ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Automorphismes analytiques d'un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 67-87
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_67_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 67-87.

AUTOMORPHISMES ANALYTIQUES D'UN DOMAINE DE REINHARDT BORNÉ D'UN ESPACE DE BANACH A BASE

par Jean-Pierre VIGUE

Dans [14], j'ai étudié les automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E, et je me suis intéressé plus spécialement au cas des domaines bornés symétriques. En particulier, j'ai montré que les domaines bornés symétriques étaient homogènes, isomorphes à des domaines cerclés bornés et que le groupe $G(D)$ des automorphismes analytiques d'un domaine borné symétrique D avait, de façon naturelle, une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie.

D'autre part, Braun, Kaup et Upmeier [1] ont étudié les automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné D d'un espace de Banach complexe E. Ils ont montré, en particulier, qu'il existe un sous-espace vectoriel complexe fermé F de E tel que $D \cap F$ soit un domaine borné symétrique de F et que $D \cap F$ soit exactement l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe $G(D)$.

Dans cet article, j'étudierai les automorphismes d'un domaine de Reinhardt borné D d'un espace de Banach complexe à base E. Je montrerai en particulier que, si le sous-espace vectoriel F introduit dans [1] est de codimension finie, le groupe $G(D)$ a une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie, ce qui généralise un résultat de [14]. Le résultat essentiel de cet article est un théorème de classification des domaines de Reinhardt bornés homogènes d'un espace de Banach à base. Plus précisément, si D est un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach à base E, alors E est isomorphe au sous-espace

vectoriel des suites tendant vers 0 à l'infini d'un produit $\prod_{n \in \mathbf{N}} E_n$ d'espace de Hilbert E_n, muni de la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbf{N}}\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} \|x_n\|,$$

et D est isomorphe à la boule-unité ouverte de l'image de E dans ce produit.

Enfin, je retrouverai par ces mêmes méthodes le résultat suivant : les automorphismes de la boule-unité ouverte B de $\ell^p(\mathbf{N})$ ($p \neq 2$ et $+\infty$) laissent l'origine fixe, et, d'après un théorème de H. Cartan, sont linéaires. Ce résultat est déjà connu par [1], [10] et [13], mais ma démonstration est très simple. Elle s'inspire de méthodes de Braun, Kaup et Upmeier [1] et utilise en particulier un résultat de Thullen [12] sur les automorphismes des domaines de Reinhardt bornés de $\mathbf{C}^2$.

Pour terminer cet article, je donnerai, à titre d'exemple, une classification des domaines de Reinhardt bornés d'un espace de Banach à base E tels que $\operatorname{codim}_E F = 1$.

Je remercie M. Dineen des remarques qu'il m'a faites.

1. Premières définitions et rappels.

Rappelons d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. — *Un domaine* D *d'un espace de Banach complexe* E *est dit cerclé si l'origine* 0 *appartient à* D *et si* D *est stable par le groupe à un paramètre réel d'automorphismes de* E

$$(\theta, x) \to e^{i\theta} x \quad (\theta \in \mathbf{R}).$$

Soit D un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe E. D'après [1], il existe un sous-espace vectoriel complexe fermé F de E tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe G(D) des automorphismes analytiques de D soit exactement $D \cap F$. On sait d'autre part, d'après un résultat de H. Cartan [3], que le groupe d'isotropie de l'origine $G_0(D)$ est un sous-groupe du groupe linéaire.

La symétrie $s_0(=-\mathrm{id})$ par rapport à l'origine agit par automorphisme intérieur sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(D)$ des transformations infinitésimales de D (voir [14]) et définit une décomposition directe

$$\mathfrak{g}(D) = \mathfrak{g}(D)^+ \oplus \mathfrak{g}(D)^-,$$

où

$$\mathfrak{g}(D)^+ = \{\psi \in \mathfrak{g}(D) | s_0 . \psi = \psi\},$$
$$\mathfrak{g}(D)^- = \{\psi \in \mathfrak{g}(D) | s_0 . \psi = -\psi\}.$$

On déduit du résultat de H. Cartan que $\mathfrak{g}(D)^+$ est formé d'applications linéaires. L'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(D)^- &\to E \\ \psi &\mapsto \psi(0) \end{aligned}$$

est, d'après [14], un isomorphisme d'espaces de Banach réels de $\mathfrak{g}(D)^-$ sur F, et pour tout $\xi \in F$, la transformation infinitésimale $X_\xi \in \mathfrak{g}(D)^-$ telle que

$$X_\xi(0) = \xi,$$

s'écrit

$$X_\xi(x) = \xi + Z(\xi,x,x),$$

où $Z : F \times E \times E \to E$ est une application trilinéaire continue, **C**-linéaire symétrique en les deux dernières variables, **C**-antilinéaire en la première variable. (Dans les notations de [1], $Z(\xi,x,y) = -\{x\xi^* y\}$).

On a alors le lemme suivant :

LEMME 1.2. (comparer avec [1]). — *Soit* D *un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe* E

(i) *soit* $f \in G_0(D)$. *Pour tout* $\xi \in F$, *pour tout* $x \in E$, *pour tout* $y \in E$, *on a*

$$f(Z(\xi,x,y)) = Z(f(\xi), f(x), f(y));$$

(ii) *soit* $g \in \mathscr{L}(E,E)$ *telle que* $ig \in \mathfrak{g}(D)^+$. *Pour tout* $\xi \in F$, *pour tout* $x \in E$, *pour tout* $y \in E$, *on a :*

$$g(Z(\xi,x,y)) = -Z(g(\xi),x,y) + Z(\xi,g(x),y) + Z(\xi,x,g(y));$$

(iii) *soit* p *un projecteur de* E *tel que* $ip \in \mathfrak{g}(D)^+$, *soit* $E_0 = \operatorname{Ker} p$, $E_1 = \operatorname{Im} p$, *et soit* $F_\mu = F \cap E_\mu$ $(\mu = 0$ *ou* $1)$. *Alors, on a :*

$$Z(F_\mu, E_\nu, E_\sigma) \subset E_{\nu+\sigma-\mu} (\mu,\nu,\sigma = 0 \text{ ou } 1).$$

Idée de la démonstration. — (i) et (ii) se démontrent comme dans [14], paragraphe 3.5. En appliquant (ii) au projecteur p, on trouve (iii).

J'aurai également besoin de la proposition suivante (voir par exemple [1]) :

PROPOSITION 1.3. — *Soit* D *un domaine cerclé borné d'un espace de Banach complexe* E.

(i) *Pour tout* $\xi \in F$, *pour tout* $\eta \in F$,

$$x \mapsto [Z(\xi,\eta,x) - Z(\eta,\xi,x)]$$

est un élément de $\mathfrak{g}(D)^+$;

(ii) *pour tous* ξ, η, $\zeta \in F$, *pour tout* $x \in E$, *on a :*

$$2Z(\eta,Z(\xi,\zeta,x),x) - Z(\xi,\zeta,Z(\eta,x,x)) = Z(Z(\zeta,\xi,\eta),\ x,\ x).$$

Idée de la démonstration. — Le (i) se démontre en calculant le crochet de $\xi + Z(\xi,x,x)$ et de $\eta + Z(\eta,x,x)$ qui est une transformation infinitésimale appartenant à $\mathfrak{g}(D)^+$. La formule (ii) se montre en calculant le crochet $[Z(\eta,x,x),\ Z(\xi,\zeta,x)]$ de deux manières différentes, d'abord directement, ensuite en utilisant le lemme 3.2.9. de [14], p. 257.

Définissons maintenant les domaines bicerclés.

DÉFINITION 1.4. — *Un domaine* D *d'un espace de Banach complexe* E *est dit bicerclé, relativement à une décomposition directe* $E = U \oplus V$ *si l'origine* 0 *appartient à* D *et si* D *est stable par les deux groupes à un paramètre réel d'automorphismes linéaires de* E *suivants :*

$$(\theta_1,(u,v)) \mapsto (e^{i\theta_1}u,v) \quad (\theta_1 \in \mathbf{R}),$$
$$(\theta_2,(u,v)) \mapsto (u,e^{i\theta_2}v) \quad (\theta_2 \in \mathbf{R}).$$

Soit maintenant D un domaine bicerclé borné d'un espace de Banach complexe E, relativement à une décomposition directe de $E = U \oplus V$. Il est clair que

$$(u,v) \mapsto i(u,0)$$

et

$$(u,v) \mapsto i(0,v)$$

sont des transformations infinitésimales de D. Supposons de plus que D vérifie la condition suivante :

(1.5.) *Le sous-espace vectoriel complexe* F *de* E *tel que l'orbite de l'origine* 0 *sous l'action de* G(D) *soit égal à* $D \cap F$ *est égal à* U.

On déduit alors du lemme 1.2. les inclusions suivantes :

$$Z(U,U,U) \subset U, \qquad Z(U,U,V) \subset V \qquad \text{et} \qquad Z(U,V,V) = \{0\}.$$

Ainsi, pour tout $\xi \in U$, pour tout $(u,v) \in U \oplus V$, on a :

$$X_\xi(u,v) = (\xi + Z(\xi,u,u),\ 2Z(\xi,u,v)).$$

De la forme de Z, on déduit [1] que, si π est la projection sur U parallèlement à V, si

$$(t,x) \mapsto f_\xi(t,x)$$

désigne le groupe à un paramètre réel d'automorphismes de D associé à la transformation infinitésimale X_ξ, on a :

$$\pi(f_\xi(t,x)) = f_\xi(t,\pi(x)).$$

On en déduit aussi que D est égal à l'image de $D \cap V$ sous l'action des $f_\xi(1,.)$, pour tout $\xi \in U$.

2. Quelques propriétés des domaines bicerclés bornés.

Soit D_1 (resp. D_2) un domaine bicerclé borné d'un espace de Banach complexe E_1 (resp. E_2), relativement à une décomposition directe $E_1 = U_1 \oplus V_1$ (resp. $E_2 = U_2 \oplus V_2$). Supposons que D_1 et D_2 vérifient la condition (1.5.). Nous avons alors le théorème suivant (comparer avec [1]).

THÉORÈME 2.1. — (i) *Soit f un isomorphisme linéaire de D_1 sur D_2. Alors $f = (f_1,f_2)$, où f_1 est un isomorphisme linéaire de $D_1 \cap U_1$ sur $D_2 \cap U_2$ et f_2 un isomorphisme linéaire de $D_1 \cap V_1$ sur $D_2 \cap V_2$.*

(ii) *Réciproquement, soit $f = (f_1,f_2)$, où f_1 est un isomorphisme linéaire de U_1 sur U_2 et f_2 un isomorphisme linéaire de V_1 sur V_2. Pour*

que f soit un isomorphisme linéaire de D_1 sur D_2, il faut et il suffit que f_2 soit un isomorphisme de $D_1 \cap V_1$ sur $D_2 \cap V_2$ et que, pour tout $\xi \in U_1$, pour tout $x \in E_1$, on ait

$$f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)).$$

Démonstration. – Montrons (i). Soit f un isomorphisme linéaire de D_1 sur D_2. Il est clair que f envoie U_1 sur U_2 et que, dans la décomposition de $E_1 = U_1 \oplus V_1$ et de $E_2 = U_2 \oplus V_2$, f a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_3 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix},$$

où

$$f_1 \in \mathrm{Isom}\,(U_1, U_2), \qquad f_2 \in \mathrm{Isom}\,(V_1, V_2) \qquad \text{et} \qquad f_3 \in \mathscr{L}(V_1, U_2).$$

On sait déjà que, pour tout $\xi \in U_1$, pour tout $x \in E_1$

$$f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)).$$

Soit $x \in V_1$. On a montré que $Z(\xi,x,x) = 0$. Par suite,

$$Z(f(\xi),f(x),f(x)) = 0, \qquad \text{pour tout} \qquad \xi \in U_1.$$

En projetant sur U_2, on trouve, pour tout $\xi \in U_1$,

$$Z(f_1(\xi), f_3(x), f_3(x)) = 0.$$

D'après l'assertion démontrée dans le lemme 3.4.15. de [14], ceci prouve que $f_3(x) = 0$.

Montrons (ii). Soit $f = (f_1,f_2)$ tel que, pour tout $\xi \in U_1$, pour tout $x \in E_1$,

$$f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi), f(x), f(x)).$$

Le théorème 3.5.2. de [14] montre déjà que f_1 est un isomorphisme linéaire de $D_1 \cap U_1$ sur $D_2 \cap U_2$. De la relation ci-dessus, on déduit que

$$f(f_\xi(t,(u,v))) = f_{f_1(\xi)}(t,f(u,v)),$$

pour tout $\xi \in U_1$. Comme $f_2(D_1 \cap V_1) = D_2 \cap V_2$, ceci suffit à montrer que f est un isomorphisme de D_1 sur D_2.

On peut, bien sûr, appliquer ce résultat aux automorphismes linéaires d'un domaine bicerclé borné. Rappelons d'abord que, si D est un domaine borné d'un espace de Banach complexe, on munit le groupe G(D) des automorphismes analytiques de D de la topologie de la convergence uniforme locale, et cette topologie fait de G(D) un groupe topologique (voir [14]). D'après un résultat obtenu en collaboration avec J. Isidro [19], si D est un domaine cerclé borné, cette topologie coïncide sur G(D) avec la topologie de la convergence uniforme sur D. On déduit du théorème 2.1. le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Soit* D *un domaine bicerclé d'un espace de Banach complexe* E, *relativement à une décomposition directe de* $E = U \oplus V$, *et supposons que* D *vérifie la condition* (1.5.). *Supposons de plus que le groupe d'isotropie* $G_0(D \cap V)$ *de l'origine* 0 *dans* $D \cap V$ *soit un sous-groupe de Lie réel de* GL(V). *Alors le groupe* $G_0(D)$ *et le groupe* G(D) *ont des structures de groupes de Lie réels, compatibles avec leur topologie et l'application*

$$\begin{aligned} G(D) \times D &\to 0 \\ (g,x) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

est analytique réelle.

Démonstration. — Il suffit en fait de montrer que $G_0(D)$ est un sous-groupe de Lie réel du groupe linéaire GL(E). D'après l'hypothèse du théorème, $G_0(D \cap V)$ est un sous-groupe de Lie réel de GL(V), d'algèbre de Lie $g(D \cap V)^+ \subset \mathscr{L}(V,V)$. Le groupe $G_0(D)$ est égal au sous-groupe

$$\{f=(f_1,f_2) \in GL(U) \times GL(V) | f_2 \in G_0(D \cap V) \text{ et } f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)),\ \forall \xi \in U,\ \forall x \in E\}.$$

D'après un résultat de Harris et Kaup [7]

$$\{f \in GL(U) \times GL(V) | f(Z(\xi,x,x)) = Z(f(\xi),f(x),f(x)),\ \forall \xi \in U,\ \forall x \in E\}$$

qui est un sous-groupe de $GL(U) \times GL(V)$ défini par des équations polynomiales de degré $\leqslant 3$, est un sous-groupe de Lie réel de $GL(U) \times GL(V)$. On en déduit que $G_0(D)$, comme intersection de deux sous-groupes de Lie de $GL(U) \times GL(V)$, est un sous-groupe de Lie réel de $GL(U) \times GL(V)$.

La condition que $G_0(D \cap V)$ est un groupe de Lie réel, est vérifiée, par exemple, dans les deux cas suivants :

(i) V *est un espace vectoriel complexe de dimension finie* (voir H. Cartan [4]);

(ii) $D \cap V$ *est un domaine borné symétrique de* V (voir Vigué [14]).

On déduit du théorème 2.2. le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.3. — *Soit* D *un domaine bicerclé borné d'un espace de Banach complexe* E, *relativement à une décomposition directe de* $E = U \oplus V$, *et supposons que* D *vérifie la condition* (1.5.). *Supposons de plus que* V *est un espace vectoriel de dimension finie. Alors le groupe* G(D) *a une structure de groupe de Lie réel, compatible avec sa topologie.*

3. Domaines de Reinhardt bornés d'un espace de Banach complexe à base.

Soit E un espace de Banach complexe à base, muni d'une base $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$, que nous supposerons toujours inconditionnelle. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n e_n ,$$

et on note $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ les coordonnées de x dans la base $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Par analogie avec la dimension finie, je poserai la définition suivante :

DÉFINITION 3.1. — *On dit qu'un domaine* D *d'un espace de Banach complexe à base* E, *muni d'une base* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est un domaine de Reinhardt si l'origine* 0 *appartient à* D, *et si, pour tout entier* n_0, *le domaine* D *est stable par le groupe à un paramètre réel d'automorphismes de* E *suivant*

$$(\theta, (x_n)_{n \in \mathbf{N}}) \mapsto (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \quad (\theta \in \mathbf{R}),$$

où $y_n = x_n$, si $n \neq n_0$,

$$y_{n_0} = e^{i\theta} . x_{n_0} .$$

Si I est une partie de $\mathbf{N}$ (finie ou infinie), on note E_I le sous-espace vectoriel complexe fermé engendré par les $(e_n)_{n \in I}$. Bien sûr, E admet une décomposition directe

$$E = E_I \oplus E_{\mathbf{N} \setminus I} .$$

Si D est un domaine de Reinhardt d'un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n\in N})$, on montre facilement, à l'aide d'un passage à la limite, que D est cerclé et que D est bicerclé, relativement à toute décomposition directe de E de la forme $E = E_I \oplus E_{N\setminus I}$.

Soit donc D un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n\in N})$. Soit F le sous-espace vectoriel complexe de E tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de G(D) soit égale à $D \cap F$. Soit $(x_n)_{n\in N}$ un élément de F, et supposons qu'il existe un indice n_0, tel que $x_{n_0} \neq 0$. Alors, $e_{n_0} \in F$. En effet, D est bicerclé, relativement à la décomposition directe de $E = E_{\{n_0\}} \oplus E_{N\setminus\{n_0\}}$. On en déduit que, si on pose

$$\begin{cases} y_n = -x_n, & \text{si } n \neq n_0 \\ y_{n_0} = x_{n_0} \end{cases}$$

alors, $(y_n)_{n\in N}$ appartient à F. Par suite, $(x_n+y_n)_{n\in N}$ appartient à F, ce qui prouve bien que e_{n_0} appartient à F. On déduit facilement de ce résultat le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base* $(E,(e_n)_{n\in N})$. *Alors il existe une partie* I *de* N *tel que l'orbite de l'origine* 0 *sous l'action du groupe* G(D) *soit égale à* $D \cap E_I$. *Le domaine* D *est bicerclé borné relativement à la décomposition directe de* $E = E_I \oplus E_{N\setminus I}$, *et vérifie de plus la condition* (1.5).

On déduit du théorème 3.2 et du corollaire 2.3. le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.3. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base* $(E,(e_n)_{n\in N})$. *Si* $N\setminus I$ *est fini (où* I *est le sous-ensemble de* N *défini au théorème* 3.2.), *alors le groupe* G(D) *des automorphismes analytiques de* D *a une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie.*

Bien sûr, dès que $N\setminus I$ est infini, on peut construire comme dans [15], paragraphe 4.1., des exemples de domaines de Reinhardt bornés D d'un espace de Banach à base tels que G(D) n'ait pas une structure de groupe de Lie réel compatible avec sa topologie.

Soit donc D un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n\in N})$, soit I le sous-ensemble de N tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de G(D) soit égale à $D \cap E_I$. Enfin, soit

$$Z : E_I \times E \times E \to E$$

l'application trilinéaire continue précédemment définie. Nous avons alors le lemme suivant :

LEMME 3.4. — (i) *pour tout* $n \in \mathrm{I}$, $\mathrm{Z}(e_n, e_n, e_n) = -r_{nn}e_n$, *avec* $r_{nn} > 0$,

(ii) *pour tout* $n \in \mathrm{I}$, *pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *pour tout* $p \in \mathbf{N}$, *avec* $n \neq m$, $n \neq p$, *on a :*

$$\mathrm{Z}(e_n, e_m, e_p) = 0$$

(iii) *pour tout* $n \in \mathrm{I}$, *pour tout* $m \in \mathbf{N}$, *on a :*

$$\mathrm{Z}(e_n, e_n, e_m) = -r_{nm}e_m, \qquad \textit{avec} \qquad r_{nm} \geqslant 0.$$

Démonstration. — (i) Considérons la décomposition directe de $\mathrm{E} = e_{\{n\}} \oplus \mathrm{E}_{\mathbf{N}\setminus\{n\}}$. Par hypothèse, si p_n désigne la projection de E sur $\mathrm{E}_{\{n\}}$ parallèlement à $\mathrm{E}_{\mathbf{N}\setminus\{n\}}$, $ip_n \in \mathfrak{g}(\mathrm{D})^+$. D'après le lemme 1.2., on a :

$$\mathrm{Z}(\mathrm{E}_{\{n\}}, \mathrm{E}_{\{n\}}, \mathrm{E}_{\{n\}}) \subset \mathrm{E}_{\{n\}}.$$

On en déduit : :$\mathrm{Z}(e_n, e_n, e_n) = -r_{nn}e_n$.

Pour montrer que r_{nn} est réel, on remarque que, d'après la proposition 1.3. (i),

$$x \mapsto i\mathrm{Z}(e_n, e_n, x)$$

est une rotation infinitésimale de D. Par suite, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f_t = \exp(it\mathrm{Z}(e_n, e_n, .))$$

est une transformation linéaire de D. Son spectre est contenu dans l'ensemble des nombres complexes de module 1. On en déduit que toute valeur propre de $\mathrm{Z}(e_n, e_n, .)$ est réelle. Ainsi donc, $r_{nn} \in \mathbf{R}$, et comme D est borné, il est facile de voir que r_{nn} est strictement positif (voir [14]).

(ii) En utilisant p_n, on trouve d'après le lemme 1.2. que

$$\mathrm{Z}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}, \mathrm{E}_0, \mathrm{E}_0) \subset \mathrm{E}_{-1} = \{0\}.$$

(E_μ désigne le sous-espace propre correspondant à la valeur propre μ de p_n). Ainsi

$$\mathrm{Z}(e_n, e_m, e_p) = 0.$$

(iii) De même, en utilisant p_m, on trouve que $Z(e_n, e_n, e_m)$ est colinéaire à e_m. On a donc $Z(e_n, e_n, e_m) = -r_{nm}e_m$, et r_{nm} est réel d'après l'argument de (i). On montre de même que r_{nm} est positif, car, sinon, D ne serait pas borné.

Remarque 3.5. — Si $Z(e_n, e_n, e_n) = -e_n$, on dit (voir [9]) que e_n est un tripotent de Z. Pour cela, d'après les théorèmes de représentation des domaines bornés cerclés homogènes, il faut que e_n appartienne à la frontière de D. Quitte à multiplier e_n par un scalaire, on peut donc supposer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, e_n appartient à la frontière de D. Alors, pour tout $n \in \mathrm{I}$, on a : $Z(e_n, e_n, e_n) = -e_n$. Nous supposerons que cette hypothèse est vérifiée à l'avenir.

4. Les automorphismes analytiques de la boule-unité ouverte de $\ell^p(\mathbf{N})$.

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents au calcul de l'orbite de l'origine 0 sous l'action du groupe G(B) des automorphismes analytiques de la boule-unité ouverte B de $\ell^p(\mathbf{N})$. [Si $p = 2$ ou $+\infty$, on sait (voir par exemple [5]) que B est homogène, et nous exclurons ce cas]. Rappelons d'abord le résultat suivant dû à Thullen [12] (voir aussi [3]). On peut d'ailleurs le déduire des méthodes exposées dans le présent article.

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $\mathrm{D} \subset \mathbf{C}^2$ *un domaine de Reinhardt borné. S'il existe un automorphisme analytique de* D *ne laissant pas l'origine fixe, il existe un isomorphisme linéaire* f *de* D *sur l'un des domaines suivants :*

1) $\Delta \times \Delta = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1\}$,

2) $\mathrm{B}_p = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^p < 1\}$ $(p>0)$.

Remarquons que, d'après Sunada [11], on peut même supposer que l'isomorphisme linéaire f est de la forme suivante :

$$f(x,y) = (\lambda x, \mu y)$$

ou

$$f(x,y) = (\lambda y, \mu x)$$

où λ et μ sont deux constantes réelles strictement positives.

Considérons maintenant un domaine bicerclé borné D d'un espace de Banach complexe E, relativement à une décomposition directe de $E = U \oplus V$. Soit F le sous-espace vectoriel complexe fermé de E tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de G(D) soit égale à $D \cap F$.

Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. — $G(D \cap U).0 \supset (G(D).0) \cap U$.

Démonstration. — D'après le lemme 1.2., on a $Z(U \cap F, U, U) \subset U$. Ceci suffit à démontrer le résultat.

Nous pouvons maintenant énoncer et montrer le théorème suivant (voir aussi [1], [10] et [13]).

THÉORÈME 4.3. — *Soit p un nombre réel* $\geqslant 1$, $p \neq 2$ *et* $+\infty$. *Soit* B *la boule-unité ouverte de* $\ell^p(\mathbf{N})$ [*l'espace de Banach des suites de nombres complexes de puissances* p^e *sommables, muni de la norme habituelle*]. *Alors l'origine* 0 *est invariante par les automorphismes analytiques de* B.

Démonstration. — Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la base canonique de $E = \ell^p(\mathbf{N})$, $(p \neq 2$ et $+\infty)$. La boule-unité ouverte B de E est un domaine de Reinhardt borné relativement à cette base. Soit donc I le sous-ensemble de $\mathbf{N}$ tel que l'orbite de l'origine 0 sous l'action de G(B) soit égale à $B \cap E_I$. Supposons que I est non vide. Soit $n \in I$ et soit m un entier quelconque distinct de n. Alors $B \cap E_{\{n,m\}}$ est un domaine de Reinhardt borné de $E_{\{n,m\}}$ qui est isomorphe à $\mathbf{C}^2$, et on a :

$$B_1 = B \cap E_{\{n,m\}} = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^p + |y|^p < 1\}.$$

D'autre part, B est un domaine bicerclé borné relativement à la décomposition de $E = E_{\{n,m\}} \oplus E_{\mathbf{N} \setminus \{n,m\}}$ et d'après le théorème 4.2., l'orbite de l'origine 0 dans B_1, sous l'action de $G(B_1)$, n'est pas réduite à $\{0\}$. D'après le théorème 4.1., B_1 serait linéairement isomorphe à un des domaines de la forme (i) ou (ii), ce qui n'est pas le cas. Nous avons trouvé la contradiction cherchée, et le théorème est démontré.

Remarque 4.4. — Il est facile de voir, par des arguments semblables à ceux développés ici, que, si I est un ensemble d'indices, la conclusion du théorème reste vraie pour la boule-unité ouverte B de l'espace de Banach $\ell^p(I)$, $(p \neq 2$ et $+\infty)$ des suites de nombres complexes, indexées par I, de puissances p^e sommables, dès que le cardinal de I est supérieur ou égal à 2.

5. Classification des domaines de Reinhardt bornés homogènes d'un espace de Banach à base.

Soit D un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach complexe à base E, muni d'une base $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Avec les conventions que nous avons faites (voir remarque 3.5.), on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$Z(e_n, e_n, e_n) = -e_n.$$

Nous avons besoin des lemmes suivants.

LEMME 5.1. — *Soient n et m deux entiers distincts. Alors, une des deux propositions suivantes est vérifiée :*

(i) $Z(e_n, e_n, e_m) = Z(e_m, e_m, e_n) = 0$,

(ii) $Z(e_n, e_n, e_m) = -\frac{1}{2} e_m$ *et* $Z(e_m, e_m, e_n) = -\frac{1}{2} e_n$.

Démonstration. — D'après le théorème 4.2., l'intersection de D avec $E_{\{n,m\}}$ est un domaine de Reinhardt borné homogène de $E_{\{n,m\}}$ qui est isomorphe à $\mathbf{C}^2$. D'après Thullen [12] (voir aussi E. Cartan [2]), il existe seulement deux domaines de Reinhardt bornés homogènes de $\mathbf{C}^2$:

(i) le bidisque $\Delta \times \Delta = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{C}^2 | |y_1| < 1, |y_2| < 1\}$, et dans ce cas,

$$Z(e_n, e_n, e_m) = Z(e_m, e_m, e_n) = 0;$$

(ii) la boule

$$B_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{C}^2 | |y_1|^2 + |y_2|^2 < 1\}.$$

L'application Z associée vaut alors [5]

$$Z(\xi, x, y) = -\frac{1}{2} [(x,\xi)y + (y,\xi)x],$$

où (x,ξ) désigne le produit scalaire hermitien canonique de $\mathbf{C}^2$. Il est facile de voir que

$$Z(e_n, e_n, e_m) = -\frac{1}{2} e_m,$$

et que

$$Z(e_m, e_m, e_n) = -\frac{1}{2} e_n .$$

Le lemme est démontré.

Remarquons que, dans le cas d'un domaine borné cerclé homogène, on sait d'après Loos [9] que, si e est un tripotent de Z, le spectre de

$$x \mapsto Z(e,e,x)$$

est contenu dans $\left\{0, -\frac{1}{2}, -1\right\}$. On peut alors déduire le lemme de calculs directs.

LEMME 5.2. — *Soient m, n, p trois entiers deux à deux distincts, et supposons que $Z(e_m, e_m, e_n) \neq 0$. Alors $Z(e_m, e_m, e_p) = Z(e_n, e_n, e_p) = -\lambda e_p$, avec $\lambda = 0$ ou $\frac{1}{2}$.*

Le lemme 5.2. sera une conséquence immédiate du lemme 5.1. et du lemme suivant dans lequel je ne supposerai pas que D est homogène. [Le résultat obtenu me sera utile au § 6].

LEMME 5.3. — *Soit D un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base $(E, (e_n)_{n \in N})$. Soient m, n, p trois entiers deux à deux distincts, supposons que m et n appartiennent à I et que $Z(e_m, e_n, e_n) \neq 0$. Alors il existe un nombre réel $\lambda \geqslant 0$ tel que*

$$Z(e_m, e_m, e_p) = Z(e_n, e_n, e_p) = -\lambda e_p .$$

Démonstration. — D'après la proposition 1.3., pour tout $\xi \in F$, pour tout $\eta \in F$,

$$x \mapsto \psi(x) = Z(\xi,\eta,x) - Z(\eta,\xi,x)$$

est un élément de $\mathfrak{g}(D)^+$. Prenons $\xi = e_m$, $\eta = e_n$. On déduit du lemme 3.4. que $\psi_{|E_{N \setminus \{m,n\}}} \equiv 0$. On déduit facilement des lemmes 3.4. et 5.1. que

$$\psi(e_m) = Z(e_m, e_n, e_m) - Z(e_n, e_m, e_m) = -\frac{1}{2} e_n,$$

$$\psi(e_n) = Z(e_m, e_n, e_n) - Z(e_n, e_m, e_n) = \frac{1}{2} e_m .$$

Le groupe à un paramètre engendré par cette transformation infinitésimale contient la transformation linéaire de D suivante :

$$r(e_m) = e_n, \qquad r(e_n) = -e_m, \qquad r(e_j) = e_j, \quad \forall j \in \mathbf{N}\backslash\{m,n\}.$$

D'après le lemme 1.2., on a : $\forall \xi \in \mathrm{F}$, $\forall x \in \mathrm{E}$, $\forall y \in \mathrm{E}$

$$r(\mathrm{Z}(\xi,x,y)) = \mathrm{Z}(r(\xi), r(x), r(y)).$$

Ceci entraîne que

$$r(\mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p)) = \mathrm{Z}(r(e_m),\ r(e_m),\ r(e_p)) = \mathrm{Z}(e_n, e_n, e_p).$$

Comme on sait d'autre part que $\mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p)$ est colinéaire à e_p, on a

$$r(\mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p)) = \mathrm{Z}(e_m, e_m, e_p) = -\lambda e_p,$$

ce qui, compte-tenu du lemme 3.4., démontre le lemme.

Nous pouvons maintenant énoncer et montrer le théorème de classification suivant :

THÉORÈME 5.4. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach complexe à base* E, *muni d'une base* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$. *Alors il existe une partition de* N *en une réunion (finie ou infinie) de sous-ensembles* $(\mathrm{I}_p)_{p \in \mathrm{P}}$. *Pour chaque* $p \in \mathrm{P}$, $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *admet une norme hilbertienne, compatible avec la norme donnée, et telle que* $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *soit la boule-unité ouverte de* $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *pour cette norme. L'espace de Banach* E *est isomorphe à l'espace vectoriel* $\prod_{p \in \mathrm{P}}^{0} \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *des suites, indexées par* P, *d'éléments de* $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *convergeant vers* 0 *quand* p *tend vers l'infini, et* D *est l'intersection du produit des* $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ *avec* E.

Avant de démontrer ce théorème, remarquons que, pour tout $p \in \mathrm{P}$, $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ est un domaine borné symétrique irréductible, et même fortement irréductible au sens de [18]. D'autre part, le théorème 5.3. fournit la décomposition d'un domaine de Reinhardt borné homogène en « produit continu tendant vers 0 à l'infini » de domaines bornés symétriques irréductibles au sens de [15] et [18]. Il est facile, à partir des résultats de [15], de calculer la composante connexe de l'identité dans le groupe G(D). Remarquons enfin que tout domaine de Reinhardt borné homogène est convexe (comparer avec [16] et [17]).

Démonstration du théorème 5.4. — Considérons sur $\mathbf{N}$ la relation $\mathscr{R}$ suivante : on dit que $m\mathscr{R}n$ si et seulement si $Z(e_m, e_m, e_n) \neq 0$. Le lemme 5.1. montre que $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrique. On déduit du lemme 5.2. que $\mathscr{R}$ est transitive. Ainsi, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Soit $\mathrm{P} = \mathbf{N}/\mathscr{R}$. Pour tout $p \in \mathrm{P}$, soit I_p l'ensemble des éléments $n \in \mathbf{N}$ qui appartiennent à la classe d'équivalence de p. Enfin, soit $\mathrm{E}^0_{\mathrm{I}_p}$ le sous-espace vectoriel engendré algébriquement par les e_n, $n \in \mathrm{I}_p$, et suivant l'habitude, soit $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ sa fermeture. Il découle facilement des calculs précédents que, pour tout $\xi \in \mathrm{E}^0_{\mathrm{I}_p}$, pour tout $x \in \mathrm{E}^0_{\mathrm{I}_p}$, $Z(\xi,x,x)$ est colinéaire à x. Par passage à la limite, c'est vrai également pour tout $\xi \in \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ et pour tout $x \in \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$. L'égalité

$$Z(\xi,x,x) = -(x,\xi)x$$

définit un produit scalaire hermitien (x,ξ) sur $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$. Pour ce produit scalaire, $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ est la boule-unité ouverte de $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$, et ce produit scalaire fait de $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ un espace hilbertien.

On peut plonger E dans le produit $\prod_{p \in \mathrm{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$. Sur la forme de Z, il est clair que D s'envoie sur l'intersection de E avec le produit des $\mathrm{D} \cap \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$. Du fait que E est un espace de Banach à base, on déduit que l'image de E dans $\prod_{p \in \mathrm{P}} \mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ est l'ensemble des suites indexées par P d'éléments de $\mathrm{E}_{\mathrm{I}_p}$ convergeant vers 0 à l'infini, et le théorème est démontré.

Enfin, on déduit de cette étude le théorème suivant. (Je ne supposerai pas que les vecteurs de la base sont des tripotents pour Z).

THÉORÈME 5.5. — *Soit* D_1 (resp. D_2) *un domaine de Reinhardt borné homogène d'un espace de Banach complexe à base* E_1 (*resp.* E_2), *muni d'une base* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (*resp.* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$), *et supposons que* D_1 *et* D_2 *soient analytiquement isomorphes. Alors il existe une famille de nombres réels strictement positifs* $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *et une permutation* σ *de* $\mathbf{N}$ *telle que l'application linéaire* φ *définie par*

$$\varphi(e_n) = c_n f_{\sigma(n)}$$

soit un isomorphisme linéaire de D_1 *sur* D_2.

Idée de la démonstration. — Comme D_1 et D_2 sont homogènes, il existe un isomorphisme g de D_1 sur D_2 tel $g(0) = 0$. On sait que g

est linéaire, et que, pour tout $\xi \in E_1$, pour tout $x \in E_1$, pour tout $y \in E_1$,

$$g(Z(\xi,x,y)) = Z(g(\xi),\ g(x),\ g(y)).$$

On en déduit que, si E_1 (resp. E_2) est isomorphe à $\prod_{p \in P_1}^{0} E_{I_p}$ (resp. $\prod_{p \in P_2}^{0} E_{I_p}$), il existe une bijection τ de P_1 sur P_2 telle que, $\forall p \in P_1$, g induise un isomorphisme de E_{I_p} sur $E_{I_{\tau(p)}}$. On sait que $D_1 \cap E_{I_p}$ est la boule-unité ouverte de l'espace de Hilbert E_{I_p}. En composant g avec un automorphisme linéaire isométrique ψ_p de E_{I_p}, on trouve, pour tout $n \in p$:

$$g(\psi_p(e_n)) = c_n f_{\sigma_p(n)},$$

où σ_p est une bijection de I_p sur $I_{\tau(p)}$. Ceci suffit à montrer le théorème.

6. Applications.

Maintenant que l'on connaît tous les domaines de Reinhardt bornés homogènes d'un espace de Banach à base, il serait intéressant de traiter le problème suivant : étant donné un espace de Banach à base $(E,(e_n)_{n \in N})$, étant donnés un sous-ensemble I de N et un domaine de Reinhardt borné homogène $B \subset E_I$, trouver tous les domaines de Reinhardt bornés D tels que $D \cap E_I = B$ et que l'orbite de l'origine sous l'action de $G(D)$ contienne $D \cap E_I$. Nous allons résoudre ce problème quand $I = N^* = N \backslash \{0\}$, c'est-à-dire, quand le sous-espace vectoriel F tel que l'orbite de l'origine sous l'action de $G(D)$ soit égale à $D \cap F$ est de codimension au plus 1. Alors E_{N^*} est égal au sous-espace vectoriel des suites tendant vers 0 à l'infini d'un produit d'espaces hilbertiens $E_p (p \in P)$, et $E_{\{0\}}$ est isomorphe à $\mathbf{C}$. On peut bien sûr supposer que $D \cap E_{\{0\}}$ est le disque-unité ouvert Δ dans $\mathbf{C}$, et on sait que D est l'image de $D \cap E_0$ sous l'action de $G(D)$. Supposons, comme précédemment, que les $(e_n)_{n \in N^*}$ sont des tripotents et que e_0 appartient à la frontière de D. On a alors le lemme suivant :

LEMME 6.1. — *Pour tout $p \in P$, il existe un nombre réel $r_p \geqslant 0$, tel que, pour tout $n \in p$, on ait :*

$$Z(e_n, e_n, e_0) = -r_p e_0.$$

De plus, $\sum_{p \in P} r_p < +\infty$.

Démonstration. — On a vu au lemme 5.3. que, si m et n appartiennent à p, il existe un nombre réel $\lambda \geqslant 0$ tel que

$$Z(e_m, e_m, e_0) = Z(e_n, e_n, e_0) = -\lambda e_0,$$

ce qui prouve l'existence de r_p.

Soient maintenant $p_1, \ldots, p_n$, n éléments deux à deux distincts de P. Si $m_1, \ldots, m_n$ sont des éléments de $p_1, \ldots, p_n$ respectivement, $e_{m_1} + \cdots + e_{m_n}$ appartient à $\bar{D}$. Par suite, Z qui est continue, est bornée en norme sur $\bar{D}$ par une constante K indépendante de n. Or,

$$Z(e_{m_1} + \cdots + e_{m_n}, e_{m_1} + \cdots + e_{m_n}, e_0) = -(r_{p_1} + \cdots + r_{p_n}) e_0.$$

Ceci prouve que la série $\sum_{p \in P} r_p$ est convergente.

Nous avons le théorème suivant qui généralise un résultat de Sumada [11] :

THÉORÈME 6.2. — *Soit* $B \subset E_{N^*} = \prod_{p \in P}^{0} \ell^2(I_p)$ *un domaine de Reinhardt borné homogène. Soit* $(r_p)_{p \in P}$ *une suite de nombres réels* $\geqslant 0$ *tels que* $\sum_{p \in P} r_p < +\infty$. *Alors il existe un domaine de Reinhardt borné* D *dans* E_N *tel que* B *soit égal à* $D \cap \dot{E}_{N^*}$, *que* B *soit contenu dans l'orbite de l'origine sous l'action de* G(D) *et que, pour tout* $p \in P$, *pour tout* $n \in p$,

$$Z(e_n, e_n, e_0) = -r_p e_0,$$

(où e_n *désigne un tripotent de* $\ell^2(I_p)$*). Plus précisément,*

$$D = \{(x_n)_{n \in N} | \, \|x_p\| < 1, \quad \forall p \in P \quad \text{et} \quad |x_0| \leqslant \prod_{p \in P} (1 - \|x_p\|^2)^{r_p}\}.$$

[$\|x_p\|$ désigne la norme dans $\ell^2(I_p)$ définie par $\|x_p\|^2 = \sum_{n \in I_p} |x_n|^2$].

Démonstration. — Remarquons d'abord que le produit infini $\prod_{p \in P} (1 - \|x_p\|^2)^{r_p}$ est convergent et la formule ci-dessus définit donc un domaine borné de E. On sait que D est l'orbite de $\Delta \subset C = E_{\{0\}}$ sous

l'action des groupes à un paramètre associés aux éléments de $\mathfrak{g}(D)^-$. Si on résout l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = \xi + Z(\xi,x,x),$$

on trouve, pour tout $p \in P$, comme solution prenant en $t = 0$ la valeur 0

$$x_p = \frac{\xi_p}{\|\xi_p\|} \operatorname{th}(t\|\xi_p\|),$$

(avec la convention $x_p = 0$ si $\xi_p = 0$).

Il reste à résoudre l'équation différentielle dans $\mathbf{C}$

$$\frac{dx_0}{dt} = -2 \sum_{p \in P} r_p \|\xi_p\| \operatorname{th}(t\|\xi_p\|) . x_0$$

on trouve

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda \prod_{p \in P} (\operatorname{ch}(t\|\xi_p\|)^{-2r_p} \\ &= \lambda \prod_{p \in P} 1-(\operatorname{th}(t\|\xi_p\|)^2)^{r_p}. \end{aligned}$$

On en déduit que, au-dessus du point $(x_p)_{p \in P} \in \prod_{p \in P}^{0} \ell^2(I_p)$, l'image de $\Delta \subset \mathbf{C}$ est égale à l'ensemble des points x_0 tels que

$$|x_0| < \prod_{p \in P} (1-\|x_p\|^2)^{r_p},$$

ce qui démontre le résultat.

J'ai déjà étudié dans [14] et [15] la distance de Carathéodory sur un domaine borné d'un espace de Banach complexe E. Si D est un domaine borné homogène, D est complet pour la distance de Carathéodory, et même (voir [6]) pour toute distance invariante. On déduit immédiatement du théorème précédent et de quelques considérations élémentaires le résultat suivant :

THÉORÈME 6.3. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach à base* $(E,(e_n)_{n \in N})$. *Si l'espace vectoriel complexe* F *tel que l'orbite de l'origine sous l'action de* $G(D)$ *soit égale à* $D \cap F$ *est de codimension* 1,

alors D *est complet pour la distance de Carathéodory, et plus généralement pour toute distance invariante.*

Enfin, on déduit du théorème 5.4. et du théorème 2.1. le résultat suivant (on ne suppose rien sur les éléments de la base).

THÉORÈME 6.4. — *Soit* D_1 *(resp.* D_2*) un domaine de Reinhardt borné d'un espace de Banach complexe à base* E_1 *(resp.* E_2*) muni d'une base* $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *(resp.* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$*). Supposons que le sous-espace vectoriel* F_1 *de* E_1 *(resp.* F_2 *de* E_2*) tel que* $G(D_1).0 = D_1 \cap F_1$ *(resp.* $G(D_2).0 = D_2 \cap F_2$*) est de codimension* 1, *et que* D_1 *et* D_2 *soient analytiquement isomorphes. Alors il existe une famille de nombres réels strictement positifs* $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *et une permutation* σ *de* $\mathbf{N}$ *telle que l'application linéaire* φ *définie par*

$$\varphi(e_n) = c_n f_{\sigma(n)}$$

soit un isomorphisme linéaire de D_1 *sur* D_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BRAUN, W. KAUP and H. UPMEIER, On the automorphisms of circular and Reinhardt domains in complex Banach spaces, *Manuscripta Math.*, 25 (1978), 97-133.

[2] E. CARTAN, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11 (1936), 116-162.

[3] H. CARTAN, Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés, *Math. Ann.*, 106 (1932), 540-576.

[4] H. CARTAN, *Sur les groupes de transformations analytiques*, Hermann, Paris, 1935.

[5] L. HARRIS, Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces, in Proceedings on infinite dimensional holomorphy, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, n° 364 (1974), 13-40.

[6] L. HARRIS, Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces, in *Advances in holomorphy*, North-Holland, Amsterdam, 1979, 345-406.

[7] L. HARRIS and W. KAUP, Linear algebraic groups in infinite dimensions, *Illinois Journal of Maths.*, 21 (1977), 666-674.

[8] W. KAUP, Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds, *Math. Ann.*, 228 (1977), 39-64.

[9] O. LOOS, Bounded symmetric domain and Jordan pairs, *Mathematical lectures*, University of California, Irvine, 1978.

[10] L. STACHO, A short proof of the fact that biholomorphic automorphisms of the unit ball in certain L^p-spaces are linear, *Acta Sci. Math.*, 41 (1979), 381-383.

[11] T. SUNADA, Holomorphic equivalence problem for bounded Reinhardt domain, *Math. Ann.*, 235 (1978), 111-128.

[12] P. THULLEN, Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpen, *Math. Ann.*, 104 (1931), 244-259.

[13] E. VESENTINI, Variations on a theme of Caratheodory, *Ann. scuola Norm. Sup. Pisa*, 4e serie, 6 (1979), 39-68.

[14] J.-P. VIGUÉ, Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 9 (1976), 203-282.

[15] J.-P. VIGUÉ, Automorphismes analytiques des produits continus de domaines bornés, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 11 (1978), 229-246.

[16] J.-P. VIGUÉ, Frontière des domaines bornés cerclés homogènes. *C.R.A.S.*, Paris, 288 A (1979), 657-660.

[17] J.-P. VIGUÉ, Sur la convexité des domaines bornés cerclés homogènes. Séminaire Lelong-Skoda, *Lecture Notes*, Springer-Verlag, Berlin, n° 822 (1980), 317-331.

[18] J.-P. VIGUÉ, Sur la décomposition d'un domaine borné symétrique en produit continu de domaines bornés symétriques irréductibles, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 14 (1981), 453-463.

[19] J.-P. VIGUÉ et J. ISIDRO, Sur la topologie du groupe des automorphismes analytiques d'un domaine cerclé borné, *Bull. Sc. math.*, 2e série, 106 (1982), 417-426.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1983.

Jean-Pierre VIGUÉ,
Université de Paris VI
Mathématiques.
(Tour 45-46; 5e étage)
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.