversale complète à $\mathcal{F}$.

DEFINITION 1.1. — *Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit transversalement parallélisable complet s'il existe n champs transverses complets qui le laissent invariant et qui sont indépendants en chaque point.*

Dans la mesure où il n'y aura pas de confusion possible nous appellerons $\mathcal{F}$ simplement parallélisable. La structure d'un tel feuilletage est donnée par le théorème suivant, dû à Molino [13] (et à Conlon en codimension 2) :

THEOREME 1.2. — *Supposons $\mathcal{F}$ transversalement parallélisable complet.*

(i) *Les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale $F \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} W$.*

(ii) Il existe une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ tel que le feuilletage induit sur chaque fibre soit un $\mathcal{G}$ feuilletage de Lie à feuilles denses.

La fibration π est appelée basique. Son groupe structural peut être choisi pour préserver le feuilletage sur la fibre type.

Notons $\mathcal{O}$ le faisceau des orientations transverses de la fibration π . Dire que $\mathcal{O}$ est trivial est équivalent à dire que W est orientable.

Supposons que le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien. Soit $\hat{M}$ le $SO(n)$ fibré des repères orthonormés directs. A l'aide de la connexion de Levi-Civita transverse, il est montré dans [13] le

THEOREME 1.3. — *Le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève sur $\hat{M}$ en un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$, de même dimension, qui est $SO(n)$ -invariant. Les feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ sont des revêtements des feuilles de $\mathcal{F}$. De plus $\hat{\mathcal{F}}$ admet un parallélisme transverse canonique.*

DEFINITION 1.4. — *Le feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ est dit complet si le parallélisme transverse canonique de $\hat{\mathcal{F}}$ est complet.*

Dans ce cas, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ associée à la fibration basique de $\hat{M}$ est un invariant structural du feuilletage.

Puisque le groupe $SO(n)$ laisse le faisceau $\hat{\mathcal{O}}$ sur $\hat{M}$ invariant, il résulte que celui-ci est le relevé d'un faisceau localement constant $\mathcal{O}$ sur M .

La structure transverse d'un feuilletage complet est précisée par le faisceau transverse central [14], [15] noté $\mathcal{C}(\mathcal{F})$. Il s'agit d'un faisceau localement constant de germes de champs transverses, dont la fibre est naturellement isomorphe à l'opposée de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Lorsque $\mathcal{F}$ est parallélisable, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ est formé des germes de champs transverses commutant avec tout champ transverse complet.

De plus, si $\hat{\mathcal{F}}$ est le relevé de $\mathcal{F}$ sur $\hat{M}$, le faisceau $\mathcal{C}(\hat{\mathcal{F}})$ est le relevé de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{G}$ -feuilletage de Lie complet à feuilles denses, $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ correspond aux germes des champs invariants à droite sur le groupe de Lie simplement connexe G associé à $\mathcal{G}$. On utilise pour ceci le diagramme développant de Fédida

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\
 \downarrow & & \\
 M & &
 \end{array}
 \quad (\text{voir [15]})$$

Ici $\tilde{M}$ est le revêtement universel de M qui fibre au-dessus du groupe G . De plus il existe un morphisme $h : \pi_1(M) \longrightarrow G$, à image dense, tel que la fibration D soit $\pi_1(M)$ -équivariante.

Désignons enfin par $\mathcal{G}$ le faisceau $\Lambda^s \mathcal{C}(\mathcal{F})$ où s est la dimension de l'algèbre de Lie structurale et soit $\mathcal{R} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}$.

DEFINITION 1.5. — On appelle $\mathcal{R}$ le faisceau d'orientation homologique de $\mathcal{F}$.

Nous noterons $\Omega_{b,c}^*(M; \mathcal{R})$ les formes basiques à valeurs dans $\mathcal{R}$ dont le support se projette sur un compact de l'espace des adhérences des feuilles ; dans le cas parallélisable ce dernier est la variété basique W .

Dans ce travail notre référence pour la cohomologie des formes différentielles est la monographie [7]. Nous renvoyons à [3] pour les notions générales sur les faisceaux. Les références A.1-A.4. sont relatives à l'appendice.

2. Dualité de Poincaré.

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème de dualité de Poincaré pour la cohomologie basique. Nous envisageons d'abord le cas des feuilletages de Lie et des feuilletages parallélisables.

Supposons que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{G}$ -feuilletage de Lie à feuilles denses de codimension n sur M . Il est bien connu (voir [5]) qu'à l'aide du diagramme développant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\quad} & G, \\ \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

le complexe $\Omega_b^*(M)$ s'identifie au complexe $C^*(\mathcal{G}; \mathbb{R})$ des cochaînes sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Ceci se réalise à travers les formes basiques $\pi_1(M)$ -invariantes du feuilletage relevé sur $\tilde{M}$.

On montre de la même façon que le complexe $\Omega_b^*(M; \mathcal{R})$ (ici $\mathcal{R} = \mathcal{G}$) s'identifie à $C^*(\mathcal{G}; \Lambda^n \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ agit sur $\Lambda^n \mathcal{G}$ par l'application adjointe. La dualité de Poincaré, énoncée d'habitude pour une algèbre unimodulaire [7], fournit un accouplement non-dégénéré $H^*(\mathcal{G}) \times H^{n-*}(\mathcal{G}; \Lambda^n \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{R}$. On obtient alors par transport la dualité de Poincaré pour la cohomologie basique sur M .

Supposons maintenant que $\mathcal{F}$ est transversalement parallélisable complet sur M , que $\dim M = m$, $\text{codim } \mathcal{F} = n$. Posons $\ell = \dim W$, $k = m - \ell = \dim F$.

Nous allons construire une application "d'intégration transverse" $I : \Omega_{b,c}^n(M; \mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $I(d\eta) = 0$ si $\eta \in \Omega_{b,c}^{n-1}(M; \mathcal{R})$.

Soit $\check{U}$ un ouvert trivialisant pour π et $U = \pi^{-1}(\check{U})$. Le lemme qui suit est immédiat.

LEMME 2.1. — *Le complexe $\Omega_{b,c}^*(U; \mathcal{R})$ s'identifie à l'aide d'une trivialisat on locale à $\Omega_c^*(\check{U}; \Theta) \otimes \Omega_b^*(F; \mathcal{G})$.* $\square$

On peut donc écrire une forme $\omega \in \Omega_{b,c}^n(U; \mathcal{R})$ d'une unique façon sous la forme $\omega = \alpha_\omega \otimes \beta$ où $0 \neq \beta \in \Omega_b^{n-\ell}(F; \mathcal{G})$ est un générateur fixé et $\alpha_\omega \in \Omega_c^\ell(\check{U}; \Theta)$. On pose alors :

$$I(\omega) = \int_W \alpha_\omega.$$

Plus généralement, si $\omega \in \Omega_{b,c}^n(M; \mathcal{R})$, soit $(f_j)_{j \in J}$ une partition de 1 subordonnée à un recouvrement fini de $\pi(\text{supp } \omega)$

d'ouverts comme ci-dessus. On pose $I(\omega) = \sum_j I(f_j \omega)$, où $I(f_j \omega)$ est déjà défini plus haut.

PROPOSITION 2.2. — *L'application I est bien définie et induit une surjection $H_{b,c}^n(M; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Preuve. — Soit $\chi : \check{U} \times F \longrightarrow \check{U} \times F$ un difféomorphisme au-dessus de $\check{U}$ qui préserve le feuilletage dans chaque fibre. Un calcul immédiat donne :

$$\chi^*(\alpha \wedge \beta) = \chi^*(\alpha) \wedge \chi^*(\beta) = \alpha \wedge \beta.$$

La dernière égalité tient compte du fait que α et β proviennent des facteurs et que χ induit l'identité sur $\Omega_{b,c}^{n-\ell}(x \times F; \mathcal{G})$. Il résulte que si $\pi(\text{supp } \omega) \subset \check{U}$, alors $I(\omega)$ est bien défini.

Pour une forme ω quelconque l'indépendance de $I(\omega)$ par rapport à la partition de 1 est similaire aux situations classiques ([2], [7]).

La définition locale montre que $I \neq 0$.

Soit $\eta \in \Omega_{b,c}^{n-1}(\check{U} \times F; \mathbb{R})$. Si $\eta = \gamma \wedge \delta$ avec $\deg \gamma = \ell - 1$, alors $d\eta = d\gamma \wedge \delta$, d'où $I(d\eta) = 0$ puisque $\int_w d\gamma = 0$. Si $\eta = \gamma \wedge \delta$ avec $\deg \gamma = \ell$, on a $d\delta = 0$, d'où $d\eta = 0$. Il résulte que $I(d\eta) = 0$ dans tous les cas.

En général, si $\eta \in \Omega_{b,c}^{n-1}(M; \mathbb{R})$ on peut écrire :

$$f_i d\eta = d(f_i \eta) - df_i \wedge \eta$$

et puisque $\sum df_i = 0$ on a que $\sum I(f_i d\eta) = \sum I(d(f_i \eta)) = 0$. Ceci termine la démonstration. $\square$

Avant de montrer la dualité de Poincaré, remarquons que la technique de Mayer-Vietoris s'applique pourvu qu'on se restreigne à des ouverts du type $U = \pi^{-1}(\check{U})$:

LEMME 2.3. — *Soient $\check{U}$ et $\check{V}$ des ouverts de W . Les suites suivantes sont exactes :*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Omega_b^*(U \cup V) &\longrightarrow \Omega_b^*(U) \oplus \Omega_b^*(V) \longrightarrow \Omega_b^*(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \Omega_{b,c}^*(U \cap V; \mathbb{R}) &\longrightarrow \Omega_{b,c}^*(U; \mathbb{R}) \\ &\oplus \Omega_{b,c}^*(V; \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega_{b,c}^*(U \cup V; \mathbb{R}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Les flèches sont des restrictions ou des extensions par 0.

Preuve. — Elle utilise une partition de 1 sur W comme dans le cas classique. $\square$

La proposition 2.2 permet de construire un accouplement $\phi : \Omega_b^p(M) \times \Omega_{b,c}^{n-p}(M; \mathcal{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ en posant $\phi(\omega, \eta) = I(\omega \wedge \eta)$. On peut donner alors la démonstration du théorème I dans le cas parallélisable :

PROPOSITION 2.4. — *L'accouplement ϕ induit un isomorphisme, noté encore $\phi : H_b^p(M) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(M; \mathcal{R})^*$.*

Preuve (voir aussi [7]). — Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de W , difféomorphes à $\mathbf{R}^2$. On peut supposer $\mathcal{B}$ fermée par intersection finie. Notons $\mathcal{B}_f$ et $\mathcal{B}_d$ les réunions finies (respectivement dénombrables) d'éléments de $\mathcal{B}$. Pour $\check{U} \in \mathcal{B}$, le cas des feuilletages de Lie implique que la "restriction"

$$\phi_U : H_b^p(U) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(U; \mathcal{R})^*$$

est un isomorphisme.

D'après le lemme 2.3. et le lemme des cinq, ceci reste vrai pour $\check{U} \in \mathcal{B}_f$. On en déduit facilement la même chose pour $\check{U} \in (\mathcal{B}_f)_d$, puis pour $\check{U} \in ((\mathcal{B}_f)_d)_f$. La conclusion vient de ce que $((\mathcal{B}_f)_d)_f$ est formée de tous les ouverts de W . $\square$

Remarque 2.5. — (i) Si M est compacte, le lemme 2.3. montre que $H_b^*(M)$ et $H_{b,c}^*(M; \mathcal{R})$ sont de dimension finie (cf. [5]). On utilise pour ceci un recouvrement fini d'ouverts difféomorphes à $\mathbf{R}^2$.

(ii) Il est clair que l'hypothèse $H_b^n(M) \neq 0$ est équivalente à la trivialité du faisceau $\mathcal{R}$.

Dans ce cas, on peut remplacer la proposition 2.3. en montrant directement que pour $\check{U} \subset W$, l'inclusion $\pi^{-1}(\check{U}) = U \subset M$ induit une surjection (donc une bijection) $H_{b,c}^n(U) \longrightarrow H_{b,c}^n(M)$.

(iii) Les résultats précédents restent valables pour un feuilletage transversalement complet (cf. [13]).

Passons au cas d'un feuilletage riemannien quelconque $\mathcal{F}$. On considère toujours que $\text{codim } \mathcal{F} = n$, $\dim M = m$. Posons

$$n_0 = \frac{n(n-1)}{2} = \dim \text{SO}(n).$$

Considérons les algèbres $\Omega_b^*(\hat{M})$ et $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$. Les opérateurs i_X et θ_X y agissent et en font des $\mathfrak{S}\mathfrak{O}(n)$ - A.D.G. (voir A.1 et [5]).

Puisque le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ est parallélisable, il existe d'après 2.4. un accouplement $\hat{\phi} : \Omega_b^*(\hat{M}) \times \Omega_{b,c}^{n+n_0-*}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \mathbf{R}$.

Nous allons d'abord le "descendre" à un accouplement $\phi : \Omega_b^*(M) \times \Omega_{b,c}^{n-*}(M, \mathcal{Q}) \longrightarrow \mathbf{R}$, puis montrer que celui-ci induit la dualité de Poincaré cherchée.

Considérons l'application d'intégration sur la fibre $f_{\text{SO}(n)} : \Omega^*(\hat{M}) \longrightarrow \Omega^{*-n_0}(M)$. Il est immédiat qu'elle préserve les formes basiques. Soit $\hat{I} : \Omega_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \mathbf{R}$ l'application "d'intégration transverse" construite dans la proposition 2.2.

LEMME 2.6. — *Il existe une application $I : \Omega_{b,c}^n(M, \mathcal{Q}) \longrightarrow \mathbf{R}$, tel que $I \circ f_{\text{SO}(n)} = \hat{I}$. Elle induit un isomorphisme $I : H_{b,c}^n(M, \mathcal{Q}) \longrightarrow \mathbf{R}$.*

Preuve. — Remarquons d'abord que

$$f_{\text{SO}(n)} : H_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \longrightarrow H_{b,c}^n(M, \mathcal{Q}) \text{ est un isomorphisme.}$$

En effet, si γ est une n -forme volume le long des fibres obtenue à l'aide de la connexion transverse projetable, on vérifie que l'application $[\omega] \longmapsto [\pi^*(\omega) \wedge \gamma]$ est l'inverse de

$f_{\text{SO}(n)}$. On pourrait également utiliser le fait que

$f_{\text{SO}(n)} : \Omega_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \Omega_{b,c}^n(M, \mathcal{Q})$ est surjective et conclure parce que $H_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \cong H_{b,c}^n(M, \mathcal{Q})$ d'après la suite spectrale de l'algèbre $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ (voir A.4.a. et [5]).

Le lemme résulte en définissant I pour faire commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) & \longrightarrow & H_{b,c}^{n+n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \\
 \downarrow f_{\text{SO}(n)} & & \downarrow f_{\text{SO}(n)} \\
 \Omega_{b,c}^n(M, \mathcal{Q}) & \longrightarrow & H_{b,c}^n(M, \mathcal{Q})
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \hat{I} \\
 \searrow I
 \end{array}
 \rightarrow \mathbf{R}$$

□

Nous définissons maintenant

$$\begin{aligned}
 \phi : \Omega_b^*(M) \times \Omega_{b,c}^{n-n_0-*}(M, \mathcal{Q}) &\longrightarrow \mathbf{R} \text{ par} \\
 \phi(\omega, \eta) &= I(\omega \wedge \eta).
 \end{aligned}$$

LEMME 2.7. — Les applications $\hat{\phi}$ et ϕ induisent le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega_b^p(\hat{M}) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^* \\
 \uparrow \pi^* & & \uparrow (f_{\text{SO}(n)})^* \\
 \Omega_b^p(M) & \xrightarrow{\phi} & (\Omega_{b,c}^{n-p}(M, \mathcal{Q}))^*
 \end{array}$$

Preuve. — Il s'agit de vérifier que si $\omega \in \Omega_b^p(M)$ et $\eta \in \Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$, alors $\hat{\phi}(\pi^* \omega, \eta) = \phi(\omega, f_{\text{SO}(n)} \eta)$.

Ceci revient à montrer que $\hat{I}(\pi^* \omega \wedge \eta) = I(\omega \wedge f_{\text{SO}(n)} \eta)$. Une propriété de l'intégration sur la fibre ([7]) assure que $f_{\text{SO}(n)} \pi^* \omega \wedge \eta = f_{\text{SO}(n)} \omega \wedge \pi^* \eta$. On conclut à l'aide du lemme 2.6. □

Nous aurons besoin du :

LEMME 2.8. — *L'image de l'application*

$$\left(f_{\mathrm{SO}(n)}\right)^* : (\Omega_{b,c}^{n-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^* \longrightarrow (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^*$$

est formée des éléments $\hat{\lambda} \in (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^*$ tels que $(i_X)^* \hat{\lambda} = 0$ et $(\theta_X)^* \hat{\lambda} = 0$, $X \in \mathfrak{SO}(n)$.

Preuve. — Le lemme est une conséquence de ce que l'application

$$f_{\mathrm{SO}(n)} \text{ est égale, à signe près, au composé } \Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{R} {}_1\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{i_{X_1} \dots X_{n_0}} \Omega_{b,c}^{*-n_0}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}),$$

où $R(\omega) = \int_{\mathrm{SO}(n)} g^* \omega dg$ et $X_1, \dots, X_{n_0}$ sont des champs fondamentaux (voir [7], II.6.5, exercice 4.4. et III.8.4 pour le cas classique, l'extension à notre situation étant immédiate). $\square$

Posons $A_{b,c}^p(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) = (\Omega_{b,c}^{n+n_0-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^*$. Muni des opérateurs duaux $\pm i_X^*$ et $-\theta_X^*$, le complexe $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ et un $\mathrm{SO}(n)$ module (voir A.4. b.).

Il est convenable de se restreindre aux éléments $\mathrm{SO}(n)$ -invariants.

LEMME 2.9. — Les inclusions ${}_1\Omega_b^*(\hat{M}) \hookrightarrow \Omega_b^*(\hat{M})$ et ${}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \hookrightarrow A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ induisent des isomorphismes en cohomologie.

Preuve. — Pour la première inclusion il s'agit d'une adaptation de la preuve du théorème d'E. Cartan pour un groupe compact (voir aussi [5]). En ce qui concerne l'inclusion ${}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \rightarrow A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$, il suffit de dualiser cette démonstration. $\square$

Rappelons que la connexion de Levi-Civita transverse définit une connexion algébrique dans $\Omega_b^*(\hat{M})$ (voir A.1., cf. aussi [5]).

Il existe deux suites spectrales $E_r^{p,q}$ et $\bar{E}_r^{p,q}$, qui convergent vers $H_b^*({}_1\Omega_b^*(\hat{M}) \simeq H_b^*(\hat{M}))$, et vers $H^*({}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \simeq H^*(A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})))$ telles que :

$$E_2^{p,q} \simeq H_b^p(\hat{M}) \otimes H^q(\mathrm{SO}(n))$$

$$\bar{E}_2^{p,q} \simeq H_{\theta=0}^p(A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})) \otimes H^q(\mathrm{SO}(n)) \simeq H_{b,c}^{n-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})^* \otimes H^q(\mathrm{SO}(n))$$

La dernière identification tient compte du lemme 2.8.

On peut passer maintenant à la

Démonstration du théorème I. — Nous avons déjà vu dans le lemme 2.6. que $H_{b,c}^n(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \cong \mathbf{R}$.

L'accouplement $\hat{\phi} : \Omega_b^*(\hat{M}) \times \Omega_{b,c}^{n+n_o-*}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est tel que $\hat{\phi}(\theta_X \omega, \eta) + \hat{\phi}(\omega, \theta_X \eta) = \hat{I}(\theta_X(\omega \wedge \eta)) = 0$. Il induit donc par restriction :

$$\hat{\phi} : {}_1\Omega_b^*(\hat{M}) \longrightarrow {}_1A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}).$$

Puisque $\hat{\phi}(i_X \omega, \eta) + (-1)^{\deg \omega} \hat{\phi}(\omega, i_X \eta) = \hat{I}(i_X(\omega \wedge \eta)) = 0$, il résulte que $\hat{\phi}$ commute avec les filtrations. En particulier $\hat{\phi}$ définit un morphisme de suites spectrales $\hat{\phi}_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow \bar{E}_r^{p,q}$.

Les remarques de A.3. et de A.4. impliquent la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} & \xrightarrow{\hat{\phi}_2^{p,q}} & \bar{E}_2^{p,q} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H_b^p(M) \otimes H^q(\mathrm{SO}(n)) & \xrightarrow{\phi \otimes id} & (H_{b,c}^{n-p}(M, \mathcal{Q}))^* \otimes H^q(\mathrm{SO}(n)) \end{array}$$

On peut alors appliquer le théorème de comparaison de Moore [18] à $\hat{\phi}$. Celui-ci dit que si

(i) $\hat{\phi}^* : H_b^p(\hat{M}) \longrightarrow (H_{b,c}^{n+n_o-p}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}))^*$ est un isomorphisme pour $p \geq 0$,

(ii) $\hat{\phi}_2^{o,q} : H^o(M) \otimes H^q(\mathrm{SO}(n)) \xrightarrow{\phi \otimes id} (H_{b,c}^n(M, \mathcal{Q}))^* \otimes H^q(\mathrm{SO}(n))$ est un isomorphisme pour $q \geq 0$, alors,

$$\hat{\phi}_2^{p,0} : H_b^p(M) \otimes H^o(\mathrm{SO}(n)) \xrightarrow{\phi \otimes id} (H_{b,c}^{n-p}(M, \mathcal{Q}))^* \otimes H^o(\mathrm{SO}(n))$$

est une bijection pour tout $p \geq 0$.

La condition (i) est vérifiée par la proposition 2.4. La condition (ii) provient du lemme 2.6. On en déduit que

$$\phi : H_b^p(M) \longrightarrow H_{b,c}^{n-p}(M, \mathcal{Q})^*$$

est un isomorphisme, ce qui termine la démonstration.

Remarque 2.9. — Si M est compacte, les suites spectrales ci-dessus permettent de démontrer la finitude de $H_b^*(M)$ et de $H_b^*(M, \mathcal{Q})$ (voir [5]).

3. Dualité de de Rham.

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème II. Toutes les variétés seront supposées orientables.

Observons d'abord que pour un feuilletage de Lie complet l'application $\psi : \Omega_b^p(M) \longrightarrow C_{m-p}^{\mathfrak{F}}(M)$ est un isomorphisme (voir [8]).

Supposons $\mathfrak{F}$ parallélisable.

LEMME 3.1. — Soit $\check{U} \subset W$ difféomorphe à $\mathbb{R}^q$ et $U = \pi^{-1}(\check{U})$. Alors $\psi_U : H_b^p(U) \longrightarrow H_{n-p}^{\mathfrak{F}}(U)$ est bijectif.

Preuve. — Considérons d'abord l'intégration sur la fibre

$$f_{\check{U}} : \Omega_c^*(\check{U} \times F) \longrightarrow \Omega_c^{*-q}(F).$$

Il est clair que $f_{\check{U}}$ envoie une forme $\mathfrak{F}$ -triviale sur une forme $\mathfrak{F}$ -triviale. Puisque $f_{\check{U}} \circ d = d \circ f_{\check{U}}$, elle préserve aussi les différentielles des formes $\mathfrak{F}$ -triviales. Ainsi $f_{\check{U}}$ induit une application duale $f_{\check{U}}^* : C_{*-q}^{\mathfrak{F}}(F) \longrightarrow C_{*-q}^{\mathfrak{F}}(\check{U} \times F)$.

Une propriété de l'intégration sur la fibre assure que $\int_{\check{U} \times F} \pi^*(\omega) \wedge \eta = \int_F (\omega \wedge f_{\check{U}}^* \eta)$, où $\pi : U \times F \longrightarrow F$ est la projection naturelle. Il en résulte que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_b^*(\check{U} \times F) & \xrightarrow{\psi} & C_{m-*,*}^{\mathfrak{F}}(\check{U} \times F) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow f_{\check{U}}^* \\ \Omega_b^*(F) & \xrightarrow[\sim]{\psi} & C_{m-q-*,*}(F). \end{array}$$

Puisque $\check{U}$ est contractile, π^* induit un isomorphisme en cohomologie. Par ailleurs $f_{\check{U}}$ admet un inverse en cohomologie qui envoie $\omega \in \Omega_b^*(F)$ sur $\omega \wedge v$ où v est une l -forme fixée sur $\check{U}$ tel que $f_w v = 1$. La duale de cette application est l'inverse de f'_U en cohomologie : il suffit de suivre pas à pas la situation classique ([2]).

Le lemme résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus dans lequel trois flèches sont bijectives. $\square$

On peut énoncer à présent la

PROPOSITION 3.2. — *Le théorème II est vrai dans le cas transversalement parallélisable complet.*

Preuve. — On a vu dans le lemme 2.3. que les formes basiques $\Omega_b^*(M)$ vérifient une suite de Mayer-Vietoris. De même, on démontre, à l'aide d'une partition de 1 sur W , l'exactitude de la suite :

$$0 \longrightarrow C_*^{\mathfrak{F}}(U \cup V) \longrightarrow C_*^{\mathfrak{F}}(U) \oplus C_*^{\mathfrak{F}}(V) \longrightarrow C_*^{\mathfrak{F}}(U \cap V) \longrightarrow 0$$

où $U = \pi^{-1}(\check{U})$, $V = \pi^{-1}(\check{V})$.

Il en résulte alors du lemme des cinq que si ψ est un isomorphisme sur U , V et $U \cap V$, alors la même chose est vraie sur $U \cup V$.

On conclut à l'aide du lemme 3.1. et d'un argument identique à celui utilisé pour la dualité de Poincaré. $\square$

Considérons maintenant le cas général d'un feuilletage riemannien complet.

Le complexe $C_*^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$ des courants transverses sur le fibré des repères orthonormés $\hat{M}$ est muni des deux opérateurs obtenus en dualisant i_X et θ_X , $X \in \mathfrak{S} \mathcal{O}(n)$ (voir A.4.c.)

L'application d'intégration sur la fibre

$$f_{SO(n)} : \Omega^*(\hat{M}) \longrightarrow \Omega^{*-n_0}(M)$$

admet une duale topologique $f'_{\text{SO}(n)} : C_*(M) \longrightarrow C_{*+n_0}(\hat{M})$ qui est injective et envoie $C_*^{\mathfrak{F}}(M)$ dans $C_{*+n_0}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$. La démonstration du lemme qui suit est similaire à celle du lemme 2.8.

LEMME 3.3. — *L'image de l'application*

$$f'_{\text{SO}(n)} : C_*^{\mathfrak{F}}(M) \longrightarrow C_{*+n_0}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$$

est formée des courants $\hat{c}$ tel que $(i_X)' \hat{c} = 0$ et $(\theta_X)' \hat{c} = 0$. $\square$

Remarquons aussi que l'inclusion des courants transverses $\text{SO}(n)$ -invariants ${}_1C_*^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$ dans $C_*^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$ induit un isomorphisme en homologie. Il suffit de dualiser la démonstration du résultat correspondant pour les formes différentielles sur un fibré principal.

Passons à la

Démonstration du théorème II. — Elle sera parallèle à la preuve du théorème I, une fois justifiée l'existence d'une suite spectrale convenable pour les courants transverses (voir A.4.c.).

Posons $A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M}) = C_{m-*}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$. Soit $E_r^{p,q}$ (resp. $\bar{E}_r^{p,q}$) la suite spectrale qui converge vers $H^*({}_1\Omega_b^*(\hat{M})) = H_b^*(\hat{M})$ (resp. $H^*({}_1A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M})) = H^*(A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M}))$) (A.2. et A.4.c.).

Puisque $\hat{\psi} : \Omega_b^*(\hat{M}) \longrightarrow A_{\mathfrak{F}}^*(\hat{M})$ préserve la filtration, elle induit un morphisme de suites spectrales $\hat{\psi}_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow \bar{E}_r^{p,q}$.

En particulier on a :

$$\hat{\psi}_2^{p,q} : E_2^{p,q} \simeq H_b^p(M) \otimes H^q(\text{SO}(n)) \longrightarrow \bar{E}_2^{p,q} \simeq H_{\theta=0}^p(A^p(\hat{M})) \otimes H^q(\text{SO}(n)) = H_{m-p}^{\mathfrak{F}}(M) \otimes H^q(\text{SO}(n)).$$

Remarquons que

$$H_m^{\mathfrak{F}}(M) \simeq \bar{E}_2^{0,0} \simeq \bar{E}_{\infty}^{0,0} \simeq H_{m+n_0}^{\mathfrak{F}}(\hat{M}) \simeq H_b^0(\hat{M}) \simeq \mathbf{R}.$$

Comme $H_b^0(M) \simeq \mathbf{R}$, il résulte à l'aide des identifications de l'appendice (A.4.d.) que :

$$\hat{\psi}_2^{0,q} : H_b^0(M) \otimes H^q(\text{SO}(n)) \xrightarrow{\psi \otimes id} H_m^{\mathfrak{F}}(M) \otimes H^q(\text{SO}(n))$$

est un isomorphisme.

Par ailleurs, $\hat{\psi} : H_b^*(\hat{M}) \longrightarrow H_{m+n_0-*}^{\mathfrak{F}}(\hat{M})$ est bijectif (prop. 3.2.). On déduit alors du théorème de comparaison des suites spectrales [18] que

$$\psi_2^{p,0} : H^p(M) \otimes H^0(SO(n)) \longrightarrow H_{m-p}^{\mathfrak{g}}(M) \otimes H^0(SO(n))$$

est un isomorphisme. Il s'identifie à l'isomorphisme de de Rham cherché. $\square$

Remarque 3.4. — Le théorème II tombe en général en défaut si le feuilletage n'est pas riemannien.

Soit X un champ de vecteurs C^∞ à orbites denses sur le tore T^2 qui n'est pas C^1 conjugué à un champ linéaire (cf. [1]). Dans ce cas il n'existe pas de 1-forme basique non-nulle et $H_b^1(T^2) = 0$.

D'autre part, X est topologiquement conjugué à un flot linéaire. Il admet une mesure transverse invariante qui est un élément non-nul dans $H_1(T^2)$, donc dans $H_1^{\mathfrak{g}}(T^2)$.

Ceci contredit l'énoncé 3.12. de [12]. $\square$

Appendice.

Nous rassemblons ici les principaux résultats sur la suite spectrale d'une $\mathfrak{G}$ -A.D.G. qui possède une connexion. L'identification des termes E_r , $r = 0, 1, 2$, est faite par une méthode (connue des spécialistes) inspirée de [10]. Dans A.2., nous suivons pour ceci un exposé de séminaire de D. Lehmann. Pour une présentation différente voir [7]. L'approche utilisée ici convient à nos applications en s'étendant à des situations plus générales.

A.1. Soit $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie. On appelle $\mathfrak{G}$ -A.D.G. une algèbre différentielle graduée A munie :

— d'une application linéaire $X \mapsto i_X$ de $\mathfrak{G}$ dans les antidérivations de A de degré -1 .

— d'une représentation linéaire $X \mapsto \theta_X$ de $\mathfrak{G}$ dans les dérivations de degré 0 de A , vérifiant :

$$(i) \ i_X \circ i_X = 0$$

$$(ii) \ i_{[X,Y]} = \theta_X \circ i_Y - i_Y \circ \theta_X$$

$$(iii) \ \theta_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

On appelle connexion algébrique une application linéaire $\omega^* : \mathfrak{G}^* \longrightarrow A^1$, vérifiant pour $X \in \mathfrak{G}$, $h \in \mathfrak{G}^*$

$$(i) i_X \omega^*(h^*) = h^*(X)$$

$$(ii) \theta_X \circ \omega^* = \omega^* \circ \theta_X.$$

Exemple (Voir aussi [5]). — L'algèbre des formes basiques sur le fibré des repères orthonormés directs transverses $\hat{M}$, munie du produit intérieur et de la dérivée de Lie par rapport aux champs fondamentaux est une $\mathcal{G}$ -A.D.G. La connexion de Levi-Civita transverse induit une connexion algébrique à valeurs dans $\Omega_b^1(\hat{M})$.

A.2. Nous décrivons maintenant la suite spectrale associée à la $\mathcal{G}$ -A.D.G. A munie de la connexion ω^* .

Nous supposons l'algèbre $\mathcal{G}$ réductive de dimension n_o . Soit ${}_1A$ la sous-algèbre des éléments $\mathcal{G}$ -invariants, S la sous-algèbre des éléments semi-basiques (annulés par les opérateurs i_X) et $B = {}_1A \cap S$ leur intersection, formée des éléments basiques.

On définit sur ${}_1A$ la filtration :

$$F^p {}_1A^n = \{\omega \mid i_{X_1} \circ \dots \circ i_{X_{n-p+1}} \omega = 0, X_i \in \mathcal{G}\}.$$

Soit $C^*(\mathcal{G}; S)$ le complexe des cochaînes sur $\mathcal{G}$ à valeur dans S . C'est aussi une $\mathcal{G}$ -A.D.G.

Pour $\omega \in F^p A^{p+q}$ on pose

$$\rho(\omega)(X_1, \dots, X_q) = (i_{X_q} \circ \dots \circ i_{X_1})(\omega).$$

On définit ainsi une application $\rho : F_1^p A^{p+q} \longrightarrow {}_1C^q(\mathcal{G}; S^p)$ qui induit un isomorphisme d'algèbres graduées $\rho : E_0^{p,q} \longrightarrow {}_1C^q(\mathcal{G}; S^p)$.

Pour démontrer la surjectivité de ρ , soit $\omega^1, \dots, \omega^{n_o} \in A^1$ et $X_1, \dots, X_{n_o} \in \mathcal{G}$ une base tels que $\omega^j(X_i) = \delta_i^j$. Si $\gamma \in {}_1C^q(\mathcal{G}; S^p)$, on pose $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n_o} \omega^{i_1} \dots \omega^{i_q} \cdot \gamma(X_{i_1} \dots X_{i_q})$. On vérifie que $\rho(\alpha) = \gamma$ et que α est invariant.

Il résulte maintenant que $E_1^{p,q} \cong H^q({}_1C^*(\mathcal{G}; S^p))$. La cohomologie $H^q({}_1C^*(\mathcal{G}; S^p))$ s'identifie à son tour à $B^p \otimes {}_1C^q(\mathcal{G})$ (voir par exemple [7], III, 5.28), puisque B^p est formée des invariants de S^p .

Par ailleurs, la différentielle $d_1 : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$ s'identifie à

$$(-1)^q d \otimes id : B^p \otimes H^q(\mathcal{G}; \mathbf{R}) \longrightarrow B^{p+1} \otimes H^q(\mathcal{G}; \mathbf{R}).$$

Pour ceci soit $\gamma = b \otimes c \in B^p \otimes {}_1C^q(\mathcal{G})$. Alors $\gamma = \rho(\alpha)$

$$\text{où } \alpha = (-1)^{pq} b. \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n_0} c_{i_1, \dots, i_q} \omega^{i_q} \dots \omega^{i_1} \quad \text{et} \\ c_{i_1, \dots, i_q} = c(X_{i_1}, \dots, X_{i_q}).$$

En posant $\beta = \sum c_{i_1, \dots, i_q} \omega^{i_q} \dots \omega^{i_1}$ on démontre que $d_1 \gamma = \rho((-1)^{pq} db. \beta) = (-1)^q db \otimes c$. Il résulte de ce qui précède que

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(B) \otimes H^q(\mathcal{G}).$$

A.3. Soit A et $\bar{A}$ deux $\mathcal{G}$ -A.D.G. Un morphisme $\varphi : A \longrightarrow \bar{A}$ est un $\mathcal{G}$ -morphisme s'il commute avec les opérateurs d, i_X et θ_X .

Si $\omega^* : \mathcal{G} \longrightarrow A^1$ est une connexion, alors $\varphi \circ \omega^*$ l'est également. L'application φ induit un morphisme de suites spectrales $\varphi_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow \bar{E}_r^{p,q}$. On vérifie aisément que pour les identifications de A.2. on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} & \xrightarrow{\varphi_2^{p,q}} & \bar{E}_2^{p,q} \\ \wr \downarrow & & \downarrow \wr \\ H^p(B) \otimes H^q(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\varphi_B \otimes id} & H^p(\bar{B}) \otimes H^q(\mathcal{G}) \end{array}$$

où $\varphi_B : B \longrightarrow \bar{B}$ est le morphisme induit par φ .

A.4. Les résultats de A.2. ainsi que les remarques de A.3. s'appliquent encore aux situations suivantes :

(a) Soit $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ l'algèbre des formes basiques sur $\hat{M}$ à valeurs dans $\hat{\mathcal{Q}}$ considérée aux §.1 et §.2. Il s'agit encore d'une $\mathcal{SO}(n)$ -A.D.G. Les opérateurs i_X et θ_X sont définis de façon évidente.

On peut définir une suite spectrale, comme précédemment au A.2. Quoique $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ ne possède pas de connexion, les mêmes identifications restent valables. Il suffit d'utiliser la

connexion à valeurs dans $\Omega_b^1(\hat{M})$ et le fait que le produit d'une forme de $\Omega_b^*(\hat{M})$ et d'une forme de $\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ a un sens.

(b) Considérons le complexe dual $\text{hom}(\Omega_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}), \mathbf{R})$ et définissons le complexe $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) = \text{hom}(\Omega_{b,c}^{n+n_o-*}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}), \mathbf{R})$. La différentielle $\delta : A_{b,c}^k(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}}) \longrightarrow A_{b,c}^{k+1}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ est définie tel que $\delta(\hat{\lambda}) = (-1)^{k+1} \hat{\lambda} \circ d$.

On munit $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ des opérateurs I_X et Θ_X qui vérifient pour $\hat{\lambda} \in A_{b,c}^k(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$:

$$I_X(\hat{\lambda}) = (-1)^{k+1} \hat{\lambda} \circ i_X$$

$$\Theta_X(\hat{\lambda}) = -\hat{\lambda} \circ \theta_X.$$

Les opérateurs δ, I_X et Θ vérifient les relations (i)-(iii) de A.1. et $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ devient un $\mathcal{SO}(n)$ -module différentiel gradué.

Remarquons que pour $\hat{\lambda} \in A_{b,c}^q(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ et $\omega \in \Omega_b^p(\hat{M})$ on peut définir leur produit $\hat{\lambda} \cdot \omega = \hat{\lambda}_\omega \in A_{b,c}^{p+q}(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$ tel que $\hat{\lambda}_\omega(\eta) = \hat{\lambda}(\omega \wedge \eta)$.

On vérifie que si on construit une suite spectrale comme au A.2., toutes les identifications restent valables pour le $\mathcal{SO}(n)$ -module $A_{b,c}^*(\hat{M}, \hat{\mathcal{Q}})$.

(c) Soit $C_{\sharp}^*(\hat{M})$ le complexe des courants transverses (cf. §.1) sur $\hat{M}$. Posons $A_{\sharp}^*(\hat{M}) = C_{m+n_o-*}^{\sharp}(\hat{M})$. On munit $A_{\sharp}^*(\hat{M})$ des opérateurs duaux δ, I_X et Θ_X qui vérifient pour $\hat{c} \in A_{\sharp}^k(\hat{M})$:

$$\delta(\hat{c}) = (-1)^{k+1} \hat{c} \circ d$$

$$I_X(\hat{c}) = (-1)^{k+1} \hat{c} \circ i_X$$

$$\Theta_X(\hat{c}) = -\hat{c} \circ \theta_X$$

$A_{\sharp}^*(\hat{M})$ devient ainsi un $\mathcal{SO}(n)$ -module différentiel gradué.

Le produit d'un courant transverse invariant avec une forme basique est un courant invariant et on a, ici aussi, un analogue de la suite spectrale de A.2., avec les mêmes identifications de ses termes.

(d) Des considérations similaires à celles de A.3. sont valables pour les complexes de A.4.a.-A.4.c. Ceci s'applique notamment aux $\mathcal{SO}(n)$ -morphisms $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ du §.2 et §.3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V.I. ARNOLD, Small denominators. I. On maps of the circle onto itself, *Izv. Acad. Sci. USSR., Ser. Mat.*, 25, 1 (1961), 21-86.
- [2] R. BOTT, L. TU, Differential forms in Algebraic Topology, *Graduate texts*, n° 82, Springer-Verlag (1982).
- [3] G.E. BREDON, Sheaf theory, *Mac Graw Hill Series in Higher Math.*, (1967).
- [4] Y. CARRIERE, Flots riemanniens. Journées S.M.F. sur les structures transverses, *Astérisque*, 116 (1984).
- [5] A. EL-KACIMI, V. SERGIESCU, G. HECTOR, La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie, *Mathematische Zeitschrift*, 118 (1985), 593-599.
- [6] A. EL-KACIMI, G. HECTOR, Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien, *Ann. Inst. Fourier*, 36-2 (1986), (à paraître).
- [7] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, *Connections, curvature and cohomology*, Academic Press, (1973-1975).
- [8] A. HAEFLIGER, Some remarks on foliations with minimal leaves, *Journal. Diff. Geom.*, 15 (1980), 269-284.
- [9] A. HATTORI, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fiber bundles, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I*, VIII (1960), 289-331.
- [10] G. HOCHSCHILD, J.P. SERRE, Cohomology of Lie Algebras, *Ann. of Math.*, 57 (1953), 591-603.
- [11] F. KAMBER, P. TONDEUR, Duality for Riemannian foliations, *Proc. Symp. Pure Math.*, 40 (1983).
- [12] F. KAMBER, P. TONDEUR, *Foliations and metrics* in "Differential Geometry", Ed. Brooks, Gray, Reinhart, Birkhäuser (1983).
- [13] P. MOLINO, Feuilletages transversalement complets et applications, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 10 (1977), 289-307.
- [14] P. MOLINO, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, *Proc. Kon. Nederl. Akad., Ser. A.*, 1, 85 (1982), 45-76.

- [15] P. MOLINO, Feuilletages riemanniens, *Cours de III^e cycle*, Montpellier (1983).
- [16] B. REINHART, Harmonic integrals on foliated manifolds, *Am. J. of Math.*, (1959), 529-536.
- [17] B. REINHART, Differential geometry of foliations, *Ergebnisse der Mathematik*, n° 99, Springer-Verlag (1983).
- [18] Séminaire H. Cartan, E.N.S., (1954-1955), exp. 3.

Manuscrit reçu le 9 juillet 1984.

Vlad SERGIESCU,
Université des Sciences et Techniques
de Lille I
UER de Mathématiques Pures et Appliquées
59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex.