ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ PIRIOU

Microdistributions de Fourier classiques dans le cadre analytique réel

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 4 (1984), p. 109-134
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_109_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 4 (1984). 109-134.

MICRODISTRIBUTIONS DE FOURIER CLASSIQUES DANS LE CADRE ANALYTIQUE RÉEL

par André PIRIOU

Introduction.

Si X est une variété analytique et Λ une sous-variété lagrangienne conique analytique de $T^*X\backslash 0$, on donne une description du faisceau des microdistributions (dans le cadre analytique réel) de Fourier (classiques) associées à Λ à partir de distributions représentées à l'aide de phases analytiques réelles et d'amplitudes qui sont des réalisations holomorphes tronquées de symboles analytiques.

Dans le cadre C^∞, le contour d'intégration par rapport à la variable de fréquence est $\mathbf{R}^N$. Ici, pour pouvoir utiliser facilement les fonctions de troncature, et par analogie avec les « bons contours » définis par J. Sjöstrand [10], on déforme $\mathbf{R}^N$ en un contour de $\mathbf{C}^N$ le long duquel la partie imaginaire de la phase possède une propriété convenable de positivité. Les singularités analytiques des distributions ainsi définies peuvent alors s'étudier à l'aide du théorème de la phase stationnaire complexe, et on obtient un théorème de changement de phase analogue à celui du cas C^∞, ainsi qu'un théorème de composition sous les hypothèses standard de transversalité.

On traite le cas particulier des micro-opérateurs pseudo-différentiels analytiques, et son application au calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels analytiques classiques définis par L. Boutet de Monvel [2], L. Boutet de Monvel et P. Kree [3].

Signalons que les applications aux propriétés de « transmissions analytiques », et en particulier à l'étude du comportement au bord, de part et d'autre des parties lisses du conoïde bicaractéristique, de la solution

fondamentale d'un opérateur différentiel strictement hyperbolique à coefficients analytiques, ont été étudiées par H. Bougrini [1].

Les principaux outils utilisés ici sont le théorème de la phase stationnaire complexe (voir [10]) et le calcul des symboles analytiques (voir [3], [9], [10]) en particulier la propriété d'existence de réalisations holomorphes de symboles analytiques, établis par L. Boutet de Monvel et P. Kree [3]. On donne en appendice une démonstration élémentaire de ce résultat (sous une forme un peu plus générale), en utilisant une transformation de Fourier-Borel.

1. Phases, amplitudes, contours et distributions de Fourier.

Soient U un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^n$ et V un ouvert conique de $\mathbf{R}^N|0$. On considère une fonction de phase $\varphi(x, \theta)$ dans un voisinage conique $U_1 \times V_1$ de $\bar{U} \times \bar{V}$ dans $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$, avec $\varphi(x,\theta)$ analytique à valeurs réelles, homogène de degré 1 en θ, $(\varphi'_x, \varphi'_\theta) \neq 0$ en chaque point.

Soit $\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1$ un voisinage complexe conique (pour l'action de $\mathbf{R}^+$) de $U_1 \times V_1$ dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^N|0)$, dans lequel $\varphi(x, \theta)$ se prolonge en fonction holomorphe, avec $(\varphi'_x, \varphi'_\theta) \neq 0$ en chaque point.

On considère un symbole analytique $\sum_{j \geqslant 0} a_j(x, \theta)$ de degré d dans $\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1$: c'est une série formelle de fonctions $a_j(x, \theta)$, holomorphes dans $\tilde{U}_1 \times \tilde{V}_1$, homogènes en θ de degré $d - j$, et telles que :

Pour tout compact K de $U_1 \times V_1$, il existe $C_K \geqslant 0$ avec $|a_j(x,\theta)| \leqslant C_K^{j+1} j!$ pour $j \in \mathbf{N}$, $(x,\theta) \in K$.

Soit $a(x,\theta)$ une réalisation holomorphe de $\sum_{j \geqslant 0} a_j(x,\theta)$ dans un voisinage complexe conique $\tilde{U} \times \tilde{V}$ de $U \times V$ dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^N|0$: c'est une fonction holomorphe dans $\tilde{U} \times \tilde{V}$, telle qu'il existe $C \geqslant 0$ avec

$$\left| a(x,\theta) - \sum_{j=0}^{J-1} a_j(x,\theta) \right| \leqslant C^{J+1} J! |\theta|^{d-J} \quad \text{pour} \quad J \geqslant 1, \ (x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{V}.$$

(Voir l'appendice pour l'existence d'une telle réalisation.)

Considérons une fonction de troncature ζ avec

(1) $\zeta \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\zeta(\theta) = 0$ si $|\theta|$ petit, $\zeta(\theta)$ homogène de degré 0 en θ si $|\theta|$ grand, et (Supp conique $\zeta) \cap S_{N-1} \subset\subset V \cap S_{N-1}$, où S_{N-1} est la sphère unité de $\mathbf{R}^{N-1}$.

Soit enfin V_0 un ouvert conique de $\mathbf{R}^N \backslash 0$ avec

$$(\text{Supp conique } \zeta) \cap S_{N-1} \subset\subset V_0 \cap S_{N-1} \subset\subset V \cap S_{N-1}.$$

Donnons la

DÉFINITION 1. — *On appelle* φ*-déformation de* V_0 *une application* C^∞

$$\begin{aligned} [0,T] \times U \times V_0 &\to \tilde{V} \quad (T>0) \\ (t,x,\alpha) &\mapsto \theta = \theta(t,x,\alpha) \end{aligned}$$

homogène de degré 1 *en* α, *analytique par rapport à* x, *avec*

$$\theta(t,x,\alpha) = \alpha + O(t|\varphi'_\theta(x,\alpha)|\,|\alpha|)$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,x,\alpha) \quad \textit{injective}$$

et telle qu'il existe $c > 0$ *vérifiant*

(2) $$\operatorname{Im} \varphi(x,\theta(t,x,\alpha)) \geqslant ct|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha|.$$

Exemple 1. — On peut prendre $\theta(t,x,\alpha) = \alpha + it\varphi'_\theta(x,\alpha)\,|\alpha|$, avec $t \in [0,T]$, $T > 0$ assez petit.

En effet, la formule de Taylor montre que, pour $\theta = \theta(t,x,\alpha)$:

$$\varphi(x,\theta) = \varphi(x,\alpha) + it\,|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha| + O(t^2|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha|),$$

d'où

$$\operatorname{Im} \varphi(x,\theta) \geqslant \frac{t}{2}\,|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2\,|\alpha| \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant 0 \quad \text{assez petit.}$$

THÉORÈME 1. — *Soient* U, V, $\varphi(x,\theta)$, $a(x,\theta)$, $\zeta(\theta)$, V_0, $\theta(t,x,\alpha)$ *comme ci-dessus. Pour* $0 < t \leqslant T$, *on désigne par*

(3) $$u_t(x) = \int_{\substack{\theta=\theta(t,x,\alpha) \\ \alpha \in V_0}} e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\zeta(\alpha)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

la distribution $u_t \in \mathscr{D}'(\mathrm{U})$ *définie par*

$$(4) \quad u_t(x) = \int_{V_0} e^{i\varphi(x,\theta(t,x,\alpha))} a(x,\theta,(t,x,\alpha))\zeta(\alpha) \frac{D\theta(t,x,\alpha)}{D\alpha} d\alpha$$

au sens des intégrales oscillantes. Alors on a

$$\mathrm{SS}u_t \subset \{(x,\varphi'_x(x,\alpha) \mid x \in \mathrm{U}, \alpha \in \mathrm{Supp} \text{ conique } \zeta, \varphi'_\theta(x,\alpha) = 0\}$$

où SS *désigne le spectre singulier analytique* (*voir* [9], [10]).

Démonstration. — Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{U} \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$ tel que $\varphi'_x(x_0, \alpha) - \xi_0$ et $\varphi'_\theta(x_0, \alpha)$ ne s'annulent pas simultanément pour $\alpha \in \mathrm{Supp}$ conique ζ. Pour montrer que $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{SS}u$, on considère (voir [10]) une fonction $\psi(x,y,\xi)$ analytique au voisinage de (x_0, x_0, ξ_0) et une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{C}^n)$ telles que :

$$\psi(x_0,x_0,\xi_0) = 0, \qquad \psi'_y(x_0,x_0,\xi_0) = \xi_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im}\,\psi(x,y,\xi) \leqslant 0 \\ \mathrm{Im}\,\psi(x_0,y,\xi_0) \leqslant -c|x_0-y|^2 \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad x, y, \xi \text{ réels}, \quad (c>0)$$

$$\chi \text{ à support voisin de } x_0, \qquad \chi = 1 \text{ au voisinage de } x_0,$$

et on établit la décroissance exponentielle en τ lorsque $\tau \to +\infty$ de la quantité

$$(5) \qquad \mathrm{I}(x,\xi,\tau) = \langle u_t(y), \chi(y) e^{-i\tau\psi(x,y,\xi)} \rangle$$

pour (x,ξ) dans un voisinage réel assez petit de (x_0, ξ_0).

En posant $\dfrac{D\theta(t,x,\alpha)}{D\alpha} = \mathrm{J}(x,\alpha)$, on obtient, d'après (4) :

$$(6) \quad \mathrm{I}(x,\xi,\tau) = \tau^N \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N} e^{i\tau[\varphi(y,\theta) - \psi(x,y,\xi)]} a(y,\tau\theta)\zeta(\tau\alpha)\,\chi(y)\mathrm{J}(y,\alpha)\,dy\,d\alpha$$

où $\theta = \theta(t,y,\alpha)$.

Posons $\mathrm{F}(y,\alpha,x,\xi) = \varphi(y,\theta(t,y,\alpha)) - \psi(x,y,\xi)$.

Puisque $\psi'_y(x_0,x_0,\xi_0) = \xi_0 \in \mathbf{R}^n \mid \{0\}$ et par homogénéité de degré 1 en α, on voit qu'il existe $r > 0$ tel que $|\mathrm{F}'_y| \geqslant r$ pour $(x,\xi) = (x_0, \xi_0)$, $|\alpha| \leqslant r$, et y dans un voisinage de supp χ. On commence par montrer que la contribution de $\{|\alpha| \leqslant r\}$ dans (6) est à décroissance exponentielle en τ. Pour cela, on effectue la déformation de contour en y,

$\mathbf{R}^n \ni y \mapsto y_s = y + is\bar{F}'_y(y,\alpha,x,\xi)f(y)$ où $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(y) = 1$ au voisinage de x_0, avec Supp f assez voisin de x_0 et $s \geqslant 0$ assez voisin de 0 pour que la déformation se fasse dans la région où la fonction de troncature χ est holomorphe.

La formule de Stokes permet de remplacer la contribution de $\{|\alpha| \leqslant r\}$ dans (6) par

$$\tau^N \int_{|\alpha| \leqslant r} e^{i\tau F(y_s,\alpha,x,\xi)} a(y_s, \tau\theta(t,y_s,\alpha))\zeta(\tau\alpha)\chi(y_s)J(y_s,\alpha)\, dy\, d\alpha.$$

La formule de Taylor donne

$$\begin{aligned} F(y_s,\alpha,x,\xi) = {} & F(y,\alpha,x,\xi) \\ & + is|F'_y(y,\alpha,x,\xi)|^2 f(y) + O(s^2|F'_y|^2 f^2(y)). \end{aligned}$$

Si $s > 0$ est choisi assez petit, on obtient donc, pour $(x,\xi) = (x_0,\xi_0)$, $y_s \in \operatorname{Supp}\chi$ et $|\alpha| \leqslant r$:

$$\operatorname{Im} F(y_s,\alpha,x_0,\xi_0) \geqslant c|y-x_0|^2 + \frac{s}{2} r^2 f(y) \geqslant c' > 0,$$

et par continuité on obtient bien $\operatorname{Im} F(y_s,\alpha,x,\xi) \geqslant c'/2$ si (x,ξ) est dans un voisinage assez petit de (x_0,ξ_0).

Il reste donc à étudier l'intégrale

$$(7) \quad \tau^N \int_{\substack{\theta=\theta(t,y,\alpha) \\ y \in \mathbf{R}^n,\ \alpha \in \mathbf{R}^N,\ |\alpha| \geqslant r}} e^{i\tau\Phi(y,\theta,x,\xi)} a(y,\tau\theta)\zeta(\tau\alpha)\chi(y)\, dy\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

où on a posé

$$\Phi(y,\theta,x,\xi) = \varphi(y,\theta) - \psi(x,y,\xi).$$

On effectue une déformation en y analogue à la précédente:

$$\mathbf{R}^n \ni y \mapsto Y_s = y + is\,\bar{F}'_y(y,\alpha,x,\xi)\frac{f(y)}{|\alpha|},$$

qui permet de remplacer (7) par:

$$\begin{aligned} (8) \quad \tau^N \int_{\Gamma_{x,\xi}} & e^{i\tau\Phi(Y,\theta,x,\xi)} a(Y,\tau\theta)\zeta(\tau\alpha)\chi(Y)\, dY_1 \\ & \wedge \ldots \wedge dY_n \wedge d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N, \end{aligned}$$

où $\Gamma_{x,\xi}$ est la restriction à $\{|\alpha| \geqslant r\}$ du contour

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N \ni (y,\alpha) \mapsto (Y_s(y,\alpha,x,\xi),\ \theta(t,Y_s(y,\alpha,x,\xi),\alpha)).$$

Comme précédemment, on obtient, sur l'image du contour $\Gamma_{x,\xi}$ et pour $s > 0$ assez petit :

$$\operatorname{Im}\Phi \geqslant \operatorname{Im} F(y,\alpha,x,\xi) + \frac{s}{2}|F'_y(y,\alpha,x,\xi)|^2 \frac{f(y)}{|\alpha|} \geqslant 0.$$

(On rappelle que $F(y,\alpha,x,\xi) = \varphi(y,\theta(t,y,\alpha)) - \psi(x,y,\xi))$.

On a, avec des constantes $C \geqslant 0$ et $\tau > 0$:

$$\operatorname{Im}\Phi \geqslant c|y-x_0|^2 - C(|x-x_0|+|\xi-\xi_0|) + c|\varphi'_\theta(x,\alpha)|^2|\alpha| + c|F'_y|\frac{f(y)}{|\alpha|}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $f(y) = 1$ lorsque $|y-x_0| \leqslant \varepsilon$. Quand $|y-x_0| \geqslant \varepsilon$, la minoration précédente prouve que $\operatorname{Im}\Phi \geqslant c' > 0$ si $|x-x_0| + |\xi - \xi_0|$ est assez petit. D'autre part, pour $(x,y,\xi) = (x_0,x_0,\xi_0)$, on obtient, avec $\theta = \theta(t,x_0,\alpha)$:

$$\text{(9)}\quad \operatorname{Im}\Phi \geqslant c[|\varphi'_0(x_0,\alpha)|^2|\alpha| + |\varphi'_x(x_0,\theta) - \xi_0 + \varphi'_\theta(x_0,\theta)\theta'_y(x_0,\alpha)|^2\frac{1}{|\alpha|}.$$

Par hypothèse, le second membre de (9) reste strictement positif pour $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ, et on en déduit qu'il est minoré par $c''|\alpha|$ (avec $c''>0$) lorsque $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ et $|\alpha| \geqslant r$. Par perturbation, on obtient $\operatorname{Im}\Phi \geqslant \frac{c''}{2}|\alpha|$ pour $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ, $|\alpha| \geqslant r$, (x,ξ) assez voisin de (x_0,ξ_0), $|y-x_0| \leqslant \varepsilon$, ε assez petit. Ceci prouve la décroissance exponentielle en τ de (8), et achève la démonstration du théorème 1.

Notons que dans le théorème 1 on considère u_t avec $t > 0$. On peut dans certains cas prendre $t = 0$:

PROPOSITION 1. — *Soient* U, V, $\varphi(x,\theta)$, $a(x,\theta)$, $\zeta(\theta)$ *comme précédemment, avec de plus :* $V = \mathbf{R}^N\backslash 0$

$$\zeta(\theta) = 0 \quad \textit{pour} \quad |\theta| \textit{ petit}, \quad \theta \in \mathbf{R}^N\backslash 0$$
$$\zeta(\theta) = 1 \quad \textit{pour} \quad |\theta| \textit{ grand}, \quad \theta \in \mathbf{R}^N\backslash 0.$$

Alors la distribution

$$(10) \qquad u(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta \quad (u \in \mathscr{D}'(U))$$

coïncide, modulo une fonction analytique, avec une distribution $u_t(t>0)$ *de la forme* (4).

Démonstration. — Soit $h \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ avec $h(\alpha) = 0$ si $|\alpha| < R$, $h(\alpha) = 1$ si $|\alpha| \geqslant 2R$, $0 \leqslant h \leqslant 1$. On effectue dans (10) la déformation de contour en θ, pour $t \geqslant 0$ assez petit :

$$\mathbf{R}^N \ni \alpha \mapsto \theta = \alpha + it\varphi'_\theta(x,\alpha)|\alpha|h(\alpha) = \theta_t(x,\alpha)$$

si R est choisi assez grand, cette déformation a lieu dans la région où $\chi(\theta)$ est holomorphe, donc

$$(11) \quad u(x) = \int_{\theta=\theta_t(x,\alpha),\alpha\in\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N.$$

Lorsque $|\alpha| \leqslant R$, on a $\theta_t(x,\alpha) = \alpha$, et la partie correspondante de (11) est analytique par rapport à x.

Lorsque $R \leqslant |\alpha| \leqslant 3R$, on a $\zeta(\theta_t(x,\alpha)) = 1$, donc la partie correspondante de (11) est encore analytique par rapport à x.

Si on considère une fonction $\zeta_1 \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ avec $\zeta_1(\alpha) = 0$ si $|\alpha| \leqslant 2R$, $\zeta_1(\alpha) = 1$ si $|\alpha| \geqslant 3R$, on obtient donc, modulo une fonction analytique, et pour $t > 0$ assez petit :

$$u(x) \equiv \int_{\theta=\theta(t,x,\alpha),\,\alpha\in\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta_1(\alpha)a(x,\theta)\,d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

avec $\theta(t,x,\alpha) = \alpha + it\varphi'_\theta(x,\theta)|\alpha|$, qui est de la forme (4) avec la φ-déformation de l'exemple 1.

On précise maintenant le théorème 1 en étudiant la singularité de u_i en un point $(x_0,\varphi'_x(x_0,\alpha_0))$ tel que $\varphi'_\alpha(x_0,\alpha_0) = 0$.

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *on pose*

$$C_\varphi = \{(x,\alpha) \in U \times V \mid \varphi'_\alpha(x,\alpha)=0\},$$
$$i_\varphi(x,\alpha) = (x,\varphi'_x(x,\alpha)), \quad \Lambda_\varphi = i_\varphi(C_\varphi).$$

On suppose que φ *est non dégénérée, et que* i_φ *est un difféomorphisme de* C_φ *sur* Λ_φ.

Soit $(x_0,\xi_0) = i_\varphi(x_0,\alpha_0)$ *avec* $(x_0,\alpha_0) \in C_\varphi$. *Alors, pourvu que la fonction de troncature* $\zeta(\alpha)$ *soit égale à* 1 *dans un voisinage conique de* α_0 *pour* $|\alpha|$ *grand, le germe de microdistribution défini (dans le cadre analytique) par* $u_t(0<t<T)$ *en* (x_0,ξ_0) *ne dépend que du germe en* (x_0,ξ_0) *de microdistribution de Fourier défini (dans le cadre* C^∞*) par la phase* $\varphi(x,\theta)$ *et le symbole* $\sum_j a_j(x,\theta)$ *(voir* [6]*). En particulier, il ne dépend ni de la réalisation* $a(x,\theta)$ *choisie pour* $\sum_j a_j(x,\theta)$, *ni de la* φ*-déformation utilisée, ni de la troncature* ζ, *ni de* $t > 0$. *On le note* $\mu_{\varphi,\Sigma a_j}(x_0,\xi_0)$.

Démonstration. — On reprend le début de la démonstration du théorème 1, en particulier (5), (8). Pour $(x,\xi) = (x_0,\xi_0)$, la phase Φ de (8) admet le point stationnaire non dégénéré $(Y,\theta) = (x_0,\alpha_0)$. En effet, on sait que $\operatorname{Im}\psi''_{yy}(x_0,x_0,\xi_0)$ est définie négative, et il suffit d'appliquer le lemme élémentaire suivant pour

$$A = \varphi''_{xx}(x_0,\alpha_0), \qquad B = \varphi''_{x\theta}(x_0,\alpha_0),$$
$$D = \varphi''_{\theta\theta}(x_0,\alpha_0), \qquad M = -\psi''_{yy}(x_0,x_0,\xi_0):$$

LEMME. — *Soit* $T = \left(\begin{array}{c|c} A+M & B \\ \hline tB & D \end{array}\right)$ *où* A,D *sont des matrices carrées symétriques réelles,* B *une matrice réelle,* M *une matrice symétrique complexe avec* $\operatorname{Im} M$ *définie positive,* $\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$ *de rang maximal.*

Alors T *est régulière.*

On a déjà vu qu'on peut restreindre l'intégration dans (8) à $\{|y-x_0| \leqslant \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Montrons qu'on peut aussi la restreindre à $\{|\alpha-\alpha_0| < \varepsilon'\}$, avec $\varepsilon' > 0$ arbitraire. Pour cela, on constate que le second membre de (9) s'annule maintenant au point (unique) $\alpha = \alpha_0$, et on en déduit qu'il est minoré par $c''|\alpha|$ (avec $c'' > 0$) lorsque $\alpha \in \operatorname{Supp}$ conique ζ, $|\alpha| \geqslant r$, $|\alpha-\alpha_0| \geqslant \varepsilon'$, et on conclut comme à la fin de la démonstration du théorème 1.

En prenant ε, ε' assez petits, on peut appliquer le théorème de la phase stationnaire complexe (voir [10]) à l'intégrale

$$\tau^N \int_{\Gamma_{x,\xi;\,|y-x_0|\leqslant\varepsilon,\,|\alpha-\alpha_0|\leqslant\varepsilon'}} e^{i\tau\Phi(Y,\theta,x,\xi)} a(Y,\tau\theta)\, dY_1 \wedge \ldots \wedge dY_n \wedge d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N.$$

En appelant $(Y(x,\xi),\ \theta(x,\xi))$ la solution locale (Y,θ) de

$$\begin{cases}\varphi'_\theta(Y,\theta) = 0\\ \varphi'_y(Y,\theta) - \psi'_y(x,Y,\xi) = 0\end{cases}$$

on obtient, pour (x,ξ) assez voisin de (x_0,ξ_0) :

$$\langle u_t(y), e^{-i\tau\psi(x,y,\xi)}\chi(y)\rangle = e^{-i\tau\psi(x,Y(x,\xi),\xi)}b(x,\xi,\tau)$$

où $b(x,\xi,\tau)$ est une réalisation d'un symbole analytique

$$\sum_{j\geqslant 0} b_j(x,\xi)\tau^{\frac{N-n}{2}+d-j}$$

ne dépendant que de φ, ψ, Σa_j et d'un difféomorphisme de Morse

$$(Y,\theta) \mapsto z = z(Y,\theta;x,\xi)$$

transformant $\Phi(Y,\theta,x,\xi)$ en $-\psi(x,y(x,\xi),\xi) + \frac{i}{2}z^2$, et vérifiant la condition suivante d'orientation :

- $\mathbf{R}^{n+N} \ni (y,\alpha) \mapsto \operatorname{Re} z \in \mathbf{R}^{n+N}$ est à déterminant jacobien positif (on a posé $z = z(Y_s(y,\alpha,x,\xi), \theta(t,Y_s(y,\alpha,x,\xi),\alpha);x,\xi))$.

L'hypothèse $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,y,\alpha)$ injective montre que si le paramètre s de déformation en y est pris assez petit, cette condition est réalisée si on choisit le difféomorphisme de Morse tel que :

- $\mathbf{R}^{n+N} \ni (y,\alpha) \mapsto \operatorname{Re} z(y,\alpha;x_0,\xi_0) \in \mathbf{R}^{n+N}$ est à déterminant jacobien positif.

Cette condition ne fait intervenir ni la φ-déformation, ni la valeur de t, de sorte que le germe en (x_0,ξ_0) de microdistribution défini (dans le cadre analytique) pour u_t ne dépend que de φ et $\sum_j a_j(x,\theta)$.

Pour montrer qu'il ne dépend que du genre de microdistribution défini (dans le cadre C^∞) par la distribution

$$u_0(x) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta,$$

on commence par se ramener, par changement de variable analytique en x, au cas où Λ_φ est transverse à $\{\xi=\xi_0\}$, c'est-à-dire au cas où

$$(12) \qquad \begin{pmatrix} \varphi''_{xx} & \varphi''_{x\theta} \\ \varphi''_{\theta x} & \varphi''_{\theta\theta} \end{pmatrix} \text{ est régulière en } (x_0,\alpha_0).$$

Pour $\varphi \in \mathbf{C}$, on pose

$$\psi_\rho(x,y,\xi) = y.\xi - i\rho(x-y)^2.$$

Pour $\rho > 0$, on peut considérer (5) avec $\psi = \psi_\rho$:

$$\mathrm{I}_\rho(x,\xi,\tau) = \langle u_t(y), e^{-i\tau\psi\rho(x,y,\xi)}\chi(y)\rangle,$$

et on aboutit à (8) avec la phase

$$\Phi = \Phi_\rho(\mathrm{Y},\theta,x,\xi) = \varphi(y,\theta) - y.\xi + i\rho(x-y)^2.$$

Pour $(x,\xi,\rho) = (x_0,\xi_0,0)$, cette phase admet le point stationnaire $(\mathrm{Y},\theta) = (x_0,\alpha_0)$, et ce point stationnaire est non dégénéré d'après (12). Il est donc maintenant possible de considérer ρ comme paramètre supplémentaire (au voisinage de 0), et d'utiliser un difféomorphisme de Morse

$$(\mathrm{Y},\theta) \mapsto z = z(\mathrm{Y},\theta;x,\xi,\rho)$$

holomorphe au voisinage de $(x,\alpha_0;x_0,\xi_0,0)$ et vérifiant la condition d'orientation :

- $\mathbf{R}^{n+\mathrm{N}} \ni (y,\alpha) \mapsto \mathrm{Re}\, z(y,\alpha;x_0,\xi_0,0)$ à déterminant jacobien positif.

En appelant $(\mathrm{Y}(x,\xi,\rho),\ \theta(x,\xi,\rho))$ la solution locale (holomorphe) de

$$\begin{cases} \varphi'_\theta(\mathrm{Y},\theta) = 0 \\ \varphi'_y(\mathrm{Y},\theta) - \xi + 2i\rho(y-x) = 0 \end{cases}$$

la formule de la phase stationnaire complexe donne encore pour $\rho > 0$ assez petit :

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{I}_\rho(x,\xi,\tau) = e^{-i\tau\psi\rho(x,\mathrm{Y}(x,\xi,\rho),\xi)} b_\rho(x,\xi) \\ &b_\rho(x,\xi) \sim \sum_{j\geqslant 0} b_j(x,\xi,\rho)\tau^{\frac{\mathrm{N}-n}{2}+d-j} \quad \text{au sens analytique} \end{aligned}$$

avec des coefficients $b_j(x,\xi,\rho)$ qui dépendent analytiquement de ρ dans

un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$, comme le montre la formule

$$b_j(x,\xi,\rho) = (2\pi)^{\frac{n+N}{2}} \sum_{k+\ell=j} \frac{1}{\ell\,!}\left(\frac{\Delta z}{2}\right)^{\ell}\left[a_k(Y,\theta)\frac{D(Y,\theta)}{Dz}\right]_{z=0},$$

où (Y,θ) s'obtient en fonction de $(z;x,\xi,\rho)$ en inversant le difféomorphisme de Morse.

On peut reprendre les considérations précédentes avec $\rho = i\mu$, $\mu \in \mathbf{R}$ assez voisin de 0, alors $\psi_\rho(x,y,\xi) = y.\xi + \mu(x-y)^2$ est réelle pour x, y, ξ réels, ainsi que $Y(x,\xi,\rho)$. Le théorème de la phase stationnaire donne, pour tout $t \geqslant 0$:

$$<u_t(y),\ \chi(y)e^{-i\tau\psi\rho(x,y,\xi)}> = e^{-i\tau\psi(x,Y(x,\xi,\rho),\xi)}b_\rho(x,\xi)$$

$$b_\rho(x,\xi) \sim \sum_{j\geqslant 0} b_j(x,\xi,\rho)\tau^{\frac{N-n}{2}+d-j} \quad \text{au sens de } C^\infty.$$

Si le germe de microdistribution (au sens C^∞) de u_0 (ou de u_t) en (x_0,ξ_0) est nul, les coefficients $b_j(x,\xi,\rho)$ sont nuls pour (x,ξ) voisin de (x_0,ξ_0), $j \geqslant 0$, $\rho = i\mu$ lorsque μ est réel assez petit. Par prolongement analytique, on obtient alors $b_j(x,\xi,\rho) = 0$ pour $\rho > 0$ assez petit d'où, d'après (13), la décroissance exponentielle en τ de $I_\rho(x,\xi,\tau)$ pour (x,ξ) assez voisin de (x_0,ξ_0). (Noter que $Y(x_0,\xi_0,\rho) = x_0$; donc, pour $\rho > 0$ fixé, $|\mathrm{Im}\,\psi(x,Y(x,\xi,\rho),\xi)|$ est arbitrairement petit si (x,ξ) est assez voisin de (x_0,ξ_0)).

On donne maintenant un théorème de changement de phase analogue à celui du cas C^∞.

THÉORÈME 3. — *On se place dans les conditions du théorème* 2, *et on considère une deuxième phase* $\tilde\varphi(x,\tilde\theta)$ *vérifiant les hypothèses analogues à* φ, *avec* $\tilde\varphi'_{\tilde\theta}(x_0,\tilde\alpha_0) = 0$, $\tilde\varphi'_x(x,\tilde\alpha_0) = \xi_0$, $\Lambda_{\tilde\varphi} = \Lambda_\varphi$. *Alors il existe un germe en* $(x_0,\tilde\alpha_0)$ *de symbole analytique* $\sum_{j\geqslant 0}\tilde a_j(x,\tilde\theta)$ *de degré* $\tilde d = d + \dfrac{N-\tilde N}{2}$ *(où* $\tilde N$ *est la dimension de la variable de fréquence* $\tilde\theta$) *tel que* $\mu_{\tilde\varphi,\Sigma\tilde a_j} = \mu_{\varphi,\Sigma a_j}$ *en* (x_0,ξ_0).

Démonstration.

Premier cas : on suppose $N = \tilde N$, $\mathrm{sgn}\,\varphi''_{\theta\theta}(x_0,\alpha_0) = \mathrm{sgn}\,\tilde\varphi''_{\tilde\theta\tilde\theta}(x_0,\tilde\alpha_0)$.

Dans ce cas, le théorème d'équivalence de phases de Hörmander [6] s'adapte mot à mot au cas analytique réel, et montre qu'il existe un difféomorphisme local analytique homogène de degré 1 $(x,\tilde\theta) \mapsto (x,\theta(x,\tilde\theta))$ tel que $\varphi(x,\theta(x,\tilde\theta)) = \tilde\varphi(x,\tilde\theta)$.

Le théorème 2 montre alors qu'on obtient le résultat cherché en prenant

$$\tilde{a}_j(x,\tilde{\theta}) = a_j(x,\theta(x,\tilde{\theta}))\,\frac{D\theta(x,\tilde{\theta})}{D\tilde{\theta}}\cdot$$

Deuxième cas : augmentation du nombre de variables de fréquence. On pose $\tilde{\theta} = (\theta,w)$ avec $w \in \mathbf{R}^M$, $\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_0,0)$, $\tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta}) = \varphi(x,\theta) + \dfrac{Q(w)}{2|\theta|}$, où Q est une forme quadratique réelle non dégénérée. Soit $\zeta_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^M)$ avec $\zeta_1 = 1$ au voisinage de 0. Si on considère la distribution $U(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\theta)a(x,\theta)\,d\theta$, le théorème de la phase stationnaire par rapport à la variable w donne, modulo C^∞ :

$$U(x) \equiv \int_{\mathbf{R}^{N+M}} e^{i\tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta})}\zeta(\theta)\zeta_1\left(\frac{w}{|\theta|}\right)\tilde{a}(x,\theta,w)\,d\theta\,dw$$

avec

$$\tilde{a} \sim \sum_j \tilde{a}_j, \quad \tilde{a}_j(x,\theta,w) = c^{-1}a_j(x,\theta)|\theta|^{-M/2},$$
$$c = (2\pi)^{M/2}|\det Q|^{-\frac{1}{2}}\,e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} Q}.$$

La conclusion résulte alors du théorème 2.

Troisième cas : diminution du nombre de variables de fréquence. On pose $\theta = (\tilde{\theta},w)$ avec $w \in \mathbf{R}^M$, $\alpha_0 = (\tilde{\alpha}_0,0)$, $\varphi(x,\theta) = \tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta}) + \dfrac{Q(w)}{2|\tilde{\theta}|}$, et

$$U(x) = \int_{\mathbf{R}^{\tilde{N}+M}} e^{i\varphi(x,\theta)}\zeta(\tilde{\theta})\zeta_1\left(\frac{w}{|\tilde{\theta}|}\right)a(x,\theta)\,d\theta,$$

où Q, ζ_1 sont choisis comme précédemment.

Le théorème de la phase stationnaire donne encore, modulo C^∞ :

$$U(x) \equiv \int_{\mathbf{R}^{\tilde{N}}} e^{i\tilde{\varphi}(x,\tilde{\theta})}\zeta(\tilde{\theta})a(x,\tilde{\theta})\,d\tilde{\theta},$$

avec $\tilde{a} \sim \sum_\ell \tilde{a}_\ell$,

$$\tilde{a}_\ell(x,\tilde{\theta}) = c|\theta|^{M/2}\sum_{j+k=\ell}\frac{|\theta|^k}{k!}\left[\left\langle \frac{i}{2}Q^{-1}\,\partial_w,\partial_w\right\rangle^k \tilde{a}_j(x,\tilde{\theta},w)\right]\Bigg|_{w=0}.$$

On vérifie que $\Sigma\tilde{a}_\ell$ est un symbole analytique ce qui permet de conclure comme aux cas précédents.

2. Microdistributions de Fourier.

Grâce aux théorèmes 1, 2, 3, on peut énoncer la

DÉFINITION 2. — *Soient* X *une variété analytique réelle de dimension* n, T^*X *son fibré cotangent,* S^*X *son fibré en sphères cotangentes,* π *la projection canonique de* $T^*X\backslash 0$ *sur* S^*X. *Soient* Λ *une sous-variété lagrangienne analytique conique de* $T^*X\backslash 0$, $S\Lambda$ *sa projection sur* S^*X, *et* $m \in \mathbf{R}$. *On désigne par* $\mathscr{I}^m_\Lambda$ *le sous-faisceau sur* S^*X *des microdistributions (dans le cadre analytique) ainsi défini :* $\mathscr{I}^m_\Lambda$ *est porté par* $S\Lambda$ *et, pour tout* $(x_0,\xi_0) \in \Lambda$, *la fibre de* $\mathscr{I}^m_\Lambda$ *en* $\pi(x_0,\xi_0)$ *est constituée par les germes* $\mu_{\varphi,\Sigma a_j}(x_0,\xi_0)$ *décrits au théorème* 2, *tels que* $\Lambda_\varphi \subset \Lambda$, Σa_j *de degré* $d = m + \frac{n}{4} - \frac{N}{2}$.

Le faisceau $\mathscr{I}^m_\Lambda$ (qui peut être aussi considéré comme faisceau sur $S\Lambda$) est le faisceau des microdistributions de Fourier de degré m associées à la variété lagrangienne Λ. Si on appelle $\mathscr{M}\mathscr{D}_\infty$ le faisceau sur S^*X des microdistributions dans le cadre C^∞, le théorème 2 peut s'exprimer par

(14) Le morphisme naturel $\mathscr{I}^m_\Lambda \to \mathscr{M}\mathscr{D}_\infty$ est injectif.

On étudie maintenant la composition des micronoyaux de Fourier. Soient X, Y, Z des variétés analytiques réelles de dimensions n_1, n_2, n_3, et $\Lambda_1 \subset T^*X \times (T^*Y|0)$, $\Lambda_2 \subset (T^*Y|0) \times T^*Z$ des sous-variétés lagrangiennes coniques analytiques, vérifiant les hypothèses standard de composition transverse, en posant par exemple

$$\Lambda'_1 = \{(x,\xi),(y,\eta) \mid (x,\xi,y,-\eta) \in \Lambda_1\} :$$

(15) L'intersection $(\Lambda'_1 \times \Lambda'_2) \cap (T^*X \times \mathrm{Diag}\,(T^*Y \times T^*Y) \times T^*Z)$ est transverse.

(16) La composée $\Lambda'_1 \circ \Lambda'_2$ est contenue dans $T^*(X \times Z)\backslash 0$, et la projection de (15) dans $T^*(X \times Z)\backslash 0$ est propre à fibre finie.

On fait de plus l'hypothèse technique suivante, qui permettra d'utiliser des troncatures en y :

(17) Si $(x,\xi,y,\eta) \in \Lambda'_1$ (resp. $(y,\eta,z,\zeta) \in \Lambda'_2$) alors y s'exprime continûment au moyen de (x,ξ) (resp. : (z,ζ)).

Considérons des ouverts U, V, W de $T^*X|0$, $T^*Y|0$, $T^*Z|0$, et des ouverts Ω_1, Ω_2, Ω_3 de X, Y, Z tels que :

$$\mathrm{Proj}_X U \subset \Omega_1, \qquad \mathrm{Proj}_Y V \subset \Omega_2, \qquad \mathrm{Proj}_Z W \subset \Omega_3.$$

Soit Ω'_2 un ouvert relativement compact de Ω_2, avec :

(18) $\quad y \in \Omega'_2 \quad$ lorsque $\quad (x,\xi,y,\eta) \in \Lambda'_1 \quad$ et $\quad (x,\xi) \in U$.

(19) $\quad y \in \Omega'_2 \quad$ lorsque $\quad (y,\eta,z,\zeta) \in \Lambda'_2 \quad$ et $\quad (z,\zeta) \in W$.

(20) $\quad (y,\eta) \in V \quad$ lorsque $\quad \begin{cases} (x,\xi,z,\zeta) \in (\Lambda'_1 \circ \Lambda'_2) \cap (U \times W) \\ (x,\xi,y,\eta) \in \Lambda'_1 \\ (y,\eta,z,\zeta) \in \Lambda'_2 \end{cases}.$

Soient des microdistributions

$$\mu_1 \in \mathscr{I}^{m_1}_{\Lambda_1}(\pi(U \times V)), \qquad \mu_2 \in \mathscr{I}^{m_2}_{\Lambda_2}(\pi(V \times W)),$$

qu'on suppose représentables par des distributions de Fourier

$$u_1 \in \mathscr{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2), \qquad u_2 \in \mathscr{D}'(\Omega_2 \times \Omega_3)$$

dans les conditions du théorème 2.

Considérons les opérateurs

$$A_1 : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathscr{D}'(\Omega_1), \qquad A_2 : C_0^\infty(\Omega_3) \to \mathscr{D}'(\Omega_2)$$

de noyaux u_1, u_2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega_2)$ telle que $\chi(y) = 1$ pour $y \in \Omega_2$.

D'après le théorème 1 et les hypothèses faites sur Λ'_1, Λ'_2, on sait (voir [4], [5]) que $A_1 \circ \chi \circ A_2$ a un sens comme opérateur $A : C_0^\infty(\Omega_3) \to \mathscr{D}'(\Omega_1)$, et on a la

PROPOSITION 2. — *Soit* $u \in \mathscr{D}'(\Omega_1 \times \Omega_3)$ *le noyau de l'opérateur* $A = A_1 \circ \chi \circ A_2$. *Alors la microdistribution* μ *définie par* u *dans* $\pi(U \times W)$ *ne dépend ni du choix des représentants* u_1, u_2 *de* μ_1, μ_2 *ni du choix de la fonction de troncature* χ.

On a $[\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu]' \subset [\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu_1]' \circ [\pi^{-1}\,\mathrm{Supp}\,\mu_2]'$.

On pose $\mu = \mu_1 \circ \mu_2$.

Démonstration. — Soient des opérateurs

$$P : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathscr{D}'(\Omega_1), \qquad Q : C_0^\infty(\Omega_3) \to \mathscr{D}'(\Omega_2);$$

rappelons (voir [7]) que sous les hypothèses standard d'existence du composé $P \circ Q$, on a

$$SS'(P \circ Q) \subset [(SS'P) \circ (SS'Q)] \cup [SS'P \circ (Y \times \{0\} \times Z \times \{0\})] \\ \cup [(X \times \{0\} \times Y \times \{0\}) \circ SS'Q]$$

où le spectre singulier d'un opérateur est, par définition, le spectre singulier de son noyau.

On en déduit, en utilisant le théorème 1 et les hypothèses précédentes, que $SS'(A_1 \circ \chi \circ A_2)$ est contenu dans la réunion des trois ensembles

$$SS'A_1 \circ SS'[\chi] \circ SS'A_2 \tag{21}$$

$$SS'A_1 \circ SS'[\chi] \circ (Y \times \{0\} \times Z \times \{0\}) \tag{22}$$

$$(X \times \{0\} \times Y\{0\}) \circ SS'[\chi] \circ SS'A_2 \tag{23}$$

où $[\chi] : C_0^\infty(Y) \to C_0^\infty(Y)$ est l'opérateur de multiplication par χ.

D'après (18), (19), (20) et puisque $\chi = 1$ dans Ω'_2, on voit que (21) a même intersection avec $U \times W$ que $SS'A_1 \circ SS'A_2$. Puisque le noyau de $[\chi]$ a son support dans la diagonale de $\Omega_2 \times \Omega_2$, on voit de même que l'intersection de (22) avec $\{(x,\xi) \in U\}$ est vide, et symétriquement que l'intersection de (23) avec $\{(z,\zeta) \in W\}$ est vide, ce qui implique la proposition 2.

Définissons la composition des micronoyaux; on définit la variété lagrangienne Λ par $\Lambda' = \Lambda'_1 \circ \Lambda'_2$. Pour $j = 1,2$, soient des microdistributions $\mu_j \in J_\Lambda^{m_j}(\mathcal{O}_j)$, où $\mathcal{O}_j$ est un ouvert de $S\Lambda_j$. Définissons l'ouvert $\mathcal{O}$ de $S\Lambda$ par $\pi^{-1}\mathcal{O}' = \pi^{-1}\mathcal{O}'_1 \circ \pi^{-1}\mathcal{O}'_2$. Pour $\pi(x_0,\xi_0,z_0,\zeta_0) \in \mathcal{O}'$, considérons un des points $(y_0,\eta_0) \in T^*Y\backslash 0$ tels que

$$\pi(x_0,\xi_0,y_0,\eta_0) \in \mathcal{O}'_1, \qquad \pi(y_0,\eta_0,z_0,\zeta_0) \in \mathcal{O}'_2.$$

L'hypothèse (17) permet de construire des voisinages ouverts U, V, W de (x_0,ξ_0), (y_0,η_0), (z_0,ζ_0), des voisinages ouverts Ω_1, Ω_2, Ω_3, de x_0, y_0, z_0, un voisinage ouvert $\Omega'_2 \subset\subset \Omega_2$ de x_0 tels que les conditions (18), (19), (20) soient satisfaites, et tels que les restrictions $\mu_1|_{U\times V}$, $\mu_2|_{V\times W}$

de μ_1, μ_2 à $\pi(U \times V)$, $\pi(V \times W)$ soient représentables par des distributions de Fourier dans $\Omega_1 \times \Omega_2$, $\Omega_2 \times \Omega_3$:

$$u_1(x,y) = \int_{\theta=\theta(x,y,\alpha),\, \alpha \in \mathbf{R}^N} e^{i\varphi(x,y,\theta)} \zeta_1(\alpha) a(x,y,\theta)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N$$

$$u_2(y,z) = \int_{w=w(y,z,\beta),\, \beta \in \mathbf{R}^M} e^{ii\psi(y,z,w)} \zeta_2(\beta) b(y,z,w)\, dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_M$$

où on a repris les notations des théorèmes 1, 2, et sous-entendu le paramètre t $(t>0)$ de déformation. En considérant dans $\pi(U \times W)$ la microdistribution $(\mu_1|_{U \times V}) \circ (\mu_2|_{V \times W})$ définie à la proposition 2, et en ajoutant les contributions ainsi obtenues pour tous les points (y_0, η_0) tels que $\pi(x_0, \xi_0, y_0, \eta_0) \in \mathcal{O}'_1$, $\pi(y_0, \eta_0, z_0, \zeta_0) \in \mathcal{O}'_2$ (ces points sont en nombre fini d'après (16)), on obtient par recollement une microdistribution μ dans $\mathcal{O}'$, qu'on note $\mu = \mu_1 \circ \mu_2$.

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses* (15), (16), (17) *et avec les notations précédentes, soient des microdistributions* $\mu_1 \in \mathcal{I}^{m_1}_{\Lambda_1}(\mathcal{O}_1)$, $\mu_2 \in \mathcal{I}^{m_2}_{\Lambda_2}(\mathcal{O}_2)$. *Alors la microdistribution composée* $\mu = \mu_1 \circ \mu_2$ *est dans* $\mathcal{I}^{m_1+m_2}_{\Lambda}(\mathcal{O})$, *et*

$$[\mu^{-1} \operatorname{Supp} \mu]' \subset [\pi^{-1} \operatorname{Supp} \mu_1]' \circ [\pi^{-1} \operatorname{Supp} \mu_2]'.$$

Démonstration. — Par construction, μ est représentée au voisinage de $\pi(x_0, \xi_0, y_0, \eta_0) \in \mathcal{O}'$ par une somme finie de distributions de la forme

$$(24) \quad u(x,z) = \int_{\substack{\theta=\theta(x,y,\alpha) \\ w=w(y,z,\beta)}} e^{i[\varphi(x,y,\theta)+\psi(y,z,w)]} \chi(y) \zeta_1(\alpha) \zeta_2(\beta) a(x,y,\theta) \, b(y,z,w)\, d\theta \wedge dw \wedge dy$$

où φ est une phase pour Λ_1 au voisinage de (x_0, y_0, α_0) et ψ une phase pour Λ_2 au voisinage de (y_0, z_0, β_0).

On peut toujours se ramener au cas où

$$(25) \qquad \begin{array}{ll} \varphi''_{\theta y}(x_0, y_0, \alpha_0) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{n_2} & \text{injective} \\ \psi''_{wy}(y_0, z_0, \beta_0) : \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}^{n_2} & \text{injective.} \end{array}$$

En effet, on sait (voir [5]) que pour des choix convenables de coordonnées locales dans X, Y, Z, on peut représenter localement Λ_1,

Λ_2 par des phases φ, ψ de la forme

$$x \cdot \xi + y \cdot \eta - H_1(\xi,\eta), \qquad y \cdot \eta + z \cdot \zeta - H_2(\eta,\zeta).$$

(Notons que les conditions (25) sont vérifiées par les phases standard $(x-y) \cdot \theta$, $(y-z) \cdot w$ d'opérateurs pseudo-différentiels).

Au voisinage de y_0, on obtient alors

$$|\varphi'_\theta(x_0, y, \alpha_0)| \geqslant c'|y-y_0|, \qquad \text{avec} \qquad c' > 0$$

d'où, dans (24) :

$$\operatorname{Im} \varphi(x,y,\theta) \geqslant c''|\alpha|, \qquad \text{avec} \qquad c'' > 0,$$

lorsque $|y-y_0| \geqslant \varepsilon > 0$ et lorsque (x,α) est dans un voisinage conique assez petit de (x_0, α_0).

On a une minoration analogue pour $\operatorname{Im} \psi(y,z,w)$, donc le germe de μ en (x_0,ξ_0,z_0,ζ_0) ne fait intervenir, via l'intégrale (24), que les valeurs de y arbitrairement voisines de y_0.

Considérons $\varphi(x,y,\theta) + \psi(y,z,w)$ comme une phase (non homogène) avec variable de fréquence (θ,w,y). Le long du contour d'intégration de (24), on a

$$\operatorname{Im}(\varphi+\psi) \geqslant c'|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2 |\alpha| + c|\varphi'_w(y,z,\beta)|^2 |\beta|.$$

Pour faire apparaître le terme manquant $c|\varphi'_y+\psi'_y|^2$ et obtenir ainsi une $(\varphi+\psi)$-déformation, on va effectuer dans (24) la déformation de contour

$$\mathbf{R}^{n_2} \ni y \mapsto Y_s = y + isF'_y(x,z;\alpha,\beta,y) \frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|}$$

où

$$F(x,z;\alpha,\beta,y) = \varphi(x,y,\theta(x,y,\alpha)) + \psi(y,z,w(y,z,\beta)),$$
$$f \in C_0^\infty(\Omega'_2), \qquad 0 \leqslant f \leqslant 1,$$

$f = 1$ au voisinage de y_0, $s \geqslant 0$ assez petit, de sorte que la déformation se fait dans la région où la fonction de troncature χ est holomorphe. On obtient

$$\operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,Y_s) \geqslant \operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,y) + s\frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|} \operatorname{Re}[(F'_y)^2] - Cs^2 \frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|} |F'_y|^2.$$

On peut toujours prendre (voir l'exemple 1) :

$$\begin{cases} \theta = \theta(x,y,\alpha) = \alpha + it\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|\alpha| \\ w = w(y,z,\beta) = \beta + it\psi'_w(y,z,\beta)|\beta| . \end{cases}$$

En reportant ces valeurs dans

$$F'_y = \varphi'_y(x,y,\theta) + \varphi'_\theta(x,y,\theta)\theta'_y + \psi'_y(y,z,w) + \psi'_w(y,z,w)w'_y ,$$

on obtient

$$F'_y = A + iB, \quad \text{avec} \quad A, B, \in \mathbf{R}^{n_2}, \quad A = R + S,$$

avec

$$\begin{cases} R = \varphi'_y(x,y,\alpha) + \psi'_y(y,z,w) \\ B \text{ et } S \text{ de la forme } O(|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|\,|\alpha| + |\psi'_w(y,z,\beta)|\,|\beta|) . \end{cases}$$

Or $\operatorname{Re}[(F'_y)^2] = A^2 - B^2$, $|F'_y|^2 = A^2 + B^2$,

$$A^2 \geqslant R^2 + S^2 - 2|R|\,|S| \geqslant \frac{1}{2}R^2 - S^2 ,$$

donc :

$$s \operatorname{Re}[(F'_y)^2] - Cs^2|F'_y|^2 \geqslant \frac{s}{2}A^2 - C's B^2 \geqslant \frac{s}{4}R^2 - s\left(\frac{1}{2}S^2 + C'B^2\right)$$

pour $s \geqslant 0$ assez petit, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,Y_s) \geqslant \frac{t}{2}(|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2|\alpha| + |\psi'_w(y,z,\beta)|^2|\beta|) \\ + \frac{s}{4}|\varphi'_y(x,y,\alpha) + \psi'_y(y,z,\beta)|^2 \frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|} \\ - sC'' \frac{|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2|\alpha|^2 + |\psi'_w(y,z,\beta)|^2|\beta|^2}{|\alpha| + |\beta|} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (26) \quad \operatorname{Im} F(x,z;\alpha,\beta,Y_s) \geqslant \frac{t}{4}(|\psi'_\theta(x,y,\alpha)|^2|\alpha + |\psi'_w(y,z,\beta)|^2|\beta|) \\ + \frac{s}{4}|\varphi'_y(x,y,\alpha) + \psi'_y(y,z,\beta)|^2 \frac{f(y)}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{t}{4C''} . \end{aligned}$$

Cette déformation en y permet de remplacer (24) par

$$(27)\quad u(x,z) = \int_{\substack{Y=Y_s(x,z;\alpha,\beta,y)\\ \theta=\theta_t(x,Y,\alpha)\\ w=w_t(Y,z,\beta)}} e^{i[\varphi(x,Y,\theta)+\psi(Y,z,w)]}\chi(Y)\,\zeta_1(\alpha)\zeta_2(\beta)a(x,Y,\theta)\, b(Y,z,w)\, d\theta \wedge dw \wedge dY$$

où $t > 0$ est assez petit, et $s = \dfrac{t}{4C''}\cdot$

Vérifions maintenant que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la contribution de $\{|\beta| \leqslant \varepsilon|\alpha|\}$ dans cette intégrale est une fonction analytique de (x,z) : il suffit, comme on l'a vu, de prendre $|y-y_0|$ assez petit; on a alors $f(y) = 1$, et (26) donne, sur le contour d'intégration

$$\operatorname{Im}(\varphi+\psi) \geqslant c'\left[|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2\,|\alpha| + |\varphi'_y(x,y,\alpha)|^2\,\frac{1}{|\alpha|(1+\varepsilon)}\right] - \varepsilon\quad C|\alpha|^2$$

avec $c' > 0$. Mais $\Lambda_1 \subset T^*X \times (T^*Y\backslash 0)$, donc

$$|\varphi'_\theta(x,y,\alpha)|^2\,|\alpha| + |\varphi'_y(x,y,\alpha)|^2\,\frac{1}{|\alpha|} \geqslant c''|\alpha|, \quad \text{avec} \quad c'' > 0,$$

d'où $\operatorname{Im}(\varphi+\psi) \geqslant \dfrac{c''}{2}|\alpha|$ lorsque ε est assez petit.

On voit de même qu'on peut se débarasser de la contribution de $\{|\alpha| \leqslant \varepsilon|\beta|\}$ dans (27), et donc multiplier l'amplitude dans (27) par $\zeta_0(\alpha,\beta)$, où $\zeta_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^{N+M}\backslash 0)$ est homogène de degré 0 en (α,β), à support dans $\{\varepsilon'|\alpha| \leqslant |\beta|,\ \varepsilon'|\beta| \leqslant |\alpha|\}$ avec $\varepsilon' > 0$ assez petit.

Enfin, puisque $\chi(Y) = 1$ pour y àssez voisin de y_0, on peut remplacer $\chi(Y)$ par $\chi(y)$, $f(y)$ par 1, et $u(x,z)$ par

$$(28)\quad \tilde{u}(x,z) = \int_{(\theta,w,Y)=\gamma_t(x,z;\alpha,\beta,y)} e^{i[\varphi(x,Y,\theta)+\psi(Y,z,w)]}\,\zeta_1(\alpha)\zeta_2(\beta)\zeta_0(\alpha,\beta)\chi(y)\, a(x,Y,\theta)b(Y,z,w)\, d\theta \wedge dw \wedge dY$$

où le contour γ_t, paramétré par $(\alpha,\beta,y) \in \mathbf{R}^{N+M+n_2}$, est défini par

$$\begin{cases} Y = y + isF'_y(x,z;\alpha,\beta,y)\dfrac{1}{|\alpha| + |\beta|} \\ \theta = \alpha + it\varphi'_\theta(x,Y,\alpha)|\alpha| \\ w = \beta + it\psi'_w(Y,z,\beta)|\beta|, \end{cases}$$

avec $t > 0$ assez petit, $s = \dfrac{t}{4C''}\cdot$

En faisant le changement de paramètre

$$(\alpha,\beta,y) \mapsto (\alpha,\beta,\tilde{y}), \qquad \tilde{y} = (|\alpha|+|\beta|)y$$

et le changement de variable

$$(\theta,w,Y) \mapsto (\theta,w,\tilde{Y}), \qquad \tilde{Y} = ([\theta]+[w])Y,$$

où on a noté par exemple $[\theta]$ la détermination principale de $(\theta^2)^{1/2}$ dans $\{\theta \in \mathbf{C}^N \mid |\mathrm{Im}\,\theta| < |\mathrm{Re}\,\theta|\}$, on obtient un nouveau contour

$$(\theta, w, \tilde{Y}) = \tilde{\gamma}_t(x,z;\alpha,\beta,\tilde{y})$$

homogène de degré 1 en $(\alpha,\beta,\tilde{y})$, et

$$\tilde{u}(x,z) = \int_{\tilde{\gamma}_t} e^{i\Phi(x,z;\theta,w,\tilde{Y})}\zeta(\alpha,\beta,\tilde{y})\sigma(x,z;\theta,w,\tilde{Y})\, d\theta \wedge dw \wedge d\tilde{Y}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi(x,z;\theta,w,\tilde{Y}) &= \varphi(x,Y,\theta) + \psi(Y,z,w)\\
\sigma(x,z;\theta,w,\tilde{Y}) &= a(x,Y,\theta)b(Y,z,w)([\theta]+[w])^{-n_2}\\
\zeta(\alpha,\beta,\tilde{y}) &= \zeta_1(\alpha)\zeta_2(\beta)\zeta_0(\alpha,\beta)\chi(y).
\end{aligned}$$

Il est bien connu que Φ est non dégénérée (d'après (15)) et définit localement la variété lagrangienne Λ (voir [6]).

D'autre part, (26) montre que $(\gamma_t)_{t\geqslant 0}$ est une Φ-déformation d'un voisinage de Supp conique ζ, donc le germe défini par u en (x_0,ξ_0,z_0,ζ_0) est une section de $\mathscr{I}_\Lambda^{m_1+m_2}$, ce qui prouve que $\mu \in \mathscr{I}_\Lambda^{m_1+m_2}(\mathcal{O})$. Enfin, la propriété relative à Supp μ résulte immédiatement de la proposition 2.

3. Exemple des opérateurs pseudo-différentiels analytiques.

On commence par étudier les micro-opérateurs pseudo-différentiels. Soient X une variété analytique réelle, et

$$\Lambda = \{(x,x,\xi,-\xi) \mid (x,\xi) \in \mathrm{T}^*\mathrm{X}\backslash 0\}$$

le conormal à la diagonale de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, privé de sa section nulle. Dans ce

cas la relation canonique Λ' est l'identité de $T^*X\backslash 0$, et l'isomorphisme

$$\Lambda \ni (x,x,\xi,-\xi) \mapsto (x,\xi) \in T^*X\backslash 0$$

permet d'identifier $\mathscr{I}^m_\Lambda$ à un faisceau $\mathscr{L}^m$ sur S^*X, appelé faisceau des micro-opérateurs pseudo-différentiels analytiques de degré m.

Au voisinage d'un point $\pi(x_0,\xi_0) \in S^*X$, un tel micro-opérateur $\mathscr{P}$ est représenté, à l'aide de coordonnées locales de X au voisinage de x_0, par un opérateur P de noyau

$$K(x,y) = \int_{\theta=\theta(t,x,y,\alpha),\alpha\in\mathbf{R}^n} e^{i(x-y)\theta} a(x,y,\theta)\zeta(\alpha)\, d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_n$$

où on s'est placé dans les conditions du théorème 1 $(t>0)$, $a(x,y,\theta)$ désignant une réalisation de symbole analytique de degré m dans un voisinage conique de (x_0,x_0,ξ_0) dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n\backslash 0)$.

Pour (x,ξ) dans un voisinage conique réel assez petit de (x_0,ξ_0), considérons le symbole complet σ_P de l'opérateur P, c'est-à-dire le développement asymptotique ordinaire pour $|\xi| \to +\infty$ (modulo $O(|\xi|^{-\infty})$) de $e^{-ix\xi}P(\chi(x)e^{ix\xi})$ où $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 au voisinage de x_0. D'après le théorème 2 et l'étude des opérateurs pseudo-différentiels dans le cadre C^∞, on sait que

$$\sigma_P(x,\xi) = \sum_{\substack{k\in\mathbf{N}^n \\ j\geqslant 0}} \frac{1}{k!}\, \partial_\xi^k D_y^k a_j)(x,x,\xi), \tag{29}$$

et que σ_P ne dépend pas du représentant P choisi pour $\mathscr{P}$.

On peut donc, pour un choix fixé de coordonnées locales dans X, définir le symbole complet $\sigma_{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$ par (29), et le théorème 2 montre que :

$$\pi(x_0,\xi_0) \notin \operatorname{Supp}\mathscr{P} \Leftrightarrow \sigma_{\mathscr{P}} = 0 \quad \text{au voisinage de } (x_0,\xi_0). \tag{30}$$

Évidemment, $\sigma_{\mathscr{P}}$ se transforme pour les formules standard lorsqu'on change de coordonnées locales dans X.

Notons que (29) montre que $\sigma_{\mathscr{P}}$ se prolonge en symbole analytique de degré m dans un voisinage conique de (x_0,ξ_0) dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n\backslash 0)$.

Soient maintenant $\mathcal{O}$ un ouvert de S^*X, $\mathscr{P} \in \mathscr{L}^{m_1}(\mathcal{O})$, $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}^{m_2}(\mathcal{O})$.

Le théorème 4 permet de définir le composé $\mathscr{P} \circ \mathscr{Q} \in \mathscr{L}^{m_1+m_2}(\mathcal{O})$, avec

$$\operatorname{Supp}(\mathscr{P} \circ \mathscr{Q}) \subset \operatorname{Supp} \mathscr{P} \cap \operatorname{Supp} \mathscr{Q}.$$

De plus, la construction de $\mathscr{P} \circ \mathscr{Q}$ et l'étude de la composition des opérateurs pseudo-différentiels dans le cadre C^∞ montrent que

$$\sigma_{\mathscr{P} \circ \mathscr{Q}} = \sigma_{\mathscr{P}} \circ \sigma_{\mathscr{Q}} \tag{31}$$

où le second membre est le composé habituel des symboles (pour un choix fixé de coordonnées locales dans X).

Posons $\mathscr{L}^\infty = \bigcup_m \mathscr{L}^m$ et désignons par $\mathscr{M}\mathscr{D}$ le faisceau sur S^*X des microdistributions dans le cadre analytique. Alors $\mathscr{M}\mathscr{D}$ est un faisceau de $\mathscr{L}^\infty$-modules à gauche, avec

$$\left|\begin{array}{l}\operatorname{Supp}(\mathscr{P}\mu) \subset \operatorname{Supp} \mathscr{P} \cap \operatorname{Supp} \mu \quad \text{pour} \\ \mathscr{P} \in \mathscr{L}^\infty(\mathcal{O}), \quad \mu \in \mathscr{M}\mathscr{D}(\mathcal{O}).\end{array}\right. \tag{32}$$

Soit $\mathscr{P} \in \mathscr{L}^m(\mathcal{O})$. Supposons $\mathscr{P}$ elliptique (au sens ordinaire) dans un ouvert $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$. Au voisinage de chaque point de $\mathcal{O}'$, pour un choix fixé de coordonnées locales dans X, considérons le symbole complet σ de $\mathscr{P}$; il est elliptique, et on sait (voir [3], [9], [10]) que le symbole inverse σ^{-1} est un symbole analytique de degré $-m$.

En utilisant une réalisation holomorphe de σ^{-1}, on obtient, par recollement grâce à (30), un micro-opérateur $\mathscr{Q} \in \mathscr{L}^{-m}(\mathcal{O}')$ qui vérifie, d'après (30) et (31) :

$$\mathscr{P}|_{\mathcal{O}'} \circ \mathscr{Q} = \mathscr{Q} \circ \mathscr{P}|_{\mathcal{O}'} = I.$$

On en déduit, en utilisant (31) que, pour $\mu \in \mathscr{M}\mathscr{D}(\mathcal{O})$:

$$\operatorname{Supp} \mu \subset (\operatorname{Supp} \mathscr{P}\mu) \cup \operatorname{Car} \mathscr{P},$$

où

$$\operatorname{Car} \mathscr{P} = \{\lambda \in \mathcal{O} \mid \mathscr{P} \text{ non elliptique en } \lambda\}.$$

Terminons par l'étude des opérateurs pseudo-différentiels analytiques. Appelons opérateur pseudo-différentiel analytique de degré m dans X un opérateur $P : C_0^\infty(X) \to \mathscr{D}'(X)$ tel que :

(33) la microdistribution définie par le noyau $K \in \mathscr{D}'(X \times X)$ de P est dans $\mathscr{I}^m_\Lambda(S^*(X \times X))$.

Soit un tel opérateur; son noyau est évidemment analytique en dehors de la diagonale de $X \times X$; si on considère une carte $f : X' \to \Omega \subset \mathbf{R}^n$ de X, le symbole complet $\sigma_P(x,\xi)$ de P se prolonge en symbole analytique de degré m dans un voisinage conique de $\Omega \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$ dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^n \backslash 0)$; pour Ω_0 ouvert relativement compact de Ω, considérons une réalisation $a(x,\xi)$ de $\sigma_P(x,\xi)$ dans un voisinage complexe de $\Omega_0 \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$. La proposition 1 et (30) montrent que :

(34) la restriction à Ω_0 de $f_* P$ coïncide, modulo un opérateur à noyau analytique dans $\Omega_0 \times \Omega_0$, avec l'opérateur P_0 défini par

$$(P_0 u)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

d'où la proposition suivante, qui établit l'équivalence de la définition (33) avec les définitions classiques données par Boutet-Kree [3], Boutet [2] et Treves [11] :

PROPOSITION 3. — *Un opérateur* $P : C_0^\infty(X) \to \mathscr{D}'(X)$ *est un opérateur pseudodifférentiel analytique de degré* m *dans* X *si et seulement si*

1) *le noyau de* P *est analytique en dehors de la diagonale de* $X \times X$;

2) *pour tout* $x_0 \in X$, *l'opérateur* P *s'écrit localement, modulo un opérateur à noyau analytique, sous la forme* (34), *où* $a(x,\xi)$ *est une réalisation de symbole analytique de degré* m *au voisinage de* $\{x_0\} \times (\mathbf{R}^n \backslash 0)$.

Les propriétés standard relatives à la composition, aux paramétrix et à la régularité elliptique se déduisent immédiatement des propriétés correspondantes données par les micro-opérateurs.

Appendice. — Existence de réalisations holomorphes de symboles analytiques.

Soient U un ouvert relativement compact de $\mathbf{R}^n$ et V un ouvert conique de $\mathbf{R}^N \backslash 0$. On considère un voisinage conique $U_1 \times V_1$ de $\bar{U} \times \bar{V}$ dans $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^N \backslash 0)$, et un symbole analytique $\sum_{j \geq 0} a_j(x,\theta)$ de degré d dans un voisinage conique Ω de $U_1 \times V_1$ dans $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^N \backslash 0)$.

THÉORÈME. — *Il existe un voisinage ouvert conique* $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset \Omega$ *de* $U \times V$ *dans* $\mathbf{C}^n \times (\mathbf{C}^N \backslash 0)$, *et une fonction* $a(x,\theta)$ *holomorphe dans* $\tilde{U} \times \tilde{V}$ *telle qu'il existe une constante* $C \geqslant 0$ *avec*

$$(0) \quad |a(x,\theta) - \sum_{j=0}^{N-1} a_j(x,\theta)| \leqslant C^{N+1} N!\, |\theta|^{d-N} \quad \text{pour} \quad N \geqslant 1,$$
$$(x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{V}.$$

On dit que $a(x,\theta)$ *est une réalisation holomorphe du symbole analytique* $\sum_j a_j(x,\theta)$.

Démonstration. — On peut toujours se ramener au cas $d = 0$. Considérons un voisinage ouvert $\tilde{U}$ de U dans $\mathbf{C}^n$ et un nombre $k \in \mathbf{R}$ avec $0 < k < 1$ tels que, si on pose

$$\tilde{W}_k = \{\theta \in \mathbf{C}^N \mid \operatorname{Re}\theta \in V, |\operatorname{Im}\theta| < k|\operatorname{Re}\theta|\},$$

alors $$\tilde{U} \times \tilde{W}_k \subset\subset \Omega \quad \text{(au sens conique)}.$$

Pour $\theta \in \tilde{W}_k$, notons que

$$\operatorname{Re}(\theta^2) = |\operatorname{Re}\theta|^2 - |\operatorname{Im}\theta|^2 \geqslant (1-k^2)|\operatorname{Re}\theta|^2 \geqslant 0,$$

donc on peut considérer la détermination principale $[\theta]$ de $(\theta)^{\frac{1}{2}}$. On vérifie facilement qu'il existe des constantes c_1, $c_2 > 0$ telles que :

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \leqslant \operatorname{Re}[\theta] \leqslant |[\theta]| \leqslant c_1|\theta| \\ |\theta| \leqslant c_2 \operatorname{Re}[\theta] \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad \theta \in \tilde{W}_k.$$

Considérons $\varepsilon \in]0, k[$ assez petit pour que :

$$\theta \in \tilde{W}_\varepsilon \Rightarrow \frac{\theta}{[\theta]} \in \tilde{W}_k.$$

Un raisonnement facile de prolongement analytique montre que

$$a_j(x,\theta) = a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)[\theta]^{-j} \quad \text{pour} \quad (x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon.$$

D'après (1), il existe $c_0 > 0$ tel que

$$\left|a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)\right| \leqslant c_0^{j+1} j! \quad \text{pour} \quad j \in \mathbf{N}, \quad (x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon.$$

Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $|s| < \frac{1}{c_0}$, posons

$$F(x,\theta,s) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)\frac{s^j}{j!}.$$

La fonction F est holomorphe pour $x \in \tilde{U}$, $\theta \in \tilde{W}_\varepsilon$, $|s| < \frac{1}{c_0}$.

Choisissons $s_0 \in \left]0, \frac{1}{c_0}\right[$, et considérons la transformée de Fourier-Borel de F :

$$A(x,\theta,\rho) = \rho \int_0^{s_0} e^{-\rho s} F(x,\theta,s)\, ds.$$

C'est une fonction holomorphe dans $\tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon \times \{\rho \in \mathbf{C} | \operatorname{Re} \rho > 0\}$.

Par intégration par parties, on obtient, pour $N \in \mathbf{N}$:

$$A(x,\theta,\rho) - \sum_{j=0}^{N} a_j\left(x, \frac{\theta}{[\theta]}\right)\rho^{-j} = R_N(x,\theta,\rho) - S_N(x,\theta,\rho),$$

avec

$$R_N(x,\theta,\rho) = \rho^{-N} \int_0^{s_0} e^{-\rho s}\, \partial_s^{N+1} F(x,\theta,s)\, ds$$

$$S_N(x,\theta,\rho) = e^{-\rho s_0} \sum_{j=0}^{N} \partial_s^j F(x,\theta,s_0)\sigma^{-j}.$$

Posons $a(x,\theta) = A(x,\theta,[\theta])$. C'est une fonction holomorphe dans $\tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon$, avec

$$(2) \qquad a(x,\theta) - \sum_{j=0}^{N} a_j(x,\theta) = R_N(x,\theta,[\theta]) - S_N(x,\theta,[\theta]).$$

Puisque F est holomorphe, il existe $c_1 \geqslant 0$ avec

$$|\partial_s^j F(x,\theta,s)| \leqslant c_{c_1}^{j+1} j^j \quad \text{pour} \quad j \geqslant 0, \qquad s \in [0,s_0], \quad (x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon.$$

On en déduit, d'après (1), que

$$(3) \qquad |R_N(x,\theta)[\theta])| \leqslant c_2^{N+1} N!\, |\theta|^{-N},$$

et que

$$|S_N(x,\theta,[\theta])| \leqslant \sum_{j=0}^{N} c_2^{j+1} j^j e^{-c|\theta|} |\theta|^{-j}, \quad \text{avec} \quad c > 0.$$

Mais un calcul élémentaire montre que

$$e^{-c|\theta|}|\theta|^{N-j} \leqslant c_3^{N-j}(N-j)^{N-j} \quad \text{avec} \quad c_3 = \frac{1}{ec},$$

d'où $$|\theta|^N |S_N(\theta)| \leqslant \sum_{j=0}^{N} c_2^{j+1} c_3^{N-j} j^j (N-j)^{N-j} \leqslant c_4^{N+1} \sum_{j=0} N^j N^{N-j}$$

avec $c_4 = \max(c_2, c_3)$; on obtient :

$$|\theta|^N |S_N(\theta)| \leqslant c_4^{N+1}(N+1)N^N, \tag{4}$$

d'où la majoration (0) pour $(x,\theta) \in \tilde{U} \times \tilde{W}_\varepsilon$ d'après (2), (3), (4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Bougrini, *Propriétés de transmission analytique pour les distributions intégrales de Fourier*, Thèse de 3e cycle, Nice, Juin 1983.

[2] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini, *Ann. Inst. Fourier*, 22-3 (1972), 229-268.

[3] L. Boutet de Monvel, P. Kree, Pseudo-differential Operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier*, 17-1 (1967), 295-323.

[4] J. Chazarain, A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Bordas (Dunod), Paris, 1981.

[5] J. J. Duistermaat, Fourier Integral Operators, Courant Institute of Math. Sciences, New-York University (1973).

[6] L. Hörmander, Fourier Integral Operators I, *Acta Mathematica*, 127 (1971), 79-183.

[7] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, Microfunctions and Pseudo-differential Equations, *Springer Lecture Notes in Math.*, 287 (1973), 265-529.

[8] P. Schapira, Conditions de positivité dans une variété symplectique. Applications à l'étude des microfonctions, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 14 (1981), 121-139.

[9] J. Sjöstrand, Propagation of Analytic singularites for Second Order Dirichlet Problems, *Comm. in P.D.E.*, 5 (1) (1980), 41-94.

[10] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales, *Astérisque*, 95 (1982), 1-166.

[11] F. Treves, Introduction to Pseudo-differential and Fourier Integral Operators, vol. I. Plenum Press, New-York (1980).

Manuscrit reçu le 14 octobre 1983.

André Piriou,
Université de Nice
I.M.S.P.
Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex.