Annales de l'institut Fourier

Noël Lohoué

Jacques Peyrière

Majoration de la transformée de Fourier de certaines mesures

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 2 (1983), p. 115-122

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_115_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 115-122.

MAJORATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DE CERTAINES MESURES

par N. LOHOUE et J. PEYRIERE

1. Introduction.

Ce travail reprend un article de L. Corwin et F. P. Greenleaf [1]. Introduisons le problème et quelques notations.

Si p est un polynôme réel à m variables et de degré ℓ supérieur à 2 on définit une distribution tempérée μ_p sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ par la formule

$$\langle \mu_p, f \rangle = \int_{\mathbf{R}^m} f(x,p(x))\, dx \quad (f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R})).$$

Il s'agit d'étudier la transformée de Fourier $\hat{\mu}_p$ et, en particulier, de savoir quand cette distribution est définie par une fonction localement sommable.

L. Corvin et F. P. Greenleaf, dans l'article précité, ont étudié le cas où le gradient de la partie homogène de plus haut degré de p ne s'annule qu'en 0. Ici, nous envisageons le cas où ce gradient peut s'annuler. Nous obtenons en particulier le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soit q un polynôme réel homogène de degré ℓ à m variables $(3 \leqslant m < \ell)$ tel qu'en chaque point de la sphère unité S_{m-1} où q' s'annule, la restriction de q'' à l'espace tangent à S_{m-1} en ce point soit non dégénérée. Alors, si p est un polynôme tel que le degré de $p - q$ soit inférieur ou égal à $\ell - 2$, $\hat{\mu}_p$ est une fonction localement intégrable.*

On a la même conclusion dans le cas $m = 2$, $\ell \geqslant 5$, $d^0(p-q) \leqslant \ell - 3$.

On décompose le polynôme p en composantes homogènes :

$$p = q + \sum_{j=0}^{\ell-1} p_j$$

(q de degré ℓ, p_j nul ou de degré j). On note ℓ' le degré du polynôme $p-q$ et l'on pose $\lambda = \sup(\ell',1)$.

Une modification de la technique de L. Corwin et F. P. Greenleaf permet d'obtenir les résultats suivants dont le théorème énoncé plus haut est un corollaire.

PROPOSITION 1. — *Si l'on a* $\int_{S_{m-1}} |\nabla s|^{-m\theta}\, d\sigma_{m-1} < \infty$, $\theta\ell \geqslant 2$ *et* $\ell' \leqslant \ell - \frac{1}{\theta}$ *alors la distribution* $\hat{\mu}_p$ *coïncide sur l'ouvert* $\{(u,v)\in \mathbf{R}^m\times\mathbf{R}; v\neq 0\}$ *avec une fonction continue.*

PROPOSITION 2. — *On suppose que l'on a* $\int_{S_{m-1}} |\nabla q|^{-m\theta}\, d\sigma_{m-1} < \infty$ *et* $\int_{S_{m-1}} |\nabla q|^{-(m-1)\theta'}|q|^{-1/\ell}\, d\sigma_{m-1} < \infty$.

1\. *Si l'on a* $\theta\ell \geqslant 2$, $\theta\left(1+\frac{\ell}{m}\right) > 1$ *et*

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \ell\text{-}\sup\left(1/\theta, 1/\theta', \left[\theta\left(1+\frac{\ell}{m}\right)-1\right]^{-1}\right),$$

alors il existe $C>0$ *tel que, pour tout* (u,v) *dans* $\mathbf{R}^m \times (\mathbf{R}\backslash\{0\})$, *on ait*

$$|\hat{\mu}_p(u,v)| \leqslant C\left[1+|v|^{-m/\ell}+\left(1+\frac{|u|}{|v|}\right)^{m/(\ell-\lambda)}+\left(1+\frac{|u|}{|v|}\right)^{(m-1)/(\ell-\lambda)}|v|^{-1/\ell}\right].$$

2\. *Si l'on a* $\theta\ell \geqslant 2$, $\theta'\ell \geqslant 2$, $\theta' \geqslant \frac{m}{\ell - m}(1-\theta)$ *et*

$$1 \leqslant \lambda \leqslant \ell\text{-}\sup(1/\theta, 1/\theta'),$$

alors il existe $C>0$, *tel que, pour tout* (u,v) *dans* $\mathbf{R}^m \times (\mathbf{R}\backslash\{0\})$, *on ait*

$$|\hat{\mu}_p(u,v)| \leqslant C\left[1+|v|^{-m/\ell}+\left(1+\frac{|u|}{|v|}\right)^{(m-\ell)/(\ell-\lambda)}|v|^{-1}+\left(1+\frac{|u|}{|v|}\right)^{(m-1)/(\ell-\lambda)}|v|^{-1/\ell}\right].$$

2. Démonstration de la proposition 1.

Soit χ une fonction indéfiniment différentiable de $\mathbf{R}^+$ dans $[0,1]$, valant 0 au voisinage de 0 et 1 sur l'intervalle $[1,+\infty[$. On définit un champ de vecteurs w sur $\mathbf{R}^m$ ainsi :

$$w(x) = -|x|\chi(|x|)|\nabla q(x')|^{\alpha-1}\nabla q(x')$$

où l'on a posé $x' = x/|x|$ et où α est un nombre supérieur ou égal à 1 que l'on choisira plus tard.

On pose $\gamma(t,x) = x + itw(x)$ pour $(t,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$. On obtient ainsi une application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{C}^m$. On a

$$\gamma^*(dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_m) = \det(\mathrm{I} + itw'(x))\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m$$
$$+ i\,dt \wedge \sum_{j=1}^{m} \xi_j(t,x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m.$$

Puisque α est supérieur à 1, les coefficients de cette forme sont bornés.

Posons, pour $z \in \mathbf{C}^m$, $u \in \mathbf{R}^m$ et $v \in \mathbf{R}$, $\varphi(z,u,v) = u.z + vp(z)$. Nous allons montrer que pour $\delta > 0$ assez petit et pour $v > 0$, l'intégrale

$$\int_{\gamma(\delta,\mathbf{R}^m)} e^{-i\varphi(z,u,v)}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m$$

existe et est égale à $\hat{\mu}(u,v)$.

Notons M le plus grand des deux nombres

$$\sup_{x \in S_{m-1}} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|q'''(x + itw(x))\|$$

et

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant \ell} \sup_{x \in S_{m-1}} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\nabla p_j(x + itw(x))|.$$

On a, si $|x| \geqslant 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\operatorname{Re} - iq(x + itw(x)) \leqslant t\nabla q(x).w(x) + \frac{\mathrm{M}}{6} t^3 |x|^{\ell-3} |w(x)|^3$$
$$\leqslant -t|x|^{\ell}|\nabla q(x')|^{\alpha+1} + \frac{\mathrm{M}}{6} t^3 |x|^{\ell} |\nabla q(x')|^{3\alpha}$$

d'où, dans les mêmes conditions,

$$\operatorname{Re} - ip(x + itw(x)) \leqslant -t|x|^{\ell}|\nabla q(x')|^{\alpha+1}\left(1 - \frac{\mathrm{M}t^2}{6}|\nabla q(x')|^{2\alpha-1}\right)$$
$$+ \mathrm{M}t|x|^{\ell'}|\nabla q(x')|^{\alpha}.$$

Posons $\delta^2 = \inf\left(1{,}3/\mathrm{M} \sup_{x' \in S_{m-1}} |\nabla q(x')|^{2\alpha-1}\right)$. Alors, pour $0 \leqslant t \leqslant \delta$, $|x| \geqslant 1$, $v > 0$ et $u \in \mathbf{R}^m$, on a

$$\operatorname{Re} - i\varphi(x+itw(x),u,v) \leqslant -\frac{1}{2} vt|x|^{\ell}|\nabla q(x')|^{\alpha+1} + t(|u|+\mathrm{M}v)|x|^{\lambda}|\nabla q(x')|^{\alpha}.$$

Lemme. — *Il existe* $\mathrm{C} > 0$ *tel que si* $\mathrm{A} > 0$, $\mathrm{B} > 0$, $\omega > 0$ *et* $\alpha \geqslant \dfrac{\lambda}{\ell - \lambda}$ *on a*

$$\int_0^\infty e^{\mathrm{A}r^\lambda\omega^\alpha - \mathrm{B}r^\ell\omega^{\alpha+1}} r^m \frac{dr}{r} \leqslant \mathrm{C}\left[\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}\omega}\right)^{\frac{m}{\ell-\lambda}} e^{\mathrm{C}(\mathrm{A}^\ell\mathrm{B}^{-\lambda})^{\frac{1}{\ell-\lambda}}\omega^{\alpha-\frac{\lambda}{\ell-\lambda}}} + (\mathrm{B}\omega^{1+\alpha})^{-\frac{m}{\ell}}\right].$$

En effet, $\mathrm{A}r^\lambda\omega^\alpha - \mathrm{B}r^\ell\omega^{\alpha+1}$ est maximum pour $\left(\dfrac{\lambda\mathrm{A}}{\ell\mathrm{B}\omega}\right)^{\frac{1}{\ell-\lambda}}$ et vaut alors $\left(\dfrac{\lambda}{\ell}\right)^{\frac{\lambda}{\ell-\lambda}}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\ell}\right)\mathrm{A}^{\frac{\ell}{\ell-\lambda}}\mathrm{B}^{-\frac{\lambda}{\ell-\lambda}}\omega^{\alpha-\frac{\lambda}{\ell-\lambda}}$, donc

$$\int_0^\infty e^{\mathrm{A}r^\lambda\omega^\alpha - \mathrm{B}r^\ell\omega^{\alpha+1}} r^m \frac{dr}{r} \leqslant \frac{1}{m}\left(\frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{B}\omega}\right)^{\frac{m}{\ell-\lambda}} e^{\mathrm{C}(\mathrm{A}^\ell\mathrm{B}^{-\lambda})^{\frac{1}{\ell-\lambda}}\omega^{\alpha-\frac{\lambda}{\ell-\lambda}}} + \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\mathrm{B}r^\ell\omega^{\alpha+1}} r^m \frac{dr}{r},$$

d'où le lemme.

Remarquons que lorsque ω est petit, c'est le second terme qui est prépondérant. L'inégalité $\alpha \geqslant \dfrac{\lambda}{\ell - \lambda}$ entraîne, en effet, $\dfrac{m}{\ell-\lambda} \leqslant \dfrac{(1+\alpha)m}{\ell}$.

Proposition. — *Si l'on a*

$$\theta\ell \geqslant 2, \quad \ell' \leqslant \ell - \frac{1}{\theta} \quad \textit{et} \quad \int_{S_{m-1}} |\nabla q|^{-m\theta}\, d\sigma_{m-1} < \infty,$$

alors la fonction $\mathrm{F}(u,v) = \displaystyle\int_{\gamma(\delta,\mathbf{R}^m)} e^{-i\varphi(z,u,v)}\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m$ *est continue sur l'ouvert* $\{(u,v) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; v > 0\}$.

Cela résulte des résultats précédents : on peut choisir α tel que l'on ait les inégalités suivantes : $\alpha \geqslant 1$, $\alpha \geqslant \dfrac{\lambda}{\ell - \lambda}$, $1 + \alpha \leqslant \theta\ell$.

PROPOSITION. — *Les hypothèses étant les mêmes que pour la proposition précédente,* F *et* $\hat{\mu}_p$ *coïncident sur l'ouvert* $\{(u,v) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; v>0\}$.

Pour démontrer ceci, considérons une fonction f, C^∞ à support compact dans $\{(u,v) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}; v>0\}$. Soit B_R la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbf{R}^m$. On doit montrer que $\langle F,f\rangle - \langle \hat{\mu}_p, f\rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned}\langle F,f\rangle - \langle \hat{\mu}_p, f\rangle &\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma(\delta,B_R)} \hat{f}(z,p(z))\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m - \int_{B_R} \hat{f}(x,p(x))\, dx\right)\\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(\{(t,x);0\leqslant t\leqslant\delta,|x|=R\})} \hat{f}(z,p(z))\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m .\end{aligned}$$

Soit κ un entier supérieur à $m/2$, on a

$$|\hat{f}(\zeta)| \leqslant \frac{C}{(1+|\zeta|^2)^\kappa} \exp \max\{\zeta . y; y \in \text{support}(f)\} \quad \text{pour} \quad \zeta \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}.$$

On a donc, si $z = x + itw(x)$,

$$|\hat{f}(z,p(z))| \leqslant \frac{C}{(1+|x|^2)^\kappa} \exp(At|x|^\lambda|\nabla q(x')|^\alpha - Bt|x|^\ell|\nabla q(x')|^{\alpha+1})$$

où A, B, C dépendent de f mais pas de x.

Par suite

$$\left|\int_{\gamma(\delta,B_R)} \hat{f}(z,p(z))\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m - \int_{B_R} \hat{f}(x,p(x))\, dx\right|$$
$$\leqslant \frac{CR^m}{(1+R^2)^\kappa} \int_0^\delta dt \int_{S_{m-1}} e^{AtR^\lambda|\nabla q(x)|^\alpha - BtR^\ell|\nabla q(x)|^{\alpha+1}}\, d\sigma_{m-1}(x).$$

Mais on a $\sup_{\omega>0}(AtR^\lambda\omega^\alpha - BtR^\ell\omega^{\alpha+1}) \leqslant CtA^{1+\alpha}B^{-\alpha}R^{\lambda-\alpha(\ell-\lambda)}$ d'où le résultat.

3. Démonstration de la proposition 2.

Nous allons majorer $\hat{\mu}(u,v)$ lorsque v est positif. On pose

$$R(u,v,x') = \sup\left(1, \left(\frac{4(|u|+Mv)}{v}\right)^{\frac{1}{\ell-\lambda}} |\nabla q(x')|^{-\tau}\right) \quad (u \in \mathbf{R}^m, v>0, x' \in S_{m-1}),$$

τ étant un nombre à choisir plus tard. On écrit

$$\hat{\mu}(u,v) = \int_{|x|\leqslant 1} e^{-i\varphi(x,u,v)}\,dx + \int_{1\leqslant|x|\leqslant R(u,v,x')} e^{-i\varphi(x,u,v)}\,dx$$
$$+ \int_{\gamma([0,\delta]\times\{x;\,|x|=R(u,v,x')\})} e^{-i\varphi(z,u,v)}\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m$$
$$+ \int_{\gamma(\delta,\{x;\,|x|>R(u,v,x')\})} e^{-i\varphi(z,u,v)}\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m .$$

Désignons par $I_j(u,v)$ $(j=1,2,3,4)$ les quatre intégrales précédentes. Dans la suite C désigne un nombre indépendant de u et v.

Évaluons I_4 : on a

$$|I_4(u,v)| \leqslant C \int_{|x|\geqslant R(u,v,x')} e^{-\frac{1}{2}v\delta|x|^{\ell}|\nabla q(x')|^{\alpha+1}+\delta(|u|+Mv)|x|^{\lambda}|\nabla q(x')|^{\alpha}}\,dx .$$

Si l'on choisit τ supérieur ou égal à $1/(\ell-\lambda)$, on a

$$|I_4(u,v)| \leqslant C \int_{|x|\geqslant R(u,v,x')} \exp\left(-\frac{\delta v}{4}|x|^{\ell}|\nabla q(x')|^{\alpha+1}\right) dx$$

d'où

$$|I_4(u,v)| \leqslant C v^{-\frac{m}{\ell}} \int_{S_{m-1}} |\nabla q(x')|^{-\frac{m(\alpha+1)}{\ell}}\,d\sigma_{m-1}(x') .$$

Estimons maintenant I_3. On a

$$|I_3(u,v)| \leqslant C \int_0^{\delta}\int_{S_{m-1}} (\exp\text{-}tv^{-\frac{\lambda}{\ell-\lambda}}(|u|+Mv)^{\frac{\ell}{\ell-\lambda}}|\nabla q(x')|^{\alpha+1-\tau\ell})$$
$$R(u,v,x')^m|\nabla q(x')|^{\alpha+1-m}\,dt\,d\sigma(x') .$$

Deux cas se présentent selon le signe de $\alpha + 1 - \tau\ell$.

Dans le cas $\alpha + 1 \geqslant \tau\ell$ on a

$$|I_3(u,v)| \leqslant C\left(\frac{|u|+Mv}{v}\right)^{\frac{m}{\ell-\lambda}} \int_{S_{m-1}} |\nabla q(x')|^{\alpha-(\tau+1)m+1}\,d\sigma_{m-1}(x'),$$

autrement, on a

$$|I_3(u,v)| \leqslant C v^{\frac{\lambda-m}{\ell-\lambda}}(|u|+Mv)^{\frac{m-\ell}{\ell-\lambda}} \int_{S_{m-1}} |\nabla q(x')|^{\tau(\ell-m)-m}\,d\sigma_{m-1}(x') .$$

On estime I_2 de la même manière que dans [1], pp. 693-694. On a

$$I_2(u,v) = \int_{S_{m-1}} \left(\int_1^{R(u,v,x')} e^{-i\varphi(rx',u,v)} r^{m-1}\, dr \right) d\sigma(x').$$

On pose

$$T(x',\beta) = \left\{ r ; \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| < \beta \right\},$$

alors

$$|T(x',\beta)| \leqslant C \left| \frac{\beta}{vq(x')} \right|^{1/(\ell-1)}$$

d'où

$$\left| \int_{T(x',\beta) \cap [1,R(u,v,x')]} e^{-i\varphi(rx',u,v)} r^{m-1}\, dr \right| \leqslant C R(u,v,x')^{m-1} \left| \frac{\beta}{vq(x')} \right|^{\frac{1}{\ell-1}}.$$

D'autre part, si $]a,b[$ est un intervalle contenu dans

$$[1,R(u,v,x')] \cap \complement T(x',\beta)$$

et sur lequel $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{r^{m-1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial r}} \right)$ ne change pas de signe, on a

$$\left| \int_a^b e^{-i\varphi(rx',u,v)} r^{m-1}\, dr \right| \leqslant 4 \frac{R(u,v,x')^{m-1}}{\beta}.$$

Par suite

$$\int_{\complement T(x',\beta) \cap [1,R(u,v,x']} e^{-i\varphi(rx',u,v)} r^{m-1}\, dr \leqslant C \frac{R(u,v,x')^{m-1}}{\beta}.$$

En choisissant β convenablement, on obtient

$$|I_2(u,v)| \leqslant C \int R(u,v,x')^{m-1} |vq(x')|^{-1/\ell}\, d\sigma(x')$$

d'où

$$|I_2(u,v)| \leqslant C \left(\frac{|u| + Mv}{v} \right)^{\frac{m-1}{\ell-\lambda}} v^{-\frac{1}{\ell}} \int_{S_{m-1}} |\nabla q(x')|^{-\tau(m-1)} |q(x')|^{-\frac{1}{\ell}}\, d\sigma(x').$$

On obtient la proposition 2 en collectant toutes ces estimations et en s'assurant que les hypothèses permettent de choisir α et τ convenablement.

Le théorème est une conséquence des propositions 1 et 2 (1.) : les conditions d'intégrabilité sont satisfaites dès que l'on a $\theta < \frac{m-1}{m}$ et $\theta' < 1 - \frac{2}{(m-1)\ell}\cdot$

4. Remarques.

Les propositions 1 et 2 sont susceptibles d'autres applications. En voici deux.

On suppose $m = 2$ et l'on considère un polynôme q homogène de degré ℓ. On note d l'ordre maximum d'annulation du gradient de q sur S_1. On suppose que l'on a $d \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 4d + 1$. Si p est un polynôme tel que $d^0(p-q) \leqslant \ell - 2d - 1$, alors $\hat{\mu}_p$ est une fonction localement intégrable.

On considère le cas $m = 3$ et $q(x,y,z)=(y^4-2x^2z^2)(x^2+y^2+z^2)^k$. Alors si $k \geqslant 1$ et $d^0(p-q) \leqslant 2k+1$, $\hat{\mu}_p$ est une fonction localement intégrable. Dans ce cas l'hypothèse de non dégénérescence de q'' n'est pas satisfaite et les conditions d'intégrabilité sont $\theta < \frac{4}{9}$ et $\theta' < \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2k+4}\right)\cdot$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Corwin and F. P. Greenleaf, Singular Fourier integral operators and representation of nilpotent Lie groups, *Comm. Pure Appl. Math.*, 31 (1975), 681-705.

[2] J. Dixmer, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents IV, *Canadian J. Math.*, 11 (1959), 321-334.

Manuscrit reçu le 23 juin 1982.

N. Lohoue et J. Peyrière,
Université de Paris-Sud
Équipe de recherche associée au CNRS
(296)
Analyse harmonique
Mathématique (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex.