ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ GALLIGO
MICHEL GRANGER
PHILIPPE MAISONOBE

$\mathcal{D}$-modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 1 (1985), p. 1-48
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_1_1_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 1 (1985), 1-48

$\mathcal{D}$ -MODULES ET FAISCEAUX PERVERS DONT LE SUPPORT SINGULIER EST UN CROISEMENT NORMAL

par A. GALLIGO, M. GRANGER, et Ph. MAISONOBE

PLAN

pages

Introduction 2

Notations 5

Chapitre I. – Généralités sur les faisceaux pervers. 6

I.1. Définition 6
I.2. Autre formulation des conditions de perversité 7
I.3. Exemples. 7

Chapitre II. – Faisceaux pervers à une variable relativement à la stratification $\Sigma_1 = \mathbf{C} - \{0\}$ $\Sigma_0 = \{0\}$ 8

II.1. Etude du triangle $R\Gamma_K \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\Gamma_{\mathbf{C}-K} \mathcal{F}^\bullet$. 8
II.2. Théorème d'équivalence de catégories 11

Chapitre III. – Faisceaux pervers relativement à un croisement normal. Hypercube formé par certains complexes de cohomologie à support 15

III.1. Notations et définitions 15
III.2. Les sommets de l'hypercube sont des faisceaux 17
III.3. Description de l'hypercube des faisceaux. 19

Mots-clefs : $\mathcal{D}$-modules, Faisceaux pervers, Catégories dérivées.

Chapitre IV. – Théorème d'équivalence de catégories..... 29

IV.1. Définition du foncteur α..... 29
IV.2. Définition du foncteur β..... 30
IV.3. α est une équivalence de catégorie et admet β comme quasi-inverse 35

Appendice..... 41

A.1. Triangles et suites exactes courtes scindées de complexes..... 41
A.2. Exemples et remarques dans un cas particulier 44

Bibliographie..... 47

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de généraliser en dimension supérieure la remarque de B. Malgrange selon laquelle un $\mathcal{D}$-Module holonome M sur un petit disque $X \subset \mathbf{C}$, à singularité régulière à l'origine est défini à isomorphisme près par les couples d'espaces vectoriels de dimension finie :

$$E = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(M(X), \mathcal{O}\,(D - \mathbf{R}^+)) \quad F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(M(X), \frac{\mathcal{O}(D - \mathbf{R}^+)}{\mathcal{O}\,(D)}\right)$$

correspondant aux solutions holomorphes et microfonctions, reliées par le morphisme canonique $u : E \longrightarrow F$ et le morphisme variation $v : F \longrightarrow E$ qui vérifient la condition : $\mathrm{Id} + v\,u$ est un isomorphisme. Dans [1], on trouve une approche naturelle de ce point de vue.

Soit X un polydisque ouvert, centré en zéro de $\mathbf{C}^n$ et muni de coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ et soit T le croisement normal d'équation $z_1 \ldots z_n = 0$. Notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X ; $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}_X$; $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-Modules holonomes à singularité régulière, dont la variété caractéristique

se projette sur T ; $\mathcal{C}_n$ la catégorie des n-hypercubes de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie $\{F_I, I \subset \{1, 2, \ldots, n\}\}$ reliés par deux familles d'applications linéaires $F_I \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} F_{I \cup \{i\}}$ assujettis à certaines conditions de commutativité : $u_i u_j = u_j u_i$, $v_i v_j = v_j v_i$, $u_i v_j = v_j u_i$ et tels que $\mathrm{Id} + v_i u_i$ soit un isomorphisme. Nous démontrons le théorème suivant :

THEOREME. — *Il existe une équivalence de catégorie entre* $(\mathcal{D}_X^T)_{hr}$ et $\mathcal{C}_n$.

On sait ([2], [7], [11]) que le foncteur "solution" :

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Sol}(\mathcal{M}) = R\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$$

établit une équivalence de catégorie entre $(\mathcal{D}_X)_{hr}$ la catégorie des $\mathcal{D}$-Modules holonomes à singularité régulière et la catégorie Perv(X) des faisceaux pervers (sous catégorie pleine de la catégorie $D_c^b(\mathbf{C}_X)$ des complexes bornés de faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sur X à cohomologie constructible). En I.1, nous décrivons $\mathrm{Sol}((\mathcal{D}_X^T)_{hr})$ noté $\mathrm{Perv}^T(X)$ et notre travail va consister à construire une équivalence de catégorie entre $\mathrm{Perv}^T(X)$ et $\mathcal{C}_n$.

Chapitre I : Nous décrivons $\mathrm{Perv}^T(X)$.

Chapitre II ; Nous démontrons dans le cas $X = \mathbf{C}$, $T = \{0\}$ l'équivalence de catégorie entre $\mathrm{Perv}^{\{0\}}(\mathbf{C})$ et $\mathcal{C}_1$. Pour cela, nous utilisons l'idée de B. Malgrange qui consiste à considérer une coupure $K = \mathbf{R}^+$ de $\mathbf{C}$ et le triangle :

$$R\,\Gamma_K \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\,\Gamma_{\mathbf{C}-K} \mathcal{F}^\bullet .$$

Chapitre III : Posons $\mathbf{C}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{C}_i$, $K_i = \mathbf{R}^+ \subset \mathbf{C}^i$, $V_i = \mathbf{C}_i - \mathbf{R}^+$.

Considérons les triangles

$$R\,\Gamma_{Z_{I \cup \{i\}}} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\,\Gamma_{\prod_{j \in I} K_j \times \mathbf{C}_i \times \prod_{j \notin I \cup \{i\}} V_j} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\,\Gamma_{Z_I} \mathcal{F}^\bullet ,$$

où $Z_I = \prod_{i \in I} K_i \times \prod_{j \notin I} V_j$ et $\mathcal{F}^\bullet$ appartient à $\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n)$.

Ces triangles font partie d'une configuration de triangle du type hypercube reliant 3^n complexes et dont $\mathcal{F}^\bullet$ est le centre. Pour l'étudier, nous nous plaçons dans une situation avec paramètres et raisonnons par récurrence. Nous démontrons ainsi que $R\,\Gamma_{Z_I}\,\mathcal{F}^\bullet$ est concentré en degré $|I|$. $\widetilde{\mathcal{F}}_I = R^{|I|}\,\Gamma_{Z_I}\,\mathcal{F}^\bullet$ étant localement constant sur certaines strates par un bon choix d'isomorphismes, on décrit ce faisceau par sa restriction à ces strates, ainsi que les morphismes cobords

$$U_i : R\,\Gamma_{Z_I}\,\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\,\Gamma_{Z_{I\cup\{i\}}}\,\mathcal{F}^\bullet .$$

Chapitre IV : A un élément $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n)$, on associe l'élément de $\mathcal{C}_n$: $\{F_I, u_i, v_i\}$, où

$$F_I = (R^{|I|}\,\Gamma_{Z_I}\mathcal{F}^\bullet)_0 = (\widetilde{\mathcal{F}}_I)_0 , \quad u_i = (U_i)_0$$

et où v_i est un morphisme de recollement de $\widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n}$ entre deux strates. On définit ainsi un foncteur α, dont on montre que c'est une équivalence de catégories et dont on exhibe un quasi inverse. Techniquement, on remplace les triangles ci-dessus par des suites exactes courtes scindées auxquelles nous appliquons les résultats de l'appendice et plus particulièrement la proposition A.1.4.

La commutativité des foncteurs $R\,\mathcal{H}om\,(\mathcal{M}, \cdot)$ et $R\,\Gamma_Z$ nous permet de traduire en termes de $\mathcal{D}$-Modules notre résultat : voir le compte rendu de notre exposé dans [10] où sont aussi décrits les objets de $\mathcal{C}_n$ correspondant à des complexes du type I.C. ([4]) et en particulier les objets simples.

En cours de rédaction nous avons pris connaissance du manuscrit de J.L. Verdier [15] sur un sujet voisin et de la lettre de P. Deligne à R. Mac Pherson où est conjecturé le résultat que nous démontrons. Remercions pour finir J.L. Brylinski, B. Malgrange, Z. Mebkhout et F. Pham pour les discussions intéressantes échangées avec eux au cours de ce travail.

NOTATIONS

X	variété analytique complexe
$\mathbf{C}_X$	catégorie des faisceaux d'espaces vectoriels
$K(\mathbf{C}_X)$	catégorie des complexes d'objets de $\mathbf{C}_X$ avec morphisme défini à homotopie près
$D(\mathbf{C}_X)$	catégorie dérivée associée
$D^b(\mathbf{C}_X)$	(resp. $D^b_c(\mathbf{C}_X)$) sous-catégorie pleine des objets bornés (resp. à cohomologie constructible)
•	Pour $\mathcal{F}^\bullet$ objet de $K(\mathbf{C}_X)$ (ou $D(\mathbf{C}_X)$), on note :
$h^i(\mathcal{F}^\bullet)$	son $i^{\text{ème}}$ faisceau de cohomologie
$\mathcal{F}^\bullet_x$	sa fibre en un point x de X
$\mathcal{F}^\bullet[k]$	complexe égal à $\mathcal{F}^{k+n}$ en degré n dont la différentielle est celle de $\mathcal{F}^\bullet$ multipliée par $(-1)^k$

On dira que $\mathcal{F}^\bullet$ est concentré en degré n (resp. borné à gauche en degré $\geqslant n$) (resp. borné entre les degrés m et n) si $h^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour $i \neq n$ (resp. $i < n$) (resp. $i < m$ et $i > n$)

Q is	quasi-isomorphismes entre objets de $K(\mathbf{C}_X)$
$\underline{E}$	faisceau constant de fibre E

Rappelons que le complexe dualisant de $\mathbf{C}_X$ est: $D_X = \mathbf{C}_X\,[2n]$, ou $n = \dim_{\mathbf{C}} X$. Le dual de Verdier de $\mathcal{F}^\bullet$ est :

$$R\mathcal{H}om\,(\mathcal{F}^\bullet, D_{\mathbf{C}^n}) = R\mathcal{H}om\,(\mathcal{F}^\bullet, \mathbf{C})\,[2n]$$

On note $\mathcal{F}^{\bullet\vee} = R\mathcal{H}om\,(\mathcal{F}^\bullet, \mathbf{C})$
$= D\,(\mathcal{F}^\bullet)\,[-2n]$

Γ_A	foncteur de $\mathbf{C}_X \longrightarrow \mathbf{C}_X$ est égal pour A fermé au foncteur section à support A et pour A ouvert à $i_* i^{-1}$ où $i : A \longrightarrow X$ est l'inclusion ouverte
Γ_A	est aussi défini pour les localement fermés de façon que $\Gamma_A\,\Gamma_B = \Gamma_{A \cap B}$.
$R\,\Gamma_A$	foncteur dérivé de Γ_A ($R\,\Gamma_A\,R\,\Gamma_B = R\,\Gamma_{A \cap B}$)
•	Dans tout ce travail les triangles dans $D(\mathbf{C}_X)$ sont notés «à plat» : $A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet$, ou simplement

$$\begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[r] & B^\bullet \arrow[r] & C^\bullet \arrow[ll, bend left, "+1"] \end{tikzcd}$$

- Pour I partie de $\{1, \ldots, n\}$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$: $|I| = \# I = k$

$\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des parties de I

- Un hypercube de dimension n : $\{0,1\}^n$ est indexé par $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$

— Une face de cet hypercube est indexée par une partition $\{I, J, L\}$ de $\{1, \ldots, n\}$. Cette face est

$$\langle I, J, L\rangle = \{I_1, I \subset I_1 \subset I \cup J\}$$

Nous commettrons systématiquement l'abus de notation consistant par exemple à écrire :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{j \in I} K_i \times \prod_{j \in J} V_j \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_i \in K_i & \text{si} \quad i \in I \\ x_i \in V_i & \text{si} \quad i \in J \end{cases}.$$

I. GENERALITES SUR LES FAISCEAUX PERVERS

I.1. Définitions.

Soix X une variété analytique complexe lisse de dimension n et Σ une stratification analytique complexe de Whitney de X,

$$X = \bigcup_{0 \leq j \leq n} \Sigma_j$$

Σ_j est la strate lisse de dimension complexe j.

Un complexe $\mathcal{F}^\bullet$ de $D(\mathbf{C}_X)$ est dit à cohomologie constructible relativement à Σ si pour tout entier i, $h^i(\mathcal{F}^\bullet)$, le $i^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de $\mathcal{F}^\bullet$, vérifie :

$$\forall j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad h^i(\mathcal{F}^\bullet) \,|\, \Sigma_j$$

est un système local.

I.1.1 Definition. — *Un élément $\mathcal{F}^\bullet$ de $D(\mathbf{C}_X)$ à cohomologie constructible relativement à Σ est dit pervers relativement à Σ si les conditions* Aa, Ab, B *sont vérifiées :*

Aa) $\forall i \notin \{0, 1, \ldots, n\} \quad h^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$

Ab) *le support du faisceau* $h^i(\mathcal{F}^\bullet)$ *est contenu dans* $\overline{\Sigma}_{n-i} = \bigcup_{0 \leq j \leq n-i} \Sigma_j$

B) *mêmes conditions que* Aa *et* Ab *en remplaçant* $\mathcal{F}^\bullet$ *par* $R\,\mathcal{H}om(\mathcal{F}^\bullet, \mathbf{C}_X) = \mathcal{F}^\vee$.

Notation. – On note $\mathrm{Perv}^\Sigma(X)$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathbf{C}_X)$ formée des complexes pervers relativement à Σ.

I.2. Autre formulation des conditions de perversité.

La dualité de Verdier [14] permet d'établir que la fibre en x de $\mathcal{F}^\vee$ est $\mathrm{Hom}\,(j_x^{-1} R\Gamma_{\{x\}}\mathcal{F}^\bullet, \mathbf{C})\,[-2n]$ où j_x désigne l'inclusion : $x \xhookrightarrow{j_x} X$. On en déduit facilement la proposition suivante :

I.2.1 Proposition. – *Un complexe* $\mathcal{F}^\bullet$ *de* $D(\mathbf{C}_X)$ *à cohomologie constructible relativement à* Σ *appartient à* $\mathrm{Perv}^\Sigma(X)$ *si les conditions* Aa, Ab *et* B bis *sont vérifiées :*

Aa) $\forall\, i \notin \{0, 1, \ldots, n\}\ h^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$

Ab) *le support du faisceau* $h^i(\mathcal{F}^\bullet)$ *est contenu dans* $\overline{\Sigma}_{n-i} = \bigcup_{0 \leq j \leq n-i} \Sigma_j$

B bis) $\forall\, j \geqslant 1, \forall\, x \in \Sigma_{n-j}, \forall\, k \in \{2n-2j, \ldots, 2n-j-1\}$
$(R^k\Gamma_{\{x\}}\mathcal{F}^\bullet)_x = 0$
(*donc* $\forall\, k \in \{0, \ldots, 2n-j-1\}$).

On peut remplacer B bis par une condition équivalente :

B ter) $(R\Gamma_{\Sigma_{n-j}}\mathcal{F}^\bullet)\,|_{\Sigma_{n-j}}$ *est concentré en degré* $\geqslant j$.

I.3. Exemples.

I.3.1. $X = \mathbf{C}, \Sigma_0 = \mathbf{C} - \{0\}, \Sigma_1 = \{0\}$: $\mathcal{F}^\bullet$ est pervers relativement à cette stratification si

a) les seuls groupes de cohomologie de $\mathcal{F}^\bullet$ non nuls sont $h^0(\mathcal{F}^\bullet)$ et $h^1(\mathcal{F}^\bullet)$

b) $h^0(\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbf{C}-\{0\}}$ est un système local
$h^0(\mathcal{F}^\bullet)_0$ est un espace vectoriel de dimension finie

c) $h^1(\mathcal{F}^\bullet)$ est à support l'origine
$h^1(\mathcal{F}^\bullet)_0$ est un espace vectoriel de dimension finie

d) $h^0(\mathcal{F}^\bullet)$ n'a pas de section à support l'origine

I.3.2.

$X = \mathbf{C}^2, \Sigma_0 = (\mathbf{C}-\{0\})^2, \Sigma_1 = \mathbf{C}-\{0\}\times\{0\} \cup \{0\}\times\mathbf{C}-\{0\}, \Sigma_2 = \{0\}$

Les conditions de perversité impliquent encore que $h^0(\mathcal{F}^\bullet)$ n'a pas de section à support fermé strict ainsi que le principe des singularités inexistantes pour $h^0(\mathcal{F}^\bullet) = h^0$

$$R^1\Gamma_{\{0\}}h^0 = \frac{h^0(\mathbf{C}^2)}{h^0(\mathbf{C}^2-\{0\})} = 0.$$

II. FAISCEAUX PERVERS A UNE VARIABLE RELATIVEMENT A LA STRATIFICATION $\Sigma_1 = \mathbf{C}-\{0\}$, et $\Sigma_0 = \{0\}$

Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un tel faisceau pervers, posons $K = \mathbf{R}^+$ et notons h^0 et h^1 ses groupes de cohomologie (les conditions de perversité utilisées ont été détaillées en I.3.1).

II.1. Etude du triangle $R\Gamma_K\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R\Gamma_{\mathbf{C}-K}\mathcal{F}^\bullet$.

Etude de $R\Gamma_{\mathbf{C}-K}\mathcal{F}^\bullet$: soit $i : \mathbf{C}-K \longrightarrow \mathbf{C}$ l'inclusion ouverte,

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\mathbf{C}-K}\mathcal{F}^\bullet &= Ri_*(i^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \\ &= Ri_*(i^{-1}h^0). \end{aligned}$$

En effet h^1 est à support l'origine. De plus, comme $h^0|_{\mathbf{C}-\{0\}}$ est un système local, $i^{-1}h^0$ est un faisceau constant et donc :

$$\forall k \geqslant 1,\ \forall x \in \mathbf{C},\ (R^k\Gamma_{\mathbf{C}-K}\mathcal{F}^\bullet)_x = \varinjlim_{\substack{x\in U \\ U \text{ ouvert}}} H^k(U-K,\ i^{-1}h^0) = 0.$$

Par suite : $$R\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet} = i_*(i^{-1}\,h^0).$$

Notation. – $E = (R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet})_0$.

$i^{-1}\,h^0$ s'identifie à $\underline{E}$ faisceau constant sur $\mathbf{C}-K$ de fibre E. On a donc obtenu le lemme :

II.1.1. LEMME. – $$R\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet} \cong R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet} \quad (\cong R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,h^0)$$
$$\cong i_*(\underline{E}),$$

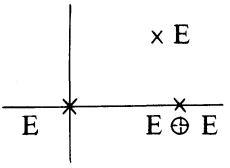
d'où $\forall\, x \in \mathbf{C}-K,\ (R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet})_x \cong E$

$\forall\, x \in K-\{0\},\ (R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet})_x \cong E \oplus E$.

Précisons le dernier isomorphisme. Soit x appartenant à $K-\{0\}$ et x^+ (resp. x^-) un point au-dessus (resp. en-dessous) et voisin de x, soit s un germe en x de $R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet}$. s définit un germe de $R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet}$ en x^+ (resp. en x^-), d'où par prolongement une section de h^0 sur $\mathbf{C}-K$, c'est-à-dire une section globale de $R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet}$ dont on notera s_1 (resp. s_2) la fibre à l'origine .

Le morphisme cherché est :

$$(R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet})_x \longrightarrow E \oplus E$$
$$s \longmapsto s_1 \oplus s_2$$



$R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet} \cong i_*(\underline{E})$:

Etude de $R\,\Gamma_K\,\mathcal{F}^{\bullet}$: $R^0\,\Gamma_K\,\mathcal{F}^{\bullet} \cong \Gamma_K\,h^0$

Or $\Gamma_K\,h^0 = \Gamma_{\{0\}}h^0$ car $h^0\,|_{\mathbf{C}-\{0\}}$ est un système local

$= 0$ vu les conditions de perversité.

La suite exacte longue de cohomologie de notre triangle se réduit donc à :

$$0 \longrightarrow h^0 \xrightarrow{\rho} R^0\,\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{F}^{\bullet} \xrightarrow{U} R^1\Gamma_K\,\mathcal{F}^{\bullet} \longrightarrow h^1 \longrightarrow 0.$$

Notation. – $F = (R^1\,\Gamma_K\,\mathcal{F}^{\bullet})_0$.

Pour x non nul, $(h^1)_x = 0$ et donc $(R^1\,\Gamma_K\,\mathcal{F}^{\bullet})\,|_{\mathbf{C}-\{0\}}$ est le conoyau du morphisme $\rho\,|_{\mathbf{C}-\{0\}}$.

En dehors de K, ρ est un isomorphisme, d'où

$$\forall x \in \mathbf{C} - \mathrm{K} \quad (\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_x = 0.$$

$h^0|_{\mathbf{C}-\{0\}}$ s'identifie au système local défini par E et par un morphisme $\mathrm{M} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ obtenu à partir de la monodromie de h^0. Lorsque x appartient à $\mathrm{K} - \{0\}$, on se donne une identification de $(h^0)_x$ avec E ; prenons s un élément de $(h^0)_x$; s définit localement s_{x^+}, un germe en x^+ (point voisin et au-dessus de x) de h^0, d'où en appliquant ρ :

$$\rho_{x^+}(s_{x^+}) \in (\mathrm{R}^0 \Gamma_{\mathbf{C}-\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_{x^+} \cong \mathrm{E}.$$

Muni de cette identification, pour tout x de $\mathrm{K} - \{0\}$, on obtient le diagramme suivant entre deux suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (h^0)_x & \longrightarrow & (\mathrm{R}^0 \Gamma_{\mathbf{C}-\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_x & \xrightarrow{\mathrm{U}_x} & (\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_x & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \oplus \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} & \longrightarrow & 0 \\
 & & e & \longmapsto & e \oplus \mathrm{M}^{-1} e & & (e, f) & \longmapsto & \mathrm{M}f - e
\end{array}$$

Ce diagramme définit donc un isomorphisme : $\forall\, x \in \mathrm{K} - \{0\}$ $(\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_x \cong \mathrm{E}$.

On a établi en particulier le lemme suivant :

II.1.2. Lemme. –

$$\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet} \cong \mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet} \; [-1]$$

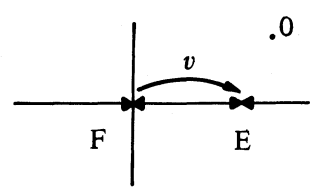
$$\forall x \in \mathbf{C} - \mathrm{K} \qquad (\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_x = 0$$

$$\forall x \in \mathrm{K} - \{0\} \qquad (\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_x \cong \mathrm{E}$$

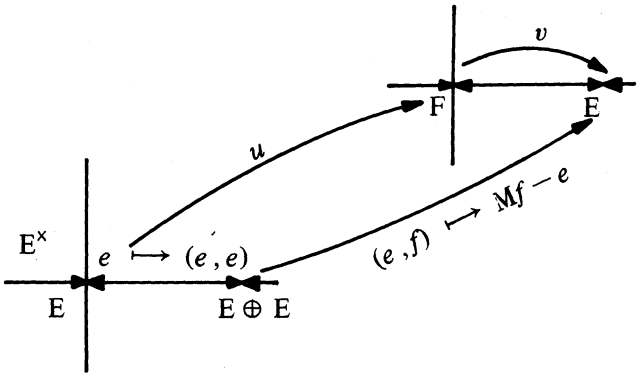
$(\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet})_{|\mathrm{K}-\{0\}}$ *est isomorphe à* $\underline{\mathrm{E}}$ *faisceau constant de fibre* E *sur* $\mathrm{K} - \{0\}$.

Notation. – Soit v le morphisme de F dans E permettant de recoller les trois faisceaux constants : $\underline{0}$ sur $\mathbf{C} - \mathrm{K}$, $\underline{\mathrm{E}}$ sur $\mathrm{K} - \{0\}$, F sur $\{0\}$, en un faisceau sur $\mathbf{C}$ isomorphe à $\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet}$.

$\mathrm{R}^1 \Gamma_{\mathrm{K}} \mathcal{F}^{\bullet}$



Notation. – Notons $u : E \longrightarrow F$ la fibre à l'origine du morphisme de cobord $U : R^0 \Gamma_{\mathbf{C}-K} \mathcal{F}^{\bullet} \longrightarrow R^1 \Gamma_K \mathcal{F}^{\bullet}$.



Le fait que U soit un morphisme de faisceau se traduit par : $M = \mathrm{Id} + v \circ u$.

II.2. Théorème d'équivalence de catégories.

II.2.1. *Définition du foncteur* α

Avec les notations de II.1, la correspondance :

$$\mathcal{F} \longrightarrow E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$$

définit un foncteur de $\mathrm{Perv}^{\Sigma}(\mathbf{C})$ vers $\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ désigne la catégorie dont les objets sont les diagrammes $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$ entre espaces vectoriels de dimension finie, tel que $\mathrm{Id} + v \circ u$ est inversible.

II.2.2. *Définition du foncteur* β

Soit $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$ un objet de $\mathcal{C}$. Notons toujours i l'inclusion ouverte $\mathbf{C} - K \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbf{C}$.

- Définition de $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = i_*(\underline{E})$, où $\underline{E}$ désigne le faisceau constant de fibre E sur $\mathbf{C} - K$.

- Définition de $\mathcal{B}$: On note $\mathcal{B}$ le faisceau obtenu en recollant par v : $\underline{E}$ faisceau constant de fibre E sur $K - \{0\}$ et F à l'origine, pour obtenir un faisceau sur $\mathbf{C}$ à support K.
- Définition du morphisme U : Il existe un unique morphisme de faisceau noté $U : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, dont les fibres vérifient : $U_0 = u$, pour tout x de $K - \{0\}$, U_x s'identifie au morphisme $E \oplus E \longrightarrow E$ $(e, f) \longmapsto (\mathrm{Id} + v \circ u) f - e$.

PROPOSITION ET DEFINITION. – *Avec les notations précédentes, la correspondance*

$$\beta : E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F \rightsquigarrow \ldots 0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathcal{B} \longrightarrow 0 \ldots$$

définit un foncteur de $\mathcal{C}$ *vers* $\mathrm{Perv}^{\Sigma}(\mathbf{C})$, ($\mathcal{A}$ *est placé dans le complexe en degré zéro*).

Preuve. – La construction est bien fonctorielle et on laisse au lecteur le soin de vérifier, en utilisant les conditions de perversité données en I.3.1, que $\beta(E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F)$ est bien pervers.

II.2.3. THEOREME. – α *est une équivalence de catégorie admettant* β *comme quasi-inverse.*

Preuve du théorème. 1) Montrons tout d'abord que $\alpha \circ \beta$ est un foncteur isomorphe au foncteur identité.

Posons

$$\mathcal{F}^{\bullet} = \beta(E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F) = \ldots 0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{U} \mathcal{B} \longrightarrow 0 \ldots$$

(avec les notations précédentes). On a donc la suite exacte courte scindée (voir pour la définition A.1.1) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}[-1] \longrightarrow \mathcal{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow 0. \qquad (1)$$

Considérons $J_2^{\bullet}$ et $J_1^{\bullet}$ des résolutions injectives canoniques de $\mathcal{B}[-1]$ et $\mathcal{A}$. Le corps de base étant $\mathbf{C}$, il s'agit d'une résolution flasque canonique. La résolution flasque canonique de $\mathcal{F}^{\bullet}$ est le

complexe simple associé au complexe double $J_1^\bullet \xrightarrow{U} J_2^\bullet$ et on a un morphisme de suites exactes courtes de complexes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}\,[-1] & \longrightarrow & \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & J_2^\bullet & \longrightarrow & J^\bullet & \longrightarrow & J_1^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2}$$

On peut faire les deux remarques suivantes :

– Le support de $\mathcal{B}$ étant contenu dans K, ainsi que celui de $J_2^\bullet$, on a : $J_2^\bullet : \Gamma_K J_2^\bullet = J_2^\bullet$ et $\Gamma_{\mathbf{C}-K} J^\bullet = \Gamma_{\mathbf{C}-K} J_1^\bullet$.

– D'après la définition de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \longrightarrow R\Gamma_{\mathbf{C}-K}\,\mathcal{A}$ est un isomorphisme dans $D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}})$, donc $J_1^\bullet \longrightarrow \Gamma_{\mathbf{C}-K} J_1^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

Ainsi, on a un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & J_2^\bullet = \Gamma_K J_2^\bullet & \xrightarrow{a} & J^\bullet & \longrightarrow & J_1^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Gamma_K a & & \downarrow = & & \downarrow \text{Q is} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_K J^\bullet & \longrightarrow & J^\bullet & \longrightarrow & \Gamma_{\mathbf{C}-K}\ J_1^\bullet = \Gamma_{\mathbf{C}-K} J^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{3}$$

Les isomorphismes (2) et (3) définissent des isomorphismes de triangles dans $D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}})$. La considération des suites exactes longues de cohomologie de ces triangles permet d'écrire un diagramme commutatif dépendant fonctoriellement de $E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad U \quad} & \mathcal{B} \\ \downarrow \cong \varphi & & \downarrow \cong \psi \\ \mathcal{A}' = R^0 \Gamma_{\mathbf{C}-K}\, \mathcal{F}^\bullet & \xrightarrow{U'} & R^1 \Gamma_K \mathcal{F} = \mathcal{B}' \end{array} \tag{4}$$

Par définition de $\alpha \circ \beta\,(E \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} F) = E' \underset{v'}{\overset{u'}{\rightleftarrows}} F'$, on a :

$$E' = \mathcal{A}'_0 \quad \text{et} \quad F' = \mathcal{B}'_0$$

et $(\varphi_0, \psi_0) : (E, F) \longrightarrow (E', F')$ définit un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, car $\psi_0\, u = u'\, \varphi_0$ et la relation $v'\, \psi_0 = \varphi_0\, v$ résulte facilement de la description de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ et de la considération de (4).

2) Montrons enfin que $\beta \circ \alpha$ est isomorphe au foncteur identité.

Soit $\mathcal{F}^\bullet$ un objet de $\mathrm{Perv}^\Sigma(\mathbf{C})$, $I^\bullet$ sa résolution injective canonique et $J^\bullet$ la résolution injective canonique de $\beta \circ \alpha(\mathcal{F}^\bullet)$. Les faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ construits à partir de $\alpha(\mathcal{F}^\bullet)$ (voir II.2.2) s'identifient à $R^0 \Gamma_{\mathbf{C}-K} \mathcal{F}^\bullet$ et $R^1 \Gamma_K \mathcal{F}^\bullet$, et le diagramme (4) (en y remplaçant $\mathcal{F}^\bullet$ par $\alpha \circ \beta(\mathcal{F}^\bullet)$) conduit à un diagramme commutatif dans $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}})$ entre complexes de faisceaux injectifs :

$$\begin{tikzcd} \Gamma_{\mathbf{C}-K} I^\bullet \arrow[r, "U"] \arrow[d, "\varphi_3"] & \Gamma_K I^\bullet[-1] \arrow[d, "\varphi_1"] \\ \Gamma_{\mathbf{C}-K} J^\bullet \arrow[r, "U'"] & \Gamma_K J^\bullet[-1] \end{tikzcd} \tag{4'}$$

D'après la proposition A.1.4, il existe un morphisme $\varphi_2 : I^\bullet \longrightarrow J^\bullet$ tel que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ soit un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma_K I^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & I^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & \Gamma_{\mathbf{C}-K} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Gamma_K J^\bullet \arrow[r] & J^\bullet \arrow[r] & \Gamma_{\mathbf{C}-K} J^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après A.1.4b, φ_2 est unique modulo un élément de

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}})}(\Gamma_{\mathbf{C}-K} I^\bullet, \Gamma_K J^\bullet),$$

donc est bien unique car :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}})}(\Gamma_{\mathbf{C}-K} I^\bullet, \Gamma_K J^\bullet) \\ &\qquad = h^0(R\,\mathrm{Hom}(R^0 \Gamma_{\mathbf{C}-K} \mathcal{F}^\bullet, R^1 \Gamma_K(\beta \circ \alpha\, \mathcal{F}^\bullet))[-1]) \\ &\qquad = 0; \end{aligned}$$

φ_2 définit ainsi un isomorphisme fonctoriel entre $\mathcal{F}^\bullet$ et $\beta \circ \alpha(\mathcal{F}^\bullet)$.

Remarque. – On peut recopier cette démonstration pour classifier les faisceaux pervers sur $\mathbf{C}$ relativement à la stratification $\Sigma_1 = \mathbf{C} - \Sigma_0$, où $\Sigma_0 = \{a_1, \ldots, a_p\}$ est un ensemble de p points distincts.

III. FAISCEAUX PERVERS RELATIVEMENT A UN CROISEMENT NORMAL. HYPERCUBE FORME PAR CERTAINS COMPLEXES DE COHOMOLOGIE A SUPPORT

On pose $X = \mathbf{C}^n \times S$, où S désigne une variété analytique complexe lisse. Soit T le croisement normal d'équation :

$$T : z_1 \ldots z_n = 0 .$$

On peut définir sur X une stratification naturelle relative à T (Sing Y désignant la partie singulière d'une variété analytique Y) : $X = \bigcup_{0 \leq j \leq n} \Sigma_{j+\dim S}$, où

$$\Sigma_{n+\dim S} = (\mathbf{C}^n - T) \times S , \ \Sigma_{n-1+\dim S} = (T - \operatorname{Sing} T) \times S ,$$
$$\ldots , \Sigma_{\dim S} = \{0\} \times S .$$

On note $\operatorname{Perv}^T(X)$ la catégorie des faisceaux pervers sur X relativement à cette stratification. Les conditions de perversité utilisées sont détaillées en I.2.5.

III.1 Notations et définitions.

$$\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_1 \times \ldots \times \mathbf{C}_n .$$

Désignons par $K_i = \mathbf{R}^+$ une coupure de $\mathbf{C}_i$; on pose

$$V_i = \mathbf{C} - \mathbf{R}^+$$
$$\overset{0}{K}_i = K_i - \{0\}.$$

Sauf mention du contraire, $\mathcal{F}^\bullet$ désigne dans ce chapitre III un élément de $\operatorname{Perv}^T(X)$.

Notation. – Soit (I, J, L) une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On écrit :

$$Z_{I,J,L} = \prod_{i \in I} K_i \times \prod_{j \in J} \mathbf{C}_j \times \prod_{\ell \in L} V_\ell \times S$$

$$\mathcal{F}^\bullet{}_{I;J,L} = R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{F}^\bullet .$$

Dans le cas particulier de la partition I, ϕ, I' :

$$Z_I = \prod_{i \in I} K_i \times \prod_{\ell \in I'} V_\ell \times S \qquad (= Z_{I,\phi,I'}).$$

$$\mathcal{F}_I^\bullet = R\,\Gamma_{Z_I} \mathcal{F}^\bullet \qquad (= \mathcal{F}^\bullet_{I,\phi,I'}).$$

Notation. – Soit (A, B, C) une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on écrit :

$$S_{A,B,C} = \prod_{i \in A} \overset{0}{K}_i \times \prod_{j \in B} \{0_j\} \times \prod_{k \in C} V_k \times S.$$

De la constructibilité des groupes de cohomologie de $\mathcal{F}^\bullet$, on déduit par des techniques classiques (Appendice [7]) que $\mathcal{F}^\bullet_{I,J,L}$ est à cohomologie constructible relativement à cette stratification réelle. Par exemple :

III.1.1. *Remarque.* – Les groupes de cohomologie de $\mathcal{F}_I^\bullet$ sont supportés par $\overline{Z}_I$ et localement constants le long des strates $S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}$, où (I_1, I_2) (resp. (L_1, L_2, L_3)) est une partition de I (resp. de $I' = \{1, 2, \ldots, n\} - I$).

Les $\mathcal{F}_I^\bullet$ associés à un complexe $\mathcal{F}^\bullet$ sont les 2^n sommets d'un hypercube formé par les 3^n complexes $\mathcal{F}^\bullet_{I,J,K}$ et dont les lignes sont les triangles :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^\bullet_{I \cup \{i\}, J, L} \arrow[r] & \mathcal{F}^\bullet_{I, J \cup \{i\}, L} \arrow[r] & \mathcal{F}^\bullet_{I, J, L \cup \{i\}}. \arrow[ll, bend left, "-\Delta_i"] \arrow[ll, bend right, "+1"'] \end{tikzcd}$$

III.1.2. LEMME. – *Pour* $J = \phi$, *les morphismes* Δ_i *de* $\mathcal{F}_I^\bullet$ *vers* $\mathcal{F}^\bullet_{I \cup \{i\}}$ $[+1]$ *vérifient :*

$$\forall i \notin I, \ \forall j \notin I \quad \Delta_i \Delta_j = -\Delta_j \Delta_i.$$

Preuve. – Il suffit d'utiliser la proposition A.2.2 de l'appendice pour le complexe $\mathcal{F}^\bullet_{I, \{i,j\}, I''}$.

Notation. – On note U_i les morphismes de complexes

$$U_i : \mathcal{F}_I^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet_{I \cup \{i\}} \, [+1]$$

liés aux Δ_i par la convention suivante :

$$U_i = (-1)^{n_{I,i}} \Delta_i \qquad n_{I,i} = \# \{j \in I,\ j \geqslant i\}.$$

On a donc $U_i U_j = U_j U_i$.

Dans le cas $n = 2$, notre hypercube est un carré et se représente par le diagramme des triangles :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^\bullet_{1,2} = R\Gamma_{K_1 \times K_2} \mathcal{F}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{\mathbf{C} \times K_2} \mathcal{F}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{V_1 \times K_2} \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^\bullet_2 \arrow[d] \arrow[ll, bend right, "U_1"'] \\
R\Gamma_{K_1 \times \mathbf{C}} \mathcal{F}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & R\Gamma_{V_1 \times \mathbf{C}} \mathcal{F}^\bullet \arrow[d] \\
\mathcal{F}^\bullet_1 = R\Gamma_{K_1 \times V_2} \mathcal{F}^\bullet \arrow[r] \arrow[uu, "-U_2"] & R\Gamma_{\mathbf{C} \times V_2} \mathcal{F}^\bullet \arrow[r] & R\Gamma_{V_1 \times V_2} \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^\bullet_\phi \arrow[uu, "-U_2"'] \arrow[ll, bend left, "-U_1"]
\end{tikzcd}$$

où $U_1 U_2 = U_2 U_1$.

III.2. Les sommets de l'hypercube sont des faisceaux.

$|I|$ désignant le cardinal de I, posons

$$\widetilde{\mathcal{F}}_I = R^{|I|} \Gamma_{Z_I} \widetilde{\mathcal{F}}^\bullet .$$

III.2.1. Proposition. – *Soit* $\mathcal{F}^\bullet$ *un élément de* $\mathrm{Perv}^T(X)$; *on a :*

$\mathcal{F}^\bullet_I$ *est concentré en degré* $|I|$ *et est donc isomorphe dans* $D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n \times S})$ *à :* $\widetilde{\mathcal{F}}_I[-|I|]$.

Preuve. – Pour $n = 0$, la proposition est évidente, nous procéderons par récurrence sur n.

Preuve pour $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$. – Supposons que 1 n'appartient pas à I : $Z_I = V_1 \times Z$, où $Z \subset \mathbf{C}^{n-1} \times S$.

Considérons les inclusions :

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \times S \arrow[r, "\theta''"] \arrow[rr, bend right, "\theta"'] & \mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S \arrow[r, "\theta'"] & \mathbf{C}^n \times S .
\end{tikzcd}$$

On a $\mathcal{F}_I^\bullet = R\,\theta_*\,\theta^{-1}(R\,\Gamma_{\mathbf{C}\times Z}\ \mathcal{F}^\bullet) = R\,\theta_*(\theta'')^{-1}\ \mathcal{G}_I^\bullet$ où

$$\mathcal{G}_I^\bullet = (\theta')^{-1}\ R\,\Gamma_{\mathbf{C}\times Z}\mathcal{F}^\bullet = R\,\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times Z}(\theta')^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet\ .$$

En utilisant la proposition I.2.1. (ou simplement la définition, car $R\,\mathcal{H}om\,(\mathcal{F}^\bullet, \mathbf{C})\,(U) = R\,\mathcal{H}om\,(\mathcal{F}^\bullet|_U, \mathbf{C}|_U))$, on vérifie que $\mathcal{G}^\bullet = (\theta')^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet$ est un élément de $\mathrm{Perv}^{T'}(\mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S)$, où T' est un croisement normal de $\mathbf{C}^{n-1}$.

Par récurrence : $\mathcal{G}_I^\bullet \cong \widetilde{\mathcal{G}}_I[-|I|]$.

On a donc l'égalité : $\mathcal{F}_I^\bullet = R\,\theta_*(\theta'')^{-1}\ \widetilde{\mathcal{G}}_I[-|I|]$.

D'autre part, pour tout (x, z, s) de $\mathbf{C} \times \overline{Z}$, on a, pour $k \geqslant 1$:

$$(R^k\theta_*(\theta'')^{-1}\ \widetilde{\mathcal{G}}_I)_{x,z,s} = \varinjlim_{\epsilon} H^k\ ((D_\epsilon \cap V_1) \times B_\epsilon, \widetilde{\mathcal{G}}_I),$$

où D_ϵ et B_ϵ sont des boules dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}^{n-1} \times S$ centrées respectivement en x et (z, s). Si x appartient à V_1, on obtient :

$$\varinjlim_{\epsilon} H^k(D_\epsilon \times B_\epsilon,\ \widetilde{\mathcal{G}}_I) = 0\ .$$

Comme $\widetilde{\mathcal{G}}_I$ est constant sur les segments ouverts d'extrémité (x, z, s) pour ϵ assez petit (remarque III.1.1) cette limite est triviale ([7] Appendice 2, p. 176), c'est-à-dire : $H^k(D_\epsilon \times B_\epsilon, \widetilde{\mathcal{G}}_I) = 0$ $k \geqslant 1$ et ϵ assez petit. Si x appartient à K_1, $D_\epsilon \cap V_1$ est topologiquement une réunion disjointe de disques. Comme $\widetilde{\mathcal{G}}_I$ est constant sur $V_1 \times (z', s')$ pour tout (z', s') de B_ϵ, on a encore, compte tenu du cas où x appartient à V_1 :

$$H^k((D_\epsilon \cap V_1) \times B_\epsilon, \widetilde{\mathcal{G}}_I) = 0\ .$$

Par suite $\mathcal{F}_I^\bullet \cong \theta_*(\theta'')^{-1}\ \widetilde{\mathcal{G}}_I[-|I|]$.

Donc $\mathcal{F}_I^\bullet$ est concentré en degré $|I|$.

Preuve pour $\{1, 2, \ldots, n\}$. – Conservons les mêmes notations :

$$\mathcal{F}^\bullet_{I\cup\{1\}} = R\,\Gamma_{K_1\times\mathbf{C}^{n-1}\times S}\ (R\,\Gamma_{\mathbf{C}\times Z_I}\ \mathcal{F}^\bullet) \text{ d'où,}$$

$$(\theta')^{-1}\ \mathcal{F}^\bullet_{I\cup\{1\}} = R\,\Gamma_{\mathring{K}_1\times\mathbf{C}^{n-1}\times S}\ ((\theta')^{-1}\ R\,\Gamma_{\mathbf{C}\times Z_I}\ \mathcal{F}^\bullet)$$

$$= R\,\Gamma_{\mathring{K}_1\times\mathbf{C}^{n-1}\times S}\ (\widetilde{\mathcal{G}}_I)\,[-|I|].$$

$\widetilde{\mathcal{G}}_I$ est localement constant sur $\mathbf{C} - \{0\} \times (z, s)$, donc :

$$\Gamma_{\overset{\circ}{K}_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \times S} \widetilde{\mathcal{G}}_I = 0 .$$

D'autre part, pour $k \geqslant 2$:

$$(R^k \Gamma_{\overset{\circ}{K}_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \times S} \widetilde{\mathcal{G}}_I)_{x,z,s} = \varinjlim_{\epsilon} H^{k-1}((D_\epsilon \cap V_1) \times B_\epsilon, \widetilde{\mathcal{G}}_I)$$
$$= 0 .$$

De ce fait : $(\theta')^{-1} \mathcal{F}^{\bullet}_{I \cup \{1\}} \cong R^1 \Gamma_{\overset{\circ}{K}_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \times S} \widetilde{\mathcal{G}}_I [|-I|-1]$.

On déduit de cet isomorphisme, en particulier que

$\mathcal{F}^{\bullet}_{1,2,\ldots,n}$ est concentré en degré n sur $\mathbf{C}^n - \{0\} \times S$. (*)

Etape 1 : $\mathcal{F}_{1,2,\ldots,n}$ *n'a de la cohomologie qu'en degré supérieur ou égal à* n.

Désignons par ℓ le plus petit entier tel que $h^\ell(\mathcal{F}^{\bullet}_{1,2,\ldots,n}) \neq 0$. D'après (*), si ℓ est strictement inférieur à n le faisceau

$$h^\ell(\mathcal{F}^{\bullet}_{1,2,\ldots,n})$$

est supporté par $\{0\} \times S$. Or :

$$R\Gamma_{\{0\} \times S} \mathcal{F}^{\bullet} = R\Gamma_{\{0\} \times S}(R\Gamma_{K_1 \times \ldots \times K_n \times S} \mathcal{F}^{\bullet}) = R\Gamma_{\{0\} \times S} \mathcal{F}^{\bullet}_{1,2,\ldots,n}.$$

Donc si ℓ est strictement inférieur à n :

$$R^\ell \Gamma_{\{0\} \times S} \mathcal{F}^{\bullet} = h^\ell(\mathcal{F}^{\bullet}_{1,2,\ldots,n}) \neq 0 .$$

C'est contraire à la condition de perversité B ter, proposition I.2.1. Il reste à montrer :

Etape 2 : $\mathcal{F}^{\bullet}_{1,2,\ldots,n}$ *est borné dans les degrés* 0 *à* n.

Cela provient du fait que c'est le dernier sommet d'un hypercube où le centre a de la cohomologie en degré $\{0, 1, \ldots, n\}$ et où les autres sommets sont concentrés en un seul degré.

III.3. Description de l'hypercube des faisceaux.

Reprenons les notations de III.2 et posons $F_I = \widetilde{\mathcal{F}}_{I|0 \times S}$. D'après la remarque de III.1.1, F_I est un système local sur S. Dans le cas où il n'y a pas de paramètres (S réduit à un point), F_I est la fibre à l'origine de $\widetilde{\mathcal{F}}_I$.

III.3.0. *Convention.* – On note aussi F_I l'image réciproque de F_I sur tout espace produit $Y \times S$.

III.3.1. PROPOSITION. – *$\mathcal{F}^\bullet$ étant un élément de* $\mathrm{Perv}^T(X)$, *on a un isomorphisme :*

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{I|S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}} \cong (F_{I_2})^{\pi(L_1)}$$

dépendant fonctoriellement de $\mathcal{F}^\bullet$ et compatible aux restrictions à des ouverts de S.

Preuve. – Nous allons définir le choix de cet isomorphisme par récurrence sur n.

Notations. – $K_I = \prod_{i \in I} K_i \times \prod_{j \notin I} \mathbf{C}_j \times S$

$$U_I = \prod_{i \in I} \mathbf{C}_i \times \prod_{j \notin I} V_j \times S = \prod_{i \in I} \mathbf{C}_i \times S''$$

$$U'_I = \prod_{i \in I} \mathbf{C}_i \times \prod_{j \notin I} \mathbf{C}_j - \{0\} \times S = \prod_{i \in I} \mathbf{C}_i \times S'$$

(remarquons que $Z_I = K_I \cap U_I$)

$$\begin{tikzcd} U_I \arrow[r, "\theta''_I"] \arrow[rr, bend right, "\theta_I"'] & U'_I \arrow[r, "\theta'_I"] & \mathbf{C}^n \times S. \end{tikzcd}$$

Preuve et construction pour $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$:

On vérifie que $\theta_I^{-1} \mathcal{F}^\bullet$ et $(\theta'_I)^{-1} \mathcal{F}^\bullet$ sont deux faisceaux pervers sur $\mathbf{C}^I \times S''$ et $\mathbf{C}^I \times S'$. D'après III.2.1, $\mathcal{F}^\bullet_I$ est concentré en degré $|I|$, ainsi donc que $R\Gamma_{Z_I}(\theta_I^{-1} \mathcal{F}^\bullet)$, d'où :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_I = (\theta_I)_* R^{|I|} \Gamma_{Z_I}(\theta_I^{-1} \mathcal{F}^\bullet).$$

Soit $(z_1, \ldots, z_n, s)$ un point de la strate $S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}$ et $U_{z_1, \ldots, z_n, s}$ un voisinage de ce point : $U_{z_1, \ldots, z_n, s} \cap U_I$ est égal à

$$\prod_{i \in I} D_\epsilon(z_i) \times \prod_{j \in L_1} (D_\epsilon^+(z_j) \cup D_\epsilon^-(z_j)) \times \prod_{j \in L_2 \cup L_3} (D_\epsilon(z_j) - \mathbf{R}^+) \times W_s$$

où $D_\epsilon(z)$ désigne un disque de centre z et de rayon ϵ,

$$D_\epsilon^+(z) = D_\epsilon(z) \cap \{u \in \mathbf{C}\,;\ \operatorname{Im} u > 0\},$$

W_s est un voisinage de s.

On a donc par définition de $(\theta_I)_*$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_I)_{z_1,\dots,z_n,s} &= \varinjlim \Gamma(U_{z_1,\dots,z_n,s} \cap U_I, R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\,\theta^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet) \\ &= \bigoplus_{\Lambda\in\mathfrak{T}(L_1)} \Gamma\Big(\prod_{i\in I_1} \mathring{K}_i \times \prod_{j\in I_2}\{0_j\} \times \prod_{\substack{j\in L_1\\ \sigma_j=-\ \text{si } j\in\Lambda\\ \sigma_j=+\ \text{si } j\notin\Lambda}} D_\epsilon^{\sigma_j}(z_j) \\ &\qquad \times \prod_{j\in L_2\cup L_3} D_\epsilon(z_j) - \mathbf{R}^+ \times W_s, R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\theta^{-1}\mathcal{F}^\bullet\Big)\end{aligned}$$

(la limite inductive étant triviale pour ϵ assez petit).

En utilisant la remarque III.1.1, on a donc l'identification canonique de $(\widetilde{\mathcal{F}}_I)_{z_1,\dots,z_n,s}$ avec :

$$\Big(\Gamma\Big(\prod_{i\in I_1}\mathring{K}_i \times \prod_{j\in I_2}\{0_j\} \times \prod_{j\notin I} V_j \times W_s, R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\,\theta_I^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet\Big)\Big)^{\mathfrak{T}(L_I)}.$$

Désignons par π la projection de tout espace produit $Y \times S$ sur S, l'égalité précédente donne au niveau des faisceaux :

$$\pi_*(\widetilde{\mathcal{F}}_{I|S_{I_1}\cup L_1, I_2\cup L_2, L_3}) \cong (\pi_*((R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\,\theta_I^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet)_{|S_{I_1,\,I_2,\phi}}))^{\mathfrak{T}(L_1)}$$

où $S_{I_1,I_2,\phi}$ est la strate $\prod_{i\in I_1}\mathring{K}_i \times \prod_{j\in I_2}\{0_j\}\times S''$ du faisceau pervers $\theta_I^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet$. Mais par hypothèse de récurrence :

$$\pi_*((R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\,\theta_I^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet)_{|S_{I_1,I_2,\phi}}) \cong \pi_*((R^{|I_2|}\Gamma_{Z_{I_2}}\,\theta_I^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet)_{|0\times S''}).$$

D'autre part :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{I_2} = (\theta_I)_*\,R^{|I_2|}\Gamma_{Z_{I_2}}\,\theta_I^{-1}\mathcal{F}^\bullet\ .$$

Le même calcul de $(\theta_I)_*$ que précédemment, donne

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{I_2|0\times S} = \pi_*((R^{|I_2|}\Gamma_{Z_{I_2}}\,\theta_I^{-1}\,\mathcal{F}^\bullet)_{|0\times S''}).$$

Avec la convention III.3.0, on a donc obtenu un morphisme fonctoriel et compatible aux restrictions à des ouverts :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{I|S_{I_1}\cup L_1, I_2\cup L_2, L_3} \cong (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1)}.$$

Preuve et construction pour $\{1, 2, \dots, n\}$:

Nous devons étudier $\widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n|S_{I_1,I_2,\phi}}$ où (I_1,I_2) est une partition de $\{1,2,\ldots,n\}$. Supposons $1\in I_1$ et posons :

$$Z = K_2 \times \ldots \times K_n \times S$$

$$I_1 = J_1 \cup \{1\} \quad I_2 = J_2$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \times S \arrow[r, "\theta''"] \arrow[rr, bend right, "\theta"'] & \mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S \arrow[r, "\theta'"] & \mathbf{C}^n \times S. \end{tikzcd}$$

La suite exacte longue d'un triangle de notre hypercube se réduit à

$$0 \longrightarrow R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}\times Z}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_{2,3,\ldots,n} \xrightarrow{u_1} \widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n} \longrightarrow R^n\Gamma_{\mathbf{C}\times Z}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow 0.$$

En restreignant cette suite à $\mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S$, et en utilisant la perversité de $(\theta')^{-1}\mathcal{F}^\bullet$, on obtient la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times Z}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow R^{n-1}\Gamma_{V_1\times Z}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow (\theta')^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n} \longrightarrow 0.$$

$R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times Z}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ se reconstitue à partir de sa restriction à $V_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \times S$ par un morphisme de monodromie obtenu en tournant dans le sens positif.

D'autre part on a, en posant $I_1' = I_1 - \{1\}$:

a) $$\begin{aligned}(R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times Z}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^\bullet)_{S_{I_1',I_2,\{1\}}} &= (R^{n-1}\Gamma_{V_1\times Z}\mathcal{F}^\bullet)_{|S_{I_1',I_2,\{1\}}} \\ &= (\widetilde{\mathcal{F}}_{2,3,\ldots,n})_{|S_{I_1',I_2,\{1\}}} \\ &\cong F_{I_2},\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant celui décrit dans la première partie de la preuve. En prenant la convention d'identifier la fibre de $R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times Z}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^\bullet$, en un point (z_1,z,s) de S_{I_1,I_2}, à la fibre en un point voisin (z_1^+,z,s) où $\operatorname{Im} z_1^+ > 0$ (comme en II.1), on obtient l'isomorphisme :

$$(R^{n-1}\,\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times Z}\,(\theta')^{-1}\,\mathcal{F}^{\bullet})_{|S_{I_1,I_2,\phi}} \cong F_{I_2}\,.$$

$$\text{b)}\quad (R^{n-1}\,\Gamma_{V_1\times Z}\,(\theta')^{-1}\,\mathcal{F}\;)_{|S_{I_1,I_2,\phi}} = (\widetilde{\mathcal{F}}_{2,3,\ldots,n})_{|S_{I_1,I_2,\phi}}$$
$$\cong F_{I_2}\oplus F_{I_2}\,,$$

le dernier isomorphisme étant celui décrit dans la première partie de la preuve.

On obtient ainsi le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times Z}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^{\bullet})_{|S_{I_1,I_2,\phi}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & (R^{n-1}\Gamma_{V_1\times Z}(\theta')^{-1}\mathcal{F}\;)_{|S_{I_1,I_2,\phi}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n|S_{I_1,I_2,\phi}} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{I_2} \arrow[r, "e\,\longmapsto\,(e,M_1^{-1}e)"] & F_{I_2}\oplus F_{I_2} \arrow[r, "(e,f)\,\longmapsto\,M_1 f-e"] & F_{I_2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ce qui détermine un isomorphisme φ_1 tel que le diagramme ci-dessus soit un isomorphisme de suite exactes courtes :

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n|S_{I_1,I_2,\phi}} \xrightarrow[\cong]{\varphi_1} F_{I_2}\,.$$

Nous allons montrer que cette identification ne dépend pas du choix d'un élément dans I_1. Supposons donc $\{1,2\}$ inclus dans I_1 et notons :

$$Z = K_3\times\ldots\times K_n\times S$$

$$\omega : \mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-2}\times S \longrightarrow \mathbf{C}^n\times S\,.$$

On a le diagramme de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times\mathring{K}_2\times Z}\,\omega^{-1}\mathcal{F}^{\bullet} \arrow[r] \arrow[u] & \omega^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}_{2,\ldots,n} \arrow[r] \arrow[u] & \omega^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{n-2}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times V_2\times Z}\,\omega^{-1}\mathcal{F}^{\bullet} \arrow[r] \arrow[u] & \omega^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}_{3,\ldots,n} \arrow[r] \arrow[u] & \omega^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}_{1,3,\ldots,n} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{n-2}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}-\{0\}\times Z}\,\omega^{-1}\mathcal{F}^{\bullet} \arrow[r] \arrow[u] & R^{n-2}\Gamma_{V_1\times\mathbf{C}-\{0\}\times Z}\,\omega^{-1}\mathcal{F}^{\bullet} \arrow[r] \arrow[u] & R^{n-1}\Gamma_{\mathring{K}_1\times\mathbf{C}-\{0\}\times Z}\,\omega^{-1}\mathcal{F}^{\bullet} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$R^{n-2}\,\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}-\{0\}\times Z}\,\omega^{-1}\,\mathcal{F}^{\bullet}$ est défini à partir de sa restriction à $V_1 \times V_2 \times Z$ par deux monodromies $\bar{M}_1$ et $\bar{M}_2$. Regardons la colonne de gauche du diagramme précédent et restreignons-la à $\mathbf{C} - \{0\} \times \mathring{K}_2$. Cette colonne est reconstruite par la suite exacte courte "munie" de monodromies (ici on applique par hypothèse de récurrence ce qui précède à $\mathcal{F}^{\bullet}_{|\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-1}}$) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{I_2} & \longrightarrow & F_{I_2} \oplus F_{I_2} & \longrightarrow & F_{I_2} & \longrightarrow & 0. \\ & & \cup\!\!\!\uparrow & & \cup\!\!\!\uparrow & & \cup\!\!\!\uparrow & & \\ & & \bar{M}_1 & & \bar{M}_1 \oplus \bar{M}_1 & & \bar{M}_1 & & \end{array}$$

On en déduit que $M_1 = \bar{M}_1$ et de même on montre que $M_2 = \bar{M}_2$.

Restreignons notre diagramme à $S_{I_1, I_2, \phi}$; on obtient avec la même convention qu'en a) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_{I_2} & \xrightarrow{e \longmapsto (e, M_1^{-1} e)} & F_{I_2} \oplus F_{I_2} & \xrightarrow{(e,f) \longmapsto M_1 f - e} & F_{I_2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & (M_2 e_2 - e_\phi, M_2 e_{1,2} - e_1) & \uparrow & & \\
 & & & & & \uparrow \quad 4 & & & \\
 & & & & & (e_\phi, e_1, e_2, e_{1,2}) & & & \\
0 & \longrightarrow & F_{I_2} \oplus F_{I_2} & \longrightarrow & F_{I_2} \oplus F_{I_2} \oplus F_{I_2} \oplus F_{I_2} & \longrightarrow & F_{I_2} \oplus F_{I_2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & F_{I_2} & \longrightarrow & F_{I_2} \oplus F_{I_2} & \longrightarrow & F_{I_2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où la ligne du haut est celle obtenue par le choix de 1 dans I_1.

Pour démontrer l'indépendance, il suffit de vérifier que le diagramme 4 commute, ce qui est assuré par la relation : $M_1 M_2 = M_2 M_1$.

III.3.2. *Définitions et notations*

On note $\underset{\sim}{u}_i : F_I \longrightarrow F_{I \cup \{i\}}$ la restriction à $\{0\} \times S$ du morphisme $U_i : \underset{\sim}{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}}$ défini en III.1.

– Les isomorphismes $\widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n|S_{I'-\{i\},I\cup\{i\},\phi}} \cong F_{I\cup\{i\}}$ et $\mathcal{F}_{1,2,\ldots,n|S_{I',I,\phi}} \cong F_I$, construits dans la preuve de III.3.1 permettent de définir un morphisme $v_i : F_{I\cup\{i\}} \longrightarrow F_I$ à partir du recollement du faisceau $\widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n}$ entre les strates $S_{I'-\{i\},I\cup\{i\},\phi}$ et $S_{I',I,\phi}$.

III.3.3.A. PROPOSITION. – *Transportées par les isomorphismes construits dans la preuve de III.3.1, les restrictions des* $U_i : \widetilde{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_{I\cup\{i\}}$ *à la strate* $S_{I_1\cup L_1, I_2\cup L_2, L_3}$ *donnent naissance aux applications :*

1er cas,

$$i \in L_1 : \qquad (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1)} \longrightarrow (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1)}$$

$$(f_\Lambda)_{\Lambda\subset L_1} \longmapsto (M_i f_{\Lambda\cup\{i\}} - f_\Lambda)_{\Lambda\subset L_1-\{i\}}$$

où $M_i = \mathrm{Id} + v_i u_i$.

2^e^ cas,

$$i \in L_2 : \qquad (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1)} \longrightarrow (F_{I_2\cup\{i\}})^{\mathfrak{T}(L_1)}$$

$$(f_\Lambda)_{\Lambda\subset L_1} \longmapsto (u_i(f_\Lambda))_{\Lambda\subset L_1}$$

3e cas,

$$i \in L_3 : \qquad 0$$

III.3.3.B. PROPOSITION. – *De même les recollements de* $\widetilde{\mathcal{F}}_I$ *entre* $S_{I_1\cup L_1, I_2\cup L_2, L_3}$ *et une strate incidente* $S_{I'_1\cup L'_1, I'_2\cup L'_2, L'_3}$, *où seul un élément i est transféré d'un ensemble d'indice à un autre, donnent naissance aux applications :*

1er cas

$$I'_1 = I_1 \cup \{i\}, I'_2 = I_2 - \{i\} : \quad (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1)} \longrightarrow (F_{I_2-\{i\}})^{\mathfrak{T}(L_1)}$$

$$(f_\Lambda)_{\Lambda\subset L_1} \longmapsto (v_i(f_\Lambda))_{\Lambda\subset L_1}$$

2e cas

$$L'_1 = L_1 \cup \{i\}, L'_2 = L_2 - \{i\} : (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1)} \longrightarrow (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1\cup\{i\})}$$

$$(f_\Lambda)_{\Lambda\subset L_1} \longmapsto (f_{\Lambda\cap L_1})_{\Lambda\subset L_1\cup\{i\}}$$

3^e cas $L'_3 = L_3 \cup \{i\}$, $L'_1 = L_1 - \{i\}$: On obtient deux morphismes correspondant aux deux composantes connexes de $B_\epsilon \cap S'$ où B_ϵ est une boule ouverte de centre

$$x \in S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3} : (F_{I_2})^{\mathfrak{A}(L_1)} \rightrightarrows (F_{I_2})^{\mathfrak{A}(L_1 - \{i\})}$$

$$(f_\Lambda)_{\Lambda \subset L_1} \longmapsto (f_\Lambda)_{\Lambda \subset L_1 - \{i\}}$$

et

$$(f_\Lambda)_{\Lambda \subset L_1} \longrightarrow (f_{\Lambda \cup \{i\}})_{\Lambda \subset L_1 - \{i\}} \cdot$$

Preuves. – On se référera au choix d'isomorphismes défini dans la proposition III.3.1 qu'on appellera choix III.3.1.

Preuve de B. – Seul alors le premier cas pose problème ; pour l'établir raisonnons par récurrence sur n. Pour $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, c'est la définition des v_i, supposons donc que 1 n'appartient pas à I et considérons les inclusions ouvertes :

$$\begin{tikzcd} U_I \arrow[r, "\tilde{\theta}"] \arrow[rr, bend right, "\theta_I"'] & V_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \arrow[r, "\theta"] & \mathbf{C}^n \end{tikzcd}$$

$\mathcal{G}^\bullet = \theta^{-1} \mathcal{F}^\bullet$ est un faisceau pervers à paramètres $V_1 \times S$; on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Le recollement de $\tilde{\mathcal{G}}_I$ entre les strates $S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}$ et

$$S_{I_1 \cup \{i\} \cup L_1, I_2 - \{i\} \cup L_2, L_3}$$

se lit $(v'_i)^{\mathfrak{A}(L_1)}$ (remarquons que $(I_1, I_2, L_1, L_2, L_3)$ est une partition de $\{2, 3, \ldots, n\}$).

On a
$$\tilde{\mathcal{F}}_I = (\theta_I)_* R^{|I|} \Gamma_{Z_I} \theta^{-1} \mathcal{F}^\bullet$$
$$= \theta_* \tilde{\mathcal{G}}_I$$

car $\tilde{\mathcal{G}}_I = \tilde{\theta}_* R \Gamma_{Z_I} \tilde{\theta}^{-1} \mathcal{G}^\bullet = \tilde{\theta}_* R \Gamma_{Z_I} \theta^{-1} \mathcal{F}^\bullet$ et les choix III.3.1 pour $\tilde{\mathcal{G}}_I$ et $\tilde{\mathcal{F}}_I$ se correspondent par θ_*, car ils sont tous les deux construits à partir des

$$R \Gamma_{Z_I} \theta_I^{-1} \mathcal{F}^\bullet = R \Gamma_{Z_I} \tilde{\theta}^{-1} \mathcal{G}^\bullet .$$

Ainsi le morphisme de recollement entre les strates $S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}$ et $S_{I_1 \cup \{i\} \cup L_1, I_2 - \{i\} \cup L_2, L_3}$ se lit $(v'_i)^{\mathfrak{A}(L_1)}$ pour $\tilde{\mathcal{F}}_I$ il reste

donc à établir que $v'_i = v_i$. Pour ce faire, considérons la suite exacte courte :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (R^{n-1}\Gamma_{\mathbf{C}-\{0\}\times K_2\times\ldots\times K_n}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^{\bullet})_{|S_{I_1,I_2,\phi}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & (R^{n-1}\Gamma_{V_1\times K_2\times\ldots\times K_n}(\theta')^{-1}\mathcal{F}^{\bullet})_{|S_{I_1,I_2,\phi}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n|S_{I_1,I_2,\phi}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_{I_2} \arrow[r] & F_{I_2}\oplus F_{I_2} \arrow[r] & F_{I_2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

θ' étant l'inclusion de $\mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S \longrightarrow \mathbf{C}^n \times S$ et les isomorphismes verticaux issus du choix III.3.1. On a de même une autre suite exacte relative à la strate $S_{I_1\cup\{i\},I_2-\{i\},\phi}$, ce qui nous donne le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(e,f) \arrow[d, mapsto] & F_{I_2}\oplus F_{I_2} \arrow[r, "(e,f)\longmapsto M_1 f - e"] \arrow[d] & F_{I_2} \arrow[d, "v_i"] \\
(v'_i e, v'_i f) & F_{I_2-\{i\}}\oplus F_{I_2-\{i\}} \arrow[r, "(e,f)\longmapsto M'_1 f - e"] & F_{I_2-\{i\}}
\end{tikzcd},$$

d'où l'on déduit facilement $v'_i = v_i$.

Preuve de A. – Traitons d'abord le premier cas.

Pour $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$, en utilisant la même démonstration que pour la preuve de B, l'égalité $v'_i = v_i$ assure la formule cherchée.

Pour $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, reprenons la preuve de III.3.1 ; le morphisme cherché est alors pour $i = 1$:

$$F_{I_2} \oplus F_{I_2} \longrightarrow F_{I_2} \quad (e,f) \longmapsto M_1 f - e.$$

On doit donc montrer que $M_1 = v_1 u_1 + \mathrm{Id}$. Pour ce faire, on utilise le fait que U_1 est un morphisme de faisceaux qui commute aux restrictions, ce qui fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & F_{I_2} \arrow[r, "u_1"] \arrow[d] & F_{I_2\cup\{1\}} \arrow[d, "v_1"] \\
e \arrow[d, mapsto] & & \\
(e,e) & F_{I_2}\oplus F_{I_2} \arrow[r, "(e,f)\longmapsto M_1 f - e"] & F_{I_2}
\end{tikzcd}$$

Pour le deuxième cas, seul pose encore problème la restriction (par exemple) de U_1 sur la strate $S_{I_1, I_2 \cup \{1\}, \phi}$, avec $I_1 \neq \phi$. Soit j appartenant à I_1 ; on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_{I_2} \oplus F_{I_2} \arrow[r, "{(e,f) \longmapsto M_j f - e}"] \arrow[d, "u_1 \oplus u_1"] & F_{I_2} \arrow[d, "U_{1|S_{I_1, I_2 \cup \{1\}, \phi}}"] \\
F_{I_2 \cup \{1\}} \arrow[r, "{(e',f') \longrightarrow M_j f' - e'}"] & F_{I_2 \cup \{1\}}
\end{tikzcd}$$

D'où $U_{1|S_{I_1, I_2 \cup \{1\}, \phi}} = u_1$.

III.3.4. PROPOSITION. — A) *Les morphismes u_i et v_i vérifient :*

a) $u_i u_j = u_j u_i, v_i v_j = v_i v_i, u_i v_j = v_j u_i$ si $i \neq j$.

b) $\mathrm{Id} + v_i u_i$ *est un isomorphisme.*

B) *Etant donné un système* (F_I, u_i, v_i) *d'espaces vectoriels (ou de faisceaux localement constants sur* S) *satisfaisant les conditions a), il existe une unique famille* $\overline{\mathcal{F}}_I$ *de faisceaux vérifiant :*

$$\overline{\mathcal{F}}_{I|S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}} = (F_{I_2})^{\mathfrak{T}(L_1)}$$

dont les morphismes de recollement sont définis par les formules de la proposition III.3.3.B. Les formules de la proposition III.3.3.A définissent alors une unique famille de morphismes $U_i : \overline{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}}$ *vérifiant* $U_i U_j = U_j U_i$.

Preuve de Aa). — $u_i u_j = u_j u_i$ et $v_i v_j = v_j v_i$ résultent de la définition des u_i, v_i et de l'égalité $U_i U_j = U_j U_i$. Soit $\mathrm{Str} = S_{\{j\}, \{1,2,\ldots,\check{j},\ldots,n\}, \phi}$, U_i étant un morphisme de faisceaux ; on a le diagramme commutatif, où $j \in I$:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{F}}_{I|0 \times S} \arrow[r, "U_{i|0 \times S}"] \arrow[d, "\text{recollement}"] & \widetilde{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}|0 \times S} \arrow[d, "\text{recollement}"] \\
\widetilde{\mathcal{F}}_{I|\mathrm{Str}} \arrow[r, "U_{i|\mathrm{Str}}"] & \widetilde{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}|\mathrm{Str}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_I \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "v_j"] & F_{I \cup \{i\}} \arrow[d, "v_j"] \\
F_{I - \{j\}} \arrow[r, "u_i"] & F_{I \cup \{i\} - \{j\}}
\end{tikzcd}$$

D'où l'égalité $u_i v_j = v_j u_i$. $(i \neq j)$.

Preuve de Ab). – On procède par récurrence et le résultat provient de $v'_i = v_i$ et $M_1 = v_1 u_1 - \mathrm{Id}$ (se reporter à la preuve de la proposition précédente).

Preuve de B. – Il suffit d'effectuer (à l'aide des seules relations a) les vérification suivantes :

1) Compatibilité des morphismes de recollement fournis par III.3.3.B, ce qui assure l'existence des faisceaux $\overline{\mathcal{F}}_I$.

2) Compatibilité des formules donnant la restriction des U_i aux strates avec les morphismes de recollement entre strates, ce qui permet de définir les morphismes des faisceaux

$$U_i : \overline{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}} .$$

3) Vérification des $U_i U_j = U_j U_i$ sur chaque strate.

Ces vérifications de nature élémentaire sont laissées au lecteur.

III.3.5. *Remarques.* – Les conditions a) entraînent que $v_i u_i$ commute à $v_j u_j$, ainsi que $u_i v_i$ et $v_j u_j, u_i v_i$ et $u_j v_j$. Les conditions b) sont équivalentes au fait que les $\mathrm{Id} + u_i v_i$ sont des isomorphismes.

IV. THEOREME D'EQUIVALENCE DE CATEGORIES

IV.1. Définition du foncteur α.

IV.1.1. *Notations.* – On note $\mathcal{C}_n$ la catégorie suivante :

1) Les objets de $\mathcal{C}_n$ sont les 2^n-uples $(F_I ; \subset \{1, 2, \ldots, n\})$ d'espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{C}$ munis d'applications linéaires $F_I \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} F_{I \cup \{i\}}$ satisfaisant

a) $u_i u_j = u_j u_i, \quad v_i v_j = v_j v_i, \quad u_i v_j = v_j u_i \quad$ si $\quad i \neq j$

b) $\mathrm{Id} + v_i u_i$ inversible.

2) Un morphisme entre les objets $(F_I, u_i, v_i) \longrightarrow (F'_I, u'_i, v'_i)$ est la donnée d'un 2^n-uple d'applications linéaires :

$$h_I : F_I \longrightarrow F'_I \quad \text{vérifiant}$$

$$u'_i h_I = h_{I \cup \{i\}} u_i \quad \text{et} \quad v'_i h_{I \cup \{i\}} = h_I v_i .$$

IV.1.2. PROPOSITION. – *Avec les notations de III.3, la correspondance qui a un élément* $\mathcal{F}^\bullet$ *de* $\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n)$ *associe le* 2^n*-uple* $(F_I = (R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\mathcal{F}^\bullet)_0$; $(I \subset \{1, 2, \ldots, n\})$ *muni par la définition III.3.2. d'applications linéaires* $F_I \underset{v_i}{\overset{u_i}{\rightleftarrows}} F_{I \cup \{i\}}$ *définit un foncteur noté* α :

$$\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n) \longrightarrow \mathcal{C}_n .$$

Preuve. – Le 2^n-uple $(F_I, I \subset \{1, 2, \ldots, n\})$ muni des flèches u_i et v_i est bien un objet de $\mathcal{C}_n$: c'est la proposition III.3.4.A. Et la fonctorialité résulte du choix d'isomorphismes fait dans la preuve de la proposition III.3.1.

IV.1.3. *Programme.* – Comme en II.2, nous allons construire un foncteur $\beta : \mathcal{C}_n \longrightarrow \mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n)$ et nous montrerons que α et β sont quasi-inverses.

IV.2. Définition du foncteur β.

Par suite, on note $\underline{F} = (F_I, u_i, v_i)$ un objet de $\mathcal{C}_n$. Associons-lui la famille $\overline{\mathcal{F}}_I$, définie dans la proposition III.3.4.B, ainsi que les morphismes $U_i : \overline{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_{I \cup \{i\}}$. Notons

$$\Delta_i = (-1)^{n_{I,i}} U_i, \quad \text{où} \quad n_{I,i} = \# \{j \in I ; j \geqslant i\}$$

(c'est la même convention de signe qu'en III.1) ; on a alors :

$$\Delta_i \Delta_j + \Delta_j \Delta_i = 0 .$$

IV.2.1. *Notation.* – On considère dans ce paragraphe le complexe $\mathcal{F}^\bullet$ défini par :

$$\mathcal{F}^p = \sum_{|I| = p} \overline{\mathcal{F}}_I \qquad d = \sum_{\substack{|I| = p \\ i \notin I}} \Delta_i \quad \text{(la différentielle).}$$

On note : $\mathcal{F}^\bullet = \beta(\underline{F})$.

IV.2.2. PROPOSITION. — $\mathcal{F}^\bullet = \beta(\underline{F})$ *est un objet de* $\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n)$.

Preuve. — Dans la définition de $\mathcal{C}_n$, on peut partir de F_I faisceaux localement constants sur S et définir de même $\beta(\underline{F})$ en utilisant la proposition III.3.4.B. Nous allons montrer par récurrence sur n que $\mathcal{F}^\bullet$ appartient à $\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C} \times S)$.

Etape n° 1 : $\mathcal{F}^\bullet$ est pervers sur $\mathbf{C}^n - \{0\} \times S$.

Notons $\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{\phi,\{2,\dots,n\},1}$ et $\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{1,\{2,\dots,n\},\phi}$ les deux complexes définis par :

$$\overline{\mathcal{F}}^p_{\phi,\{2,\dots,n\},1} = \bigoplus_{\substack{|I|=p \\ 1\notin I}} \overline{\mathcal{F}}_I \qquad d = \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\notin I}} \Delta_i$$

$$\overline{\mathcal{F}}^p_{\{1\},\{2,\dots,n\},\phi} = \bigoplus_{\substack{|I|=p \\ 1\in I}} \overline{\mathcal{F}}_I \qquad d = \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\in I}} \Delta_i .$$

Le morphisme $\Delta_1 = \overline{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_{I\cup\{1\}}$ induit un morphisme de complexe noté $\oplus\,\Delta_1 : \overline{\mathcal{F}}^\bullet_{\phi,\{2,\dots,n\},1}[-1] \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}^\bullet_{1,\{2,\dots,n\},\phi}$. On vérifie alors facilement que $\mathcal{F}^\bullet$ en est le mapping cône.

LEMME. — *En restriction à* $\mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S$, $\oplus\Delta_1$ *est surjective.*

Preuve du lemme. — Il suffit de montrer que la restriction à $\mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S$ de $\Delta_1 : \overline{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_{I\cup\{1\}}$ (où $1 \notin I$) est surjective, ce qui se démontre facilement en regardant la restriction de Δ_1 aux strates contenues dans $\mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S$:

$$\pm\,\Delta_{1\,|S_{I_1\cup L_1, I_2\cup L_2, L_3}} : (F_{I_2})^{\mathcal{T}(L_1)} \longrightarrow 0$$

$$\pm\,\Delta_{1\,|S_{I_1\cup L_1\cup\{1\}, I_2\cup L_2, L_3}} : (F_{I_2})^{\mathcal{T}(L_1\cup\{1\})} \longrightarrow (F_{I_2})^{\mathcal{T}(L_1)}$$

$$(f_\Lambda)_{\Lambda\subset L_1\cup\{1\}} \longmapsto (M_1 f_{\Lambda\cup\{1\}} - f_\Lambda)_{\Lambda\subset L_1}$$

où $M_1 = \mathrm{Id} + v_1 u_1$.

En restriction à $\mathbf{C} - \{0\} \times \mathbf{C}^{n-1} \times S$, on obtient donc la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\oplus \Delta_1)|_{\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-1}\times S}$$
$$\longrightarrow \overline{\mathcal{F}}^{\bullet}_{\phi,\{2,\ldots,n\},1}|_{\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-1}\times S}$$
$$\longrightarrow \overline{\mathcal{F}}^{\bullet}_{1,\{2,\ldots,n\},\phi}|_{\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-1}\times S} \longrightarrow 0$$

ainsi $\mathcal{F}^{\bullet}|_{\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-1}\times S}$, complexe simple associé à $\oplus \Delta_1$, est isomorphe à $\operatorname{Ker}(\oplus \Delta_1)$.

Considérons une strate $\mathrm{St} = S_{I_1\cup L_1, I_2\cup L_2, L_3}$ de $\mathbf{C}^{n-1}$. Les formules précédentes montrent que la restriction de $\operatorname{Ker}(\oplus \Delta_1)$ à $\mathbf{C}-\{0\}\times \mathrm{St}\times S$ est le système local défini par sa restriction à $V_1\times \mathrm{St}\times S : (F_{I_2})^{\pi(L_1)}$ et la monodromie $(\mathrm{Id}+v_1u_1)^{\pi(L_1)}$. Il en résulte que $\operatorname{Ker}(\oplus \Delta_1) = \beta(\overline{F}_I, \overline{u}_i, \overline{v}_i)$, où

$$\overline{F}_I = \overline{\mathcal{F}}_{I|\mathbf{C}_1-\{0\}\times\{0\}\times S'}$$

(pour $I \subset \{2,\ldots,n\}$) est le système local défini par F_I sur $V_1\times\{0\}\times S$ et la monodromie $M_1 = \mathrm{Id}+v_1u_1$ et où $\overline{u}_i, \overline{v}_i$ sont définis par leurs restrictions u_i et v_i à $V_1\times S$ (commutant avec M_1). D'après l'hypothèse de récurrence $\operatorname{Ker}(\oplus \Delta_1)$ est donc pervers sur $\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-1}\times S$.

Ainsi $\mathcal{F}^{\bullet}$ est pervers sur $\mathbf{C}-\{0\}\times\mathbf{C}^{n-1}\times S$ et de la même façon sur $\mathbf{C}^n-\{0\}\times S$.

Etape n° 2 : $\mathcal{F}^{\bullet}$ est pervers en $\{0\}\times S$

$$R\Gamma_{\{0\}}\mathcal{F}^{\bullet} = R\Gamma_{\{0\}} R\Gamma_{K_1\times\ldots\times K_n}\mathcal{F}^{\bullet}.$$

Admettons provisoirement le résultat (voir lemme IV.2.4) :

$$R\Gamma_{K_1\times\ldots\times K_n}\mathcal{F}^{\bullet} = \overline{\mathcal{F}}_{1,2,\ldots,n}[-n], \text{ qui entraîne :}$$
$$R^i\Gamma_{\{0\}}\mathcal{F}^{\bullet} = 0 \quad \text{si } i<n.$$

De la proposition I.2.1, on déduit alors que $\mathcal{F}^{\bullet}$ est pervers.

IV.2.3. Lemme. – *Soit* (F_I, u_i, v_i) *un élément de* $\mathcal{C}_n$; *on lui associe par la proposition III.3.4.B la famille de faisceaux* $\overline{\mathcal{F}}_I$:

A) *Ces faisceaux vérifient* $R\Gamma_{Z_I}\overline{\mathcal{F}}_I \cong \overline{\mathcal{F}}_I$.

B) $Z_{H,J,L}$ *étant les sous-ensembles définis en III.1,*

$$R\,\Gamma_{Z_{H,J,L}}\,\overline{\mathcal{F}}_I = \Gamma_{Z_{H,J,L}}\,\overline{\mathcal{F}}_I = \overline{\mathcal{F}}_I \quad \textit{pour} \quad H \subset I \subset H \cup J$$

$$R\,\Gamma_{Z_{H,J,L}}\,\overline{\mathcal{F}}_I = 0 \quad \textit{sinon.}$$

Preuve de A. – Soit $\theta = V_1 \times \mathbf{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{C}^n$; supposons que $1 \notin I$ et calculons $R\,\theta_*\,\theta^{-1}\,\overline{\mathcal{F}}_I$ (noté encore $R\Gamma_{V_1 \times \mathbf{C}^{n-1}}\,\overline{\mathcal{F}}_I$). Rappelons que :

$$\overline{\mathcal{F}}_I\Big|_{S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}} = (F_{I_2})^{\mathcal{R}(L_1)}$$

$$\overline{\mathcal{F}}_I\Big|_{S_{I_1 \cup L_1 \cup \{1\}, I_2 \cup L_2, L_3}} = (F_{I_2})^{\mathcal{R}(L_1 \cup \{1\})}$$

$$\overline{\mathcal{F}}_I\Big|_{S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2 \cup \{1\}, L_3}} = (F_{I_2})^{\mathcal{R}(L_1)}$$

(par définition de $\mathcal{F}_I$). Ces formules entraînent facilement :

$$\theta_*\,\theta^{-1}\,\overline{\mathcal{F}}_I = \overline{\mathcal{F}}_I .$$

De plus remarquons que $\overline{\mathcal{F}}_{I|V_1 \times \{x\}}$ est un faisceau constant sur V_1 pour tout x de $\mathbf{C}^{n-1}$. Par le même argument que dans la preuve (pour $I \neq \{1, 2, \ldots, n\}$) de la proposition III.2.1 :

$$R\,\theta_*\,\theta^{-1}\,\overline{\mathcal{F}}_I \cong \theta_*\,\theta^{-1}\,\overline{\mathcal{F}}_I .$$

On a donc démontré que : $R\,\theta_*\,\theta^{-1}\,\overline{\mathcal{F}}_I \cong \overline{\mathcal{F}}_I$ $(\cong R\,\Gamma_{V_1 \times \mathbf{C}^{n-1}}\,\overline{\mathcal{F}}_I)$ $Z_I = K_I \cap U_I$ (avec les notations de la preuve de la proposition III.3.1), U_I étant l'intersection des $V_i \times \mathbf{C}^{n-1}$ pour i n'appartenant pas à I ; par itération du calcul précédent on déduit :

$$R\,\Gamma_{U_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I = \overline{\mathcal{F}}_I .$$

D'où
$$R\,\Gamma_{Z_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I = R\,\Gamma_{K_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I .$$

Mais $\overline{\mathcal{F}}_I$ est à support K_I ; donc $R\,\Gamma_{K_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I = \overline{\mathcal{F}}_I$ et on a bien :

$$R\,\Gamma_{Z_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I \cong \overline{\mathcal{F}}_I ,$$

isomorphisme dans $D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$ induit par :

$$\overline{\mathcal{F}}_I \xrightarrow{\simeq} R\,\Gamma_{U_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I \xleftarrow[=]{} R\,\Gamma_{Z_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I .$$

Preuve de B. – On peut donc écrire :

$$R\,\Gamma_{Z_{H,J,L}}\,\overline{\mathcal{F}}_I = R\,\Gamma_{Z_{H,J,L} \cap Z_I}\,\overline{\mathcal{F}}_I .$$

Or $Z_{H,J,L} \cap Z_I \neq \phi$ équivaut à $H \subset I$ et $I \cap L = \phi$, donc à $H \subset I \subset H \cup J$; dans ce cas :

$$Z_{H,J,L} \cap Z_I = Z_{(H \cup j) \cap I} = Z_I,$$

ce qui termine la démonstration.

IV.2.4. LEMME. – *Soit* $(F_I, u_i, v_i) = \underline{F}$ *un objet de* $\mathcal{C}_n$ *et* $\overline{\mathcal{F}}_I$ *les faisceaux qui lui sont associés dans la construction de* $\mathcal{F}^\bullet = \beta(\underline{F})$. *Il existe des isomorphismes canoniques dépendant fonctoriellement de* $\underline{F}$:

$$R\Gamma_{Z_I} \mathcal{F}^\bullet \cong \overline{\mathcal{F}}_I [-|I|].$$

IV.2.5. *Notation.* – (I, J, L) étant une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$, soit $\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,J,L}$ le complexe défini par :

$$\overline{\mathcal{F}}^p_{I,J,L} = \bigoplus_{I \subset I_1 \subset I \cup J}^{|I_2| = p} \overline{\mathcal{F}}_{I_1} \text{ muni de la différentielle } \bigoplus_{j \in J - I_1} \Delta_j .$$

Cette notation généralise celle introduite dans la preuve de IV.2.2, étape 1 et on remarque l'égalité :

$$\mathcal{F}^\bullet = \overline{\mathcal{F}}^\bullet_{\phi, \{1,2,\ldots,n\}, \phi}.$$

On vérifie de plus que l'on a les suites exactes courtes (scindées) ou les triangles :

$$T(I, J, L, \{i\}) \quad 0 \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I \cup \{i\}, J, L} \xrightarrow{\psi} \overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I, J \cup \{i\}, L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_{I, J, L \cup \{i\}} \longrightarrow 0$$

(ψ étant l'injection canonique et φ la surjection canonique).

On notera $\langle I, J, L \rangle = \{I_1 ; I \subset I_1 \subset I \cup J\}$.

Preuve du lemme. – On utilisera deux sous-lemmes :

SOUS-LEMME 1. – *Si* $\langle I, J, L \rangle \cap \langle I', J', L' \rangle = \phi$, *on a*

$$R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I', J', L'} = 0 .$$

Preuve. – Si $J' = \phi$, c'est le lemme IV.2.3. Pour $J \neq \phi$, il suffit de raisonner par récurrence sur $|J|$ en considérant le triangle $T(I, J - \{i\}, L, \{i\})$ pour i appartenant à J.

SOUS-LEMME 2. – *Si* $\langle I, J, L\rangle \subset \langle I', J', L'\rangle$, *considérons pour* j *appartenant à* $J' \cap L$ (resp. *à* $J' \cap I$) *le morphisme* φ (resp. ψ) *issu du triangle* $T(I', J' - \{j\}, L', \{j\})$. *Alors* $R\Gamma_{Z_{I,J,L}}\varphi$ (resp. $R\Gamma_{Z_{I,J,L}}\psi$) *est un isomorphisme.*

Preuve. –

$$j \in J' \cap L \Longrightarrow \langle I, J, L\rangle \cap \langle I' \cup \{j\}, J' - \{j\}, L'\rangle = \phi$$
$$j \in J' \cap I \Longrightarrow \langle I, J, L\rangle \cap \langle I', J' - \{j\}, L' \cup \{j\}\rangle = \phi .$$

D'où le résultat, en appliquant le foncteur $R\Gamma_{Z_{I,J,L}}$ au triangle $T(I', J' - \{j\}, L', \{j\})$ et en utilisant le sous-lemme 1.

IV.3. Théorème : α est une équivalence de catégorie et admet β comme quasi-inverse.

IV.3.1. PROPOSITION. – $\alpha \circ \beta$ *est isomorphe au foncteur identité.*

Preuve de la proposition. – Soit $\underline{F} = (F_I, u_i, v_i)$ un objet de $\mathcal{C}_n$. A partir des faisceaux $\overline{\mathcal{F}}_I$, on a défini $\mathcal{F}^\bullet = \beta(\underline{F})$. $\mathcal{F}^\bullet$ est le centre d'un hypercube dont les faces sont les complexes $\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,J,L}$ (voir notations IV.2.5). Au faisceau pervers $\mathcal{F}^\bullet$, on sait associer par le chapitre III l'hypercube de cohomologie à support $\mathcal{F}^\bullet_{I,J,L} = R\Gamma_{Z_{I,J,L}}\mathcal{F}^\bullet$. Notons $(F'_I, u'_i, v'_i) = \alpha(\mathcal{F}^\bullet)$.

En utilisant les morphismes φ et ψ comme dans la démonstration du lemme IV.2.4, on obtient l'isomorphisme de triangles (fonctoriel en $\underline{F}$) :

$$\begin{array}{ccccc}
R\Gamma_{Z_{I\cup\{i\}}}\mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_I}\mathcal{F}^\bullet \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R\Gamma_{Z_{I\cup\{i\}}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,\{i\},L} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,\{i\},L} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_I}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,\{i\},L}
\end{array}$$

Par ailleurs on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & R\Gamma_{Z_{I\cup\{i\}}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,\{i\},L} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,\{i\},L} & \xrightarrow{R\Gamma_{Z_I}\varphi} R\Gamma_{Z_I}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,\{i\},L} \\
R\Gamma_{Z_{I\cup\{i\}}}\psi \uparrow & & & & \downarrow \\
 & R\Gamma_{Z_{I\cup\{i\}}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I\cup\{i\}} & & = & R\Gamma_{Z_I}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_I \\
f \downarrow & & & & \uparrow \\
 & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I\cup\{i\}} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_{I,\{i\},L} & \longrightarrow R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^\bullet_I
\end{array}$$

où les flèches verticales sont isomorphes dans $D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$ et forment en fait un isomorphisme de triangle. En effet si on remplace $\overline{\mathcal{F}}_{I\cup\{i\}}$ et $\overline{\mathcal{F}}_I$ par leurs résolutions flasques canoniques, la première étant à support dans $\overline{Z}_{I\cup\{i\}}$, f et $R\Gamma_{Z_I}\varphi$ deviennent des isomorphismes de complexes et on aboutit à un morphisme de suites exactes courtes de complexes en inversant ces isomorphismes.

D'autre part, en utilisant le lemme IV.2.3, on obtient l'isomorphisme de triangles :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^{\bullet}_{I\cup\{i\}} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^{\bullet}_{I,\{i\},L} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\overline{\mathcal{F}}^{\bullet}_{I} & \\
 & \downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow\cong & \\
0 \longrightarrow & \overline{\mathcal{F}}_{I\cup\{i\}}[-|I|-1] & \longrightarrow & \overline{\mathcal{F}}^{\bullet}_{I,\{i\},L} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{F}}_{I}[-|I|] & \longrightarrow 0
\end{array}$$

(les deux flèches extrêmes étant des isomorphismes).

Finalement, on obtient l'isomorphisme de triangle (fonctoriel en $\underline{F}$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & R\Gamma_{Z_{I\cup\{i\}}}\mathcal{F}^{\bullet} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_{I,\{i\},L}}\mathcal{F}^{\bullet} & \longrightarrow & R\Gamma_{Z_I}\mathcal{F}^{\bullet} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \overline{\mathcal{F}}_{I\cup\{i\}}[-|I|-1] & \longrightarrow & \overline{\mathcal{F}}^{\bullet}_{I,\{i\},L} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{F}}_{I}[-|I|] & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

En considérant le morphisme entre leurs suites exactes longues, on a le diagramme commutatif fonctoriel en $\underline{F}$:

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{F}}_I & \xrightarrow{\quad u'_i \quad} & \widetilde{\mathcal{F}}_{I\cup\{i\}} \\
{\scriptstyle H_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_{I\cup\{i\}}} \\
\overline{\mathcal{F}}_I & \xrightarrow{\quad u_i \quad} & \overline{\mathcal{F}}_{I\cup\{i\}}
\end{array}$$

Posons, $h_I = (H_I)_0$; il vient en particulier :

$$u'_i\, h_I = h_{I\cup\{i\}}\, u_i\,.$$

Pour que la famille des h_I soit l'isomorphisme fonctoriel cherché entre $\underline{F}$ et $\alpha\circ\beta(\underline{F})$, il reste à établir la relation :

$$v'_i\, h_I = h_{I-\{i\}} v_i\,.$$

Les v_i et les v'_i étant définis comme morphismes de recollement des restrictions de $\overline{\mathcal{F}}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ aux strates de $K_1 \times \ldots \times K_n$, cette relation exprime le fait que $H_{1,\ldots,n}$ est un morphisme de faisceaux à condition d'établir et d'utiliser pour $I = \{1, \ldots, n\}$ que la restriction de H_I à la strate $S_{I_1 \cup L_1, I_2 \cup L_2, L_3}$ se lit :

$$(F_{I_2})^{\mathfrak{r}(L_1)} \xrightarrow{H_I = (h_{I_2})^{\mathfrak{r}(L_1)}} (F'_{I_2})^{\mathfrak{r}(L_1)}$$

avec les identifications de III.3.

Ce résultat s'établit sans difficulté par récurrence sur $|I_1|$, sur $|L_1|$ et enfin sur $|L_3|$ pour se ramener à la strate $S_{\phi,\{1,2,\ldots,n\},\phi} = \{0\}$ en utilisant les formules de la proposition III.3.3 et la compatibilité des H_I avec les U_i, U'_i et les morphismes de recollement.

IV.3.2. Proposition. – *$\beta \circ \alpha$ est isomorphe au foncteur identité.*

Preuve. – Soit maintenant $\mathcal{F}^\bullet$ un objet de $\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n)$ et $\mathcal{G}^\bullet = \beta \circ \alpha(\mathcal{F}^\bullet)$ qui est aussi un objet de $\mathrm{Perv}^T(\mathbf{C}^n)$. A $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$, on associe $\widetilde{\mathcal{F}}_I = R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\mathcal{F}^\bullet[-|I|]$, $\widetilde{\mathcal{G}}_I = R^{|I|}\Gamma_{Z_I}\widetilde{\mathcal{G}}[-|I|]$ et les morphismes de faisceaux U_i et U'_i. Par construction les faisceaux $\overline{\mathcal{F}}_I$ associés à $\underline{F} = \alpha(\mathcal{F}^\bullet)$ s'identifient aux $\widetilde{\mathcal{F}}_I$. Ainsi d'après le lemme IV.2.4, on a un isomorphisme dépendant fonctoriellement de $\mathcal{F}^\bullet$:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_I \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}_I$$

ou ce qui revient au même

$$h_I : \mathcal{F}_I^\bullet = R\Gamma_{Z_I}\mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}_I^\bullet = R\Gamma_{Z_I}\mathcal{G}^\bullet.$$

La proposition est alors une conséquence du lemme suivant :

IV.3.3. Lemme. – *Soit $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$ des complexes pervers et $h_I : \mathcal{F}_I^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}_I^\bullet$ des morphismes commutant avec les Δ_i et les Δ'_i. Alors il existe dans $D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$ un unique morphisme $h : \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{G}^\bullet$ tel que $h_I = R^{|I|}\Gamma_{Z_I} h$.*

Preuve du lemme IV.3.3. – Considérons $I^\bullet$ et $J^\bullet$ les résolutions injectives canoniques de $\mathcal{F}^\bullet$ et $\mathcal{G}^\bullet$, et notons :

$$I^{\bullet}_{I,J,L} = \Gamma_{Z_{I,J,L}} I^{\bullet} = R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{F}^{\bullet}$$
$$J^{\bullet}_{I,J,L} = \Gamma_{Z_{I,J,L}} J^{\bullet} = R\Gamma_{Z_{I,J,L}} \mathcal{G}^{\bullet}.$$

Les triangles intervenant dans les hypercubes associés à $\mathcal{F}^{\bullet}$ et $\mathcal{G}^{\bullet}$ (voir III) sont issus des suites exactes courtes scindées qui, pour $I^{\bullet}$ par exemple, s'écrivent :

$$0 \longrightarrow I^{\bullet}_{I\cup\{i\},J,L} \longrightarrow I^{\bullet}_{I,J\cup\{i\},L} \longrightarrow I^{\bullet}_{I,J,L\cup\{i\}} \longrightarrow 0 .$$

Les h_I sont représentées de façon unique par des morphismes de $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$

$$h_I : I^{\bullet}_I = I^{\bullet}_{I,\phi,I'} \longrightarrow J^{\bullet}_I .$$

Le lemme IV.3.3 résulte du lemme suivant appliqué aux $h_I = \varphi_I$, avec $M = \phi$ et $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

IV.3.4. Lemme. – *Soit* $\{I, J, L, M\}$ *une partition de* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *on se donne pour chaque sommet* $\langle I_1 \rangle$ *de* $\langle I, J, L \cup M \rangle$ *(c'est-à-dire pour* $I \subset I_1 \subset I \cup J$*) des morphismes dans* $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$:

$$\varphi_{I_1} : I^{\bullet}_{I_1} \longrightarrow J^{\bullet}_{I_1 \cup M}\,[\,|M|\,]$$

tels que $(-1)^{|M|}\,\Delta_i\,\varphi_{I_1} = \varphi_{I_1\cup\{i\}}\,\Delta_i$ *si* $i \in J - I_1$. *Alors il existe un unique morphisme dans* $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$

$$\varphi : I^{\bullet}_{I,J,L\cup M} \longrightarrow J^{\bullet}_{I\cup M,J,L}\,[\,|M|\,]$$

tel que $R\Gamma_{Z_{I_1,L\cup M,J-I_1}}\,\varphi = \varphi_{I_1}$ *si* $I \subset I_1 \subset I \cup J$.

Preuves du lemme IV.3.4. – On procède par récurrence sur $|J|$, le cas où $J = \phi$ est évident. Soit j appartenant à J. D'après l'hypothèse de récurrence, on a des morphismes de complexes :

$$\varphi_1 : I^{\bullet}_{I,J-\{j\},L\cup\{j\}\cup M} \longrightarrow J^{\bullet}_{I\cup M,J-\{j\},L\cup\{j\}}\,[\,|M|\,]$$
$$\varphi_2 : I^{\bullet}_{I\cup\{j\},J-\{j\},L\cup M} \longrightarrow J^{\bullet}_{I\cup\{j\}\cup M,J-\{j\},L}\,[\,|M|\,]$$

tels que

$$\Gamma_{Z_{I_1,L\cup M,J-I_1}}\,\varphi_1 = \varphi_{I_1} \quad \text{si} \quad I \subset I_1 \subset I \cup J - \{j\}$$
$$\Gamma_{Z_{I_1,L\cup M,J-I_1}}\,\varphi_2 = \varphi_{I_1} \quad \text{si} \quad I \cup \{j\} \subset I_1 \subset I \cup J .$$

On a le diagramme :

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} I^{\bullet}_{I,J-\{j\},L\cup\{j\}\cup M} & \xrightarrow{\varphi_1} & J^{\bullet}_{I\cup M,J-\{j\},L\cup\{j\}}[\,|M|\,] \\ \Delta_j \big\downarrow & & \big\downarrow (-1)^{|M|}\Delta_j \\ I^{\bullet}_{I\cup\{j\},J-\{j\},L\cup M}[+1] & \xrightarrow{\varphi_2} & J^{\bullet}_{I\cup\{j\}\cup M,J-\{j\},L}[\,|M|+1] \end{array}$$

Par application itérée de la remarque A.2.2, les images des Δ_j par le foncteur $\Gamma_{Z_{I_1,L\cup M\cup\{j\},J-\{j\}-I_1}}$, où $I\subset I_1\subset I\cup J-\{j\}$ sont les Δ_j relatifs aux triangles images. L'image du diagramme (1) par ce foncteur est :

$$\begin{array}{ccc} I^{\bullet}_{I_1} & \xrightarrow{\varphi_{I_1}} & J^{\bullet}_{I_1\cup M}[\,|M|\,] \\ \big\downarrow \Delta_j & & \big\downarrow (-1)^{|M|}\Delta_j \\ I^{\bullet}_{I_1\cup\{j\}}[+1] & \xrightarrow{\varphi_{I_2\cup\{j\}}} & J^{\bullet}_{I_1\cup M\cup\{j\}}[\,|M|+1] \end{array}$$

Ce diagramme est commutatif et si i appartient à $J-\{j\}-I_1$, on a :

$$\Delta_i(\Delta_j\,\varphi_{I_1}) = (-1)^{|M|+1}\,(\Delta_j\,\varphi_{I_1\cup\{i\}})\Delta_i\,.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à

$$\{I, J-\{j\}, L\cup\{j\}, M\}$$

et aux $(-1)^M\,\Delta_j\,\varphi_{I_1} = \varphi_{I_1\cup\{j\}}\,\Delta_j$.

La partie unicité de l'hypothèse de récurrence implique la commutativité du diagramme (1). D'après la proposition A.1.4, on a donc un morphisme

$$\varphi : I^{\bullet}_{I,J,L\cup M} \longrightarrow J^{\bullet}_{I\cup M,J,L}$$

tel que $(\varphi_1,\varphi,\varphi_2)$ soit un morphisme de suite exacte courte, ce qui entraîne que φ satisfait aux propriétés demandées dans le lemme IV.3.4.

Reste à démontrer l'unicité de φ, qui résulte d'après la proposition A.1.4 de l'affirmation suivante : «tout morphisme de $I^{\bullet}_{I,J-\{j\},L\cup\{j\}\cup M}$ vers $J^{\bullet}_{I\cup\{j\}\cup M,J-\{j\},L\cup\{j\}}[\,|M|\,]$ est nul dans $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$», ce qui est une conséquence de lemme suivant :

IV.3.5. LEMME. – *Soit* $\{I, J, L, M\}$ *une partition de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *telle que* $M \neq \phi$; *alors tout morphisme*

$$\varphi : I^{\bullet}_{I,J,L\cup M} \longrightarrow J^{\bullet}_{I\cup M,J,L}\ [+k]$$

est nul dans $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$ *dès que* $k < |M|$.

Preuve du lemme IV.3.5. – On raisonne par récurrence sur $|J|$: si j appartient à J, on a un morphisme de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^{\bullet}_{I\cup\{j\},J-\{j\},L\cup M} \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_K\varphi"] & I^{\bullet}_{I,J,L\cup M} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & I^{\bullet}_{I,J-\{j\},L\cup\{j\}\cup M} \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_U\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J^{\bullet}_{I\cup\{j\}\cup M,J-\{j\},L}\ [+k] \arrow[r] & J^{\bullet}_{I\cup M,J,L} \arrow[r] & J^{\bullet}_{I\cup M,J-\{j\},L\cup\{j\}}\ [+k] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $K = \prod_{i\neq j} \mathbf{C}_i \times K_j$ et $U = \mathbf{C}^n - K$.

D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $J - \{j\}$, $\Gamma_K\varphi$ et $\Gamma_U\varphi$ sont nuls dans $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$ et d'autre part tout morphisme :

$$I^{\bullet}_{I,J-\{j\},L\cup\{j\}\cup M} \longrightarrow J^{\bullet}_{I\cup\{j\}\cup M,J-\{j\},L}\ [+k]$$

est nul. On en déduit en utilisant A.1.4 : $\varphi = 0$ dans $K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})$. On est donc réduit au cas $J = \phi$, où on a :

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})}(I^{\bullet}_I, J^{\bullet}_{I\cup M}\ [+k]) = \mathrm{Hom}_{D(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})}(\widetilde{\mathcal{F}}_I\,[-\ell_1], \widetilde{\mathcal{G}}_{I\cup M}\ [-\ell_2])$$

où $\ell_1 = |I| < \ell_2 = |I| + |M| - k$.

$\mathrm{Hom}_{K(\mathbf{C}_{\mathbf{C}^n})}(I^{\bullet}_I, J^{\bullet}_{I\cup M}\ [k])$ est donc la cohomologie en degré zéro du complexe :

$$\mathrm{R\,Hom}\,(\widetilde{\mathcal{F}}_I\,[-\ell_1], \widetilde{\mathcal{G}}_{I\cup M}\ [-\ell_2]) = \mathrm{R\,Hom}\,(\widetilde{\mathcal{F}}_I, \widetilde{\mathcal{G}}_{I\cup M})\,[\ell_1 - \ell_2].$$

D'où le résultat, car : $\mathrm{Ext}^i(\widetilde{\mathcal{F}}_I, \widetilde{\mathcal{G}}_{I\cup M}) = 0$ si $i < 0$

et donc :

$$h^i(\mathrm{R\,Hom}\,(\widetilde{\mathcal{F}}_I, \widetilde{\mathcal{G}}_{I\cup M})\,[\ell_1 - \ell_2]) = 0 \quad \text{si} \quad i < \ell_2 - \ell_1.$$

APPENDICE

A.1. Triangles et suites exactes courtes scindées de complexes.

A une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on associe $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{A}$, $K(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes à homotopie près et la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$. Leurs structures de catégories triangulées sont construites à partir du foncteur de translation, noté T. Rappelons seulement que $d_{T(A^\bullet)} = -d_{A^\bullet}$, où $d_{X^\bullet}$ désigne la différentielle d'un complexe $X^\bullet$ (on écrira plus simplement d lorsqu'il n'y aura pas de confusion à craindre).

Notation. – Soit $A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet$ un morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. On note $T(A^\bullet) \oplus B^\bullet$ le "mapping cône" du morphisme u ; c'est le complexe $\ldots \longrightarrow A^{n+1} \oplus B^n \longrightarrow \ldots$ muni de la différentielle $d : \begin{pmatrix} -d_A & 0 \\ u & d_B \end{pmatrix}$.

A.1.0. Rappelons qu'à une suite exacte courte de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, on sait associer un triangle de $D(\mathcal{A})$. Soit

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xhookrightarrow{i} B^\bullet \xrightarrow{\pi} C^\bullet \longrightarrow 0$$

une telle suite exacte ; désignons par s le morphisme :

$$s : T(A^\bullet) \oplus B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \qquad s = 0 \oplus \pi .$$

On montre que s est un quasi-isomorphisme, on obtient donc l'isomorphisme de triangles dans $D(\mathcal{A})$:

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "="] & B^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "="] & T(A^\bullet) \oplus B^\bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, "s", "\text{qis}"'] & T(A^\bullet) \arrow[d, "="] \\ & & & \end{tikzcd}$$

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} A^\bullet \arrow[r, hook, "i"] & B^\bullet \arrow[r, "\pi"] & C^\bullet \arrow[r, "p \circ s^{-1}"] & T(A^\bullet) \end{tikzcd}$$

Le triangle (2) est le triangle cherché.

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier quelques propriétés des suites exactes courtes scindées de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

A.1.1. Definition. – *On appelle suite exacte courte scindée de* $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ *une suite exacte courte de* $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$:

$$0 \longrightarrow A^{\bullet} \xhookrightarrow{i} B^{\bullet} \xrightarrow{\pi} C^{\bullet} \longrightarrow 0$$

telle qu'il existe $\sigma = (\sigma_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ *famille de morphismes* $\sigma_k : C^k \longrightarrow B^k$ *vérifiant* $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}$. *On dit alors que* σ *est une scission.*

Notation. – σ n'est pas un morphisme de complexes et on note : $\delta_\sigma = d\sigma - \sigma d$.

A.1.2. Proposition. – *L'image de* δ_σ *est contenue dans* $A^{\bullet}$ *et* δ_σ *définit un morphisme dans* $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ *de* $T^{-1}(C^{\bullet})$ *vers* $A^{\bullet}$. δ_σ *ne dépend pas à homotopie près de la scission* σ.

A.1.3. Proposition. – *Soit*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^{\bullet} \arrow[r, hook, "i"] & B^{\bullet} \arrow[r, shift left, "\pi"] & C^{\bullet} \arrow[l, shift left, bend left, "\sigma"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

une suite exacte courte scindée de $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$:

a) $B^{\bullet}$ *est isomorphe au "mapping cône"* $T(T^{-1}(C^{\bullet})) \oplus A^{\bullet}$ *du morphisme* δ_σ.

b) $A^{\bullet} \xhookrightarrow{i} B^{\bullet} \xrightarrow{\pi} C^{\bullet} \xrightarrow{-T(\delta_\sigma)} T(A^{\bullet})$ *est un triangle isomorphe au triangle associé à notre suite exacte courte (par la méthode A.1.0).*

Preuves. – Ces preuves faciles sont laissées au lecteur.

A.1.4. Proposition. – *Soit un morphisme entre deux suites exactes courtes scindées de* $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^{\bullet} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\varphi_1"] & B^{\bullet} \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_2"] & C^{\bullet} \arrow[l, shift left, bend left, "\sigma"] \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'^{\bullet} \arrow[r, hook, "i'"] & B'^{\bullet} \arrow[r, shift left, "\pi'"] & C'^{\bullet} \arrow[l, shift left, bend left, "\sigma'"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et deux scissions σ *et* σ' ; δ_σ *et* $\delta_{\sigma'}$ *définissent deux éléments de* $K(\mathfrak{A})$ δ *et* δ' *indépendants de ces scissions (voir A.1.2). On notera* $\overline{\varphi}$ *l'image dans* $K(\mathfrak{A})$ *d'un morphisme* φ *de* $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$.

a) *On a l'égalité* $\overline{\varphi}_1 \delta = \delta' \overline{\varphi}_3$

b$_1$) *Réciproquement soit* φ_1 *et* φ_3 *deux morphismes de* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ *vérifiant* $\overline{\varphi}_1 \delta = \overline{\delta}' \varphi_3$ *; alors il existe* $\varphi_2 : B \longrightarrow B'$ *tel que* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *soit un morphisme de suites exactes courtes.*

b$_2$) *Soit* ψ_1 *et* ψ_3 *deux morphismes de* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ *vérifiant* $\overline{\varphi}_1 = \overline{\psi}_1$ *et* $\overline{\varphi}_3 = \overline{\psi}_3, \psi_2$ *tel que* (ψ_1, ψ_2, ψ_3) *soit un morphisme entre nos deux suites exactes courtes ; alors il existe* $h : C^\bullet \longrightarrow A'^\bullet$ *morphisme de* $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ *tel que :*

$$\overline{\psi}_2 - \overline{\varphi}_2 = \overline{i' \circ h \circ \pi}.$$

Preuves de a). – On a l'égalité

$$\varphi_1 \delta_\sigma - \delta_{\sigma'} \varphi_3 = d_{B'^\bullet} (\varphi_2 \sigma - \sigma' \varphi_3) + (\varphi_2 \sigma - \sigma' \varphi_3) d_{T^{-1}(C^\bullet)} :$$

En lui appliquant le morphisme π', on remarque que $\varphi_2 \sigma - \sigma' \varphi_3$ est une famille de morphismes de C^{n-1} vers A'^n ; donc :

$$\varphi_1 \delta_{\sigma'} - \delta_{\sigma'} \varphi_3 = d_{A'^\bullet} (\varphi_2 \sigma - \sigma' \varphi_3) + (\varphi_2 \sigma' - \sigma' \varphi_3) d_{T^{-1}(C^\bullet)} .$$

On en déduit : $\overline{\varphi}_1 \delta = \delta' \overline{\varphi}_3$.

Preuve de b_1). – D'après la proposition A.1.3.a), on peut remplacer $B^\bullet$ par $T(T^{-1}(C^\bullet)) \oplus A^\bullet$, le "mapping cône" de δ_σ. Pour que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ soit un morphisme de suites exactes courtes, il est nécessaire que φ_2 soit de la forme :

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_3 & 0 \\ \lambda & \varphi_1 \end{pmatrix},$$

où $\lambda = (\lambda^k)_{k \in \mathbf{Z}}$ est une famille de morphismes de C^k vers A^k. Une telle application φ_2 convient si et seulement si $\varphi_2 d = d \varphi_2$, ce qui donne l'égalité

$$d_{A^\bullet} \lambda - \lambda d_{C^\bullet} = \varphi_1 \delta_\sigma - \delta_{\sigma'} \varphi_3 .$$

Par hypothèse, $\overline{\varphi}_1 \delta = \delta' \overline{\varphi}_3$; donc $\varphi_1 \delta_\sigma - \delta_{\sigma'} \varphi_3$ s'écrit :

$$\varphi_1 \delta_\sigma - \delta_{\sigma'} \varphi_3 = d_{A^\bullet} k + k d_{T^{-1}(C^\bullet)} = d_{A^\bullet} k - k d_{C^\bullet} .$$

Donc φ_2 convient si et seulement si :

$$\lambda - k = h,$$

où h est un morphisme de $C^\bullet$ vers $A'^\bullet$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. On peut prendre $\lambda = k$.

Preuve de b_2). – On se ramène au cas où φ_1, φ_3 sont homotopes à zéro, il s'écrivent donc :

$$\varphi_1 = d\,k_1 + k_1\,d \qquad \varphi_3 = d\,k_3 + k_3\,d$$

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est un morphisme de suites exactes courtes et donc $\varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_3 & 0 \\ \lambda & \varphi_1 \end{pmatrix}$ où :

$$\begin{aligned} d_{A^\bullet}\,\lambda - \lambda\,d_{C^\bullet} &= \varphi_1\,\delta_\sigma - \delta_{\sigma'}\,\varphi_3 \\ &= d_{A'^\bullet}\,(k_1\,\delta_\sigma + \delta_{\sigma'}\,k_3) - (k_1\,\delta_\sigma + \delta_{\sigma'}\,k_3)\,d_{C^\bullet} \end{aligned}$$

$h = \lambda - (k_1\,\delta_\sigma + \delta_{\sigma'}\,k_3)$ est un morphisme de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. On conclut, car alors on trouve :

$$\varphi_2 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix} = (k_3, k_1)\,d + d\,(k_3, k_1).$$

A.2. Exemples et remarques dans un cas particulier.

Dans ce qui suit, on considère un espace topologique X et un anneau unitaire A. La catégorie abélienne $\mathcal{A}$ sera la catégorie des faisceaux de A-modules sur X. Un élément $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ est quasi-isomorphe à un complexe formé d'objets injectifs :

$$\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\text{qis}} I^\bullet.$$

On choisit une façon fonctorielle de réaliser un tel quasi-isomorphisme.

Remarque. – Si $A = \mathbf{C}$, les faisceaux flasques sont injectifs et on peut prendre le complexe simple associé au complexe double obtenu à partir de la résolution flasque canonique de chaque terme de $\mathcal{F}^\bullet$.

A.2.1. *Triangle associé à un sous-espace fermé de X.*

Soit K un sous-espace fermé de X et $I^\bullet$ la résolution injective canonique du complexe $\mathcal{F}^\bullet$.

$$R\,\Gamma_K\,\mathcal{F}^\bullet = \Gamma_K\,I^\bullet$$

$$R\,\Gamma_{C-K}\,\mathcal{F}^\bullet = \Gamma_{C-K}\,I^\bullet.$$

On a donc le diagramme dans $D(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
 & R\Gamma_K \mathcal{J}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathcal{J}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\text{qis}"] & R\Gamma_{C-K} \mathcal{J}^\bullet \arrow[d, "="] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma_K I^\bullet \arrow[r, "i"] & I^\bullet \arrow[r, "\pi"] & \Gamma_{C-K} I^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La deuxième ligne est une suite exacte courte scindée de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. A cette suite exacte courte, on associe comme en A.1.0 le triangle :

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_K \mathcal{J}^\bullet \arrow[r] & \mathcal{J}^\bullet \arrow[r] & R\Gamma_{C-K} \mathcal{J}^\bullet . \arrow[ll, bend left, "-\Delta \quad +1"]
\end{tikzcd}$$

Et on a vu dans la proposition A.1.3 que ce triangle est fonctoriellement isomorphe au triangle :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_K I^\bullet \arrow[r] & I^\bullet \arrow[r] & \Gamma_{C-K} I^\bullet , \arrow[ll, bend right, "-\Delta \quad +1"']
\end{tikzcd}$$

où $\Delta = T(\delta)$, δ étant le représentant dans $K(\mathcal{A})$ d'un morphisme δ_σ défini à partir d'une scission de la suite exacte scindée.

A.2.2. *Diagramme de triangles associés à deux espaces fermés.*

Soit K_1 et K_2 deux fermés de X ; posons $V_1 = X - K_1$ et $V_2 = X - K_2$; on a le diagramme commutatif entre six suites exactes courtes scindées :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{K_1 \cap K_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{K_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{V_1 \cap K_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{K_1} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{V_1} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{K_1 \cap V_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{V_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{V_1 \cap V_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Comme précédemment, à partir d'une scission des suites exactes scindées verticales (resp. horizontales), on définit des morphismes Δ_2 (resp. Δ_1).

Remarque. – Etant donné f représentant le morphisme $\Delta_1 : \Gamma_{V_1} I^\bullet \longrightarrow \Gamma_{K_1} I^\bullet [1]$, les deux autres morphismes Δ_1 peuvent être représentés par $\Gamma_{K_2} f$ et $\Gamma_{V_2} f$ (vérification laissée au lecteur).

PROPOSITION. – *Le diagramme suivant est anticommutatif :*

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{V_1 \cap V_2} \mathcal{F}^\bullet \arrow[r, "\Delta_1"] \arrow[d, "\Delta_2"] & R\Gamma_{K_1 \cap V_2} \mathcal{F}^\bullet [+1] \arrow[d, "\Delta_2"] \\
R\Gamma_{V_1 \cap K_2} \mathcal{F}^\bullet [+1] \arrow[r, "\Delta_1"] & R\Gamma_{K_1 \cap K_2} \mathcal{F}^\bullet [+2],
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_2 \Delta_1 = 0$.

Preuve. – f étant un représentant de

$$U_1 : \Gamma_{V_1} I^\bullet \longrightarrow \Gamma_{K_1} I^\bullet [+1],$$

on a le morphisme de suites exactes scindées dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma_{V_1 \cap K_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{V_1} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{V_1 \cap V_2} I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{K_1 \cap K_2} I^\bullet [+1] \arrow[r] & \Gamma_{K_1} I^\bullet [+1] \arrow[r] & \Gamma_{K_1 \cap V_2} I^\bullet [+1] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans la deuxième suite exacte scindée, l'application du foncteur T entraîne le changement de signe des différentielles. Le morphisme de $\Gamma_{K_1 \cap V_2} I^\bullet [+1]$ vers $\Gamma_{K_1 \cap K_2} I^\bullet [+2]$ est donc $-\Delta_2$. En utilisant la proposition A.1.4, il vient :

$$-\Delta_2 (\overline{\Gamma_{V_2} f}) = (\overline{\Gamma_{K_2} f}) \Delta_2 ,$$

d'où, d'après la remarque précédente :

$$-\Delta_2 \Delta_1 = \Delta_1 \Delta_2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BRIANCON et Ph. MAISONOBE, Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable, *l'Enseignement mathématique*, t.30 (1984).

[2] J.L. BRYLINSKI, Modules holonomes à singularité régulière et filtration de Hodge, Proceedings, La Rabida, 1981, *Lectures Notes in Mathematics*, n° 961.

[3] J.L. BRYLINSKI, (co) homologie d'intersection et faisceaux pervers, 34e année, *Séminaire Bourbaki*, n° 585, février 1982.

[4] M. GORESKY et R.Mac PHERSON, Intersection Homology II. *Inventiones Math.*, vol. 72, fasc. 1 (1983).

[5] R. HARTSHORNE, Residues & Duality, *Lect. Notes in Math.*, n° 20, (1966).

[6] Séminaire Heidelberg-Strasbourg, 1966-1967, Dualité de Poincaré, *Publication I.R.M.A.*, Strasbourg.

[7] M. KASHIWARA, Systèmes d'équations micro-différentielles, cours de l'université de Paris-Nord, 1976, rédigé par T.M. Fernandes. *"Progress in Mathematics"*, Birkhaüser, Vol. 34 (1983).

[8] M. KASHIWARA, Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles, exposé au *Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-1980*, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

[9] Luminy 1981, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Astérisque*, n° 100, 101, 102.

[10] Luminy 1983, Systèmes Différentiels et Singularités, à paraître dans *Astérisque*

[11] Z. MEBKHOUT, Thèse d'état, Université de Paris VII, Février 79. *Une équivalence de catégorie. Une autre équivalence de catégorie, Compositio Math.*, Vol. 51 (1984), 51-62 & 63-88.

[12] F. PHAM, Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin, *Progress in Math*, 2, Birkhaüser, 1979.

[13] J.L. VERDIER, Catégories dérivées, Etat 0, *Lectures Notes in Mathematics*, n° 569 (1977)

[14] J.L. VERDIER, Classe d'homologie associée à un cycle, *Astérisque*, 36-37 (1976).

[15] J.L. VERDIER, Extension of a perverse sheaf over a closed subspace, à paraître dans *Astéristique.*

Manuscrit reçu le 15 décembre 1983.

A. GALLIGO & Ph. MAISONOBE,
Université de Nice
I.M.S.P.
Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex (France)

&

M. GRANGER,
Université d'Angers
Dépt. de Mathématiques
2 bd Lavoisier
49045 Angers Cedex (France).