ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Pseudo-laplaciens. I

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 3 (1982), p. 275-286

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_275_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 3 (1982), 275-286

PSEUDO-LAPLACIENS I

par Yves COLIN DE VERDIERE

P. Cartier [3], puis H. Haas [9] ont calculé numériquement les premières valeurs propres du laplacien sur les fonctions $SL_2(\mathbf{Z})$-automorphes sur le demi-plan de Poincaré H. Dans la table de Haas, relative au problème de Neumann pour le demi-domaine fondamental $D = \{z \in H \mid 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2}, |z| \geqslant 1\}$, apparaissent les $s(1-s)$ où s est l'un des premiers zéros de la fonction zêta de Dedekind, $\zeta_K(s)$, du corps $K = \mathbf{Q}(j)$. Comme $\zeta_K(s)$ contient la fonction $\zeta(s)$ de Riemann en facteur, on a cru ainsi pouvoir démontrer l'hypothèse de Riemann en arguant du fait que les valeurs propres d'un opérateur autoadjoint sont réelles. Malheureusement, il est vite apparu [4] qu'on n'avait pas affaire à de vraies valeurs propres ; car cela était incompatible numériquement avec la formule des traces de Selberg et avec les relations entre les coefficients de Fourier résultant de la théorie des opérateurs de Hecke. C'est finalement D. Hejhal [4] qui a éclairci le mystère : les fonctions propres associées à ces zéros de ζ_K ne sont pas en fait C^∞ sur H, mais admettent au point $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, coin du domaine fondamental D des singularités logarithmiques difficilement décelables lors d'un calcul numérique avec des conditions aux limites du type Neumann. Plus précisément, Hejhal a introduit les notions de pseudo-fonctions propres et de pseudo-valeurs propres suivantes :

DEFINITION. — *φ est une pseudo-fonction propre associée à la pseudo-valeur propre λ si :*

i) $\varphi \in L^2(SL_2(\mathbf{Z})\backslash H)$

ii) $\Delta\varphi = \lambda\varphi + \delta(j)$

où $\delta(j)$ est la masse de Dirac au point j.

Il démontre alors que les pseudo-valeurs propres sont les $s(1-s)$ telles que $\zeta_K(s) = 0$.

Un problème naturel est alors de construire des *pseudo-laplaciens*, i.e. des opérateurs autoadjoints ayant pour domaine un sous-espace de $L^2(SL_2(\mathbf{Z})\backslash H)$ dont les pseudo-valeurs propres d'Hejhal soient de vraies valeurs propres.

Dans ces 2 articles, nous présentons deux tentatives dans cette direction, en mettant en avant les deux propriétés importantes des pseudo-fonctions propres de Hejhal :

(A) Elles possèdent une singularité logarithmique en j.

(B) Le zéro-ème coefficient de Fourier de ces fonctions est nul sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right]$.

La propriété (A) donne lieu aux constructions de ce I, alors que (B) sera utilisée en II [1].

Précisons tout de suite que la première tentative se solde par un résultat peu encourageant : si $\zeta_K(s) = 0$ *et* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, $s(1-s)$ est valeur propre d'un des opérateurs $\Delta_{\alpha, j}$ que nous construisons, mais α dépend sans doute du zéro choisi.

Dans ce I, nous étudions des cas particuliers du problème suivant : construire sur une variété riemannienne complète X des extensions de $\Delta_{\restriction C_0^\infty(\Omega)}$ où Ω est un ouvert dense de X : plus précisément, nous nous intéressons au cas où $\Omega = X \backslash \{x_0\}$, qui se généraliserait aisément à $\Omega = X\backslash Y$ où Y est une sous-variété lisse de X.

La réponse obtenue est assez surprenante et nous semble ne pas avoir été considérée dans la littérature (voir cependant [1] et [8]) : si $\dim(X) = 2$ ou 3, il existe d'autres extensions que le laplacien usuel, unique extension autoadjointe [7] de $\Delta_{\restriction C_0^\infty(X)}$: cela est lié au fait que $\delta(x_0)$ est dans l'espace de Sobolev $H^{-2}(X)$. On met ainsi en évidence un phénomène du type cercle-limite, classique dans la théorie des problèmes de Sturm-Liouville singuliers ([5] pp. 225).

(1) A paraître dans : Annales Inst. Fourier, 33, 2 (1983).

Après avoir décrit les pseudo-laplaciens Δ_{α,x_0}, nous montrons comment calculer leur spectre. Nous expliquons ensuite comment cela s'applique aux fonctions automorphes.

1. Les pseudo-laplaciens Δ_{α,x_0}.

Soit X une variété riemannienne complète, C^∞, de dimension d, Δ désigne l'opérateur différentiel de Laplace-Beltrami associé à la métrique riemannienne (l'écriture Δf signifiera toujours qu'on prend le laplacien de f au sens des distributions sur X). On notera Δ_∞ l'unique extension autoadjointe de $\Delta_{\restriction C_0^\infty(X)}$ sur l'espace de Hilbert $L^2(X, dx)$ où dx est l'élément de volume riemannien. Le domaine de Δ_∞ est l'espace de Sobolev $H^2(X)$ des fonctions L^2 dont le laplacien est L^2 (cf. [7]). A tout point x_0 de X, on associe l'opérateur symétrique Δ_{x_0} de domaine $C_0^\infty(X\backslash\{x_0\})$ et tel que $\Delta_{x_0} f = \Delta f$. On se propose d'étudier les extensions autoadjointes de Δ_{x_0} ; pour cela, il n'est peut-être pas inutile de rappeler quelques faits de la théorie abstraite des opérateurs symétriques (voir par exemple [13]).

Si $(A, D(A))$ est un opérateur symétrique de domaine dense dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et si $\langle\langle \cdot \mid \cdot \rangle\rangle = \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{H}} + \langle A^* \cdot \mid A^* \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ désigne le produit scalaire naturel sur $D(A^*)$, on a la décomposition orthogonale pour $\langle\langle\ \rangle\rangle : D(A^*) = D(\overline{A}) \oplus \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ où $\mathcal{H}_\pm = \operatorname{Ker}(A^* \pm i)$. On a alors une bijection entre les isomorphismes unitaires ω de $\mathcal{H}_+$ sur $\mathcal{H}_-$ et les extensions autoadjointes (A_ω, D_ω) de A donnée par : $D_\omega = D(\overline{A}) \oplus$ (graphe de ω) et $A_\omega = A^*_{\restriction D_\omega}$.

En particulier si A_∞ est une extension autoadjointe particulière de A et si $\dim(D(A^*)/D(A_\infty)) = n$, les extensions autoadjointes de A sont paramétrées par $U(n, \mathbf{C})$.

THEOREME 1. — *Si* $d \geqslant 4$, *la seule extension autoadjointe de* Δ_{x_0} *est* Δ_∞ ; *si* $d = 2$ *ou* 3, *on a* $n(\Delta_{x_0}) = 1$ *et les extensions autoadjointes de* Δ_{x_0} *sont les* Δ_{α,x_0}, *avec* $\alpha \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$, *caractérisés par* : $D(\Delta_{\alpha,x_0}) = \{f \in D(\Delta^*_{x_0}) \mid \exists \lambda \in \mathbf{C}$ *tel que, au voisinage de* x_0, *on ait* $f(x) = \lambda(\sin\alpha \,.\, G_d(r) + \cos\alpha) + o(1)\}$ *où*

$D(\Delta^*_{x_0}) = H^2(X\backslash\{x_0\}) = \{f \in L^2(X) \mid \exists C \in \mathbf{C}, \Delta f - C\delta(x_0) \in L^2(X)\}$,

r est la distance de x à x_0, $G_2(r) = \dfrac{\log r}{2\pi}$, $G_3(r) = \dfrac{-1}{4\pi r}$ et alors $\Delta_{\alpha, x_0} f = \Delta f - C\delta(x_0)$.

En particulier, $\Delta_{0,x_0} = \Delta_\infty$ et si $f \in H^2(X)$ et $f(x_0) = 0$, alors $f \in D(\Delta_{\alpha, x_0})$ pour tout α.

Preuve. – Si $\widetilde{\Delta}_{x_0}$ est le laplacien au sens des distributions sur $X\backslash\{x_0\}$, on voit facilement que

$$D(\Delta^*_{x_0}) = \{f \in L^2(X) \mid \widetilde{\Delta}_{x_0} f \in L^2(X)\} = H^2(X\backslash\{x_0\}).$$

Donc $\Delta f = \varphi + \psi$ avec $\varphi \in L^2(X)$ et $\mathrm{Supp}(\psi) \subseteq \{x_0\}$. Comme $\psi \in H^{-2}(X)$, on voit que, si $d \geqslant 4$, $\psi = 0$ et $\overline{\Delta}_{x_0} = \Delta_\infty$, alors que si $d = 2$ ou 3, $\psi = C\delta(x_0)$; on a alors

$$n(\Delta_{x_0}) = \dim(H^2(X\backslash\{x_0\})/H^2(X)) = 1 :$$

nous allons donner une description explicite des extensions autoadjointes de Δ_{x_0} qui sont paramétrées par $U(1) \simeq \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$, à l'aide du :

LEMME 1. – *Si $f \in D(\Delta^*_{x_0})$ ($d = 2$ ou 3), on a, au voisinage de x_0, $f(x) = C_1 G_d(r) + C_2 + o(1)$.*

Preuve du lemme 1. – En effet, si, en coordonnées polaires centrées en x_0, on a $dx = r^{d-1}\theta(r, \omega)\, dr\, d\omega$ ($\omega \in S^{d-1}$), pour une fonction de r, on a : $\Delta f = -\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \left(\dfrac{d-1}{r} + \dfrac{\theta'_r}{\theta}\right)\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)$ et comme $\theta'_r(0, \omega) = 0$, on voit que $\Delta G_d(r) + \delta(x_0) \in L^2(X)$. Donc, si $\Delta f + C_1\delta(x_0) \in L^2(X)$, on voit que $f - C_1 G_d(r) \in H^2(X)$ et donc, d'après les théorèmes de plongement de Sobolev, $f - C_1 G_d(r)$ est une fonction continue.

Dans la situation présente où les opérateurs Δ_{x_0} et $\Delta^*_{x_0}$ sont réels (i.e. stables par $f \mapsto \overline{f}$), et où $n(\Delta_{x_0}) = 1$, les extensions autoadjointes ont pour domaine les sous-espaces E réels tels que $D(\overline{\Delta}_{x_0}) \subset E \subset D(\Delta^*_{x_0})$ et $\dim D(\Delta^*_{x_0})/\dim E = 1$: ce sont évidemment les sous-espaces introduits dans le théorème, car $G_d(r)$ et 1 forment une base réelle d'un supplémentaire de $D(\overline{\Delta}_{x_0})$ dans $D(\Delta^*_{x_0})$ ($f \in D(\overline{\Delta}_{x_0})$ implique $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$).

Remarques.

i) La théorie précédente s'applique à des opérateurs moins réguliers que le laplacien, par exemple, dans $\mathbf{R}^3$, $H = \Delta + \frac{c}{r}$ (hamiltonien de l'atome d'hydrogène) avec $x_0 = 0$: il serait alors intéressant de calculer les valeurs propres des $H_{\alpha,0}$.

ii) On peut étendre la théorie précédente au cas où Y est une sous-variété de codimension 2 ou 3 de X, même peut être singulière.

2. Calcul du spectre (X compacte).

On s'intéresse dans ce § uniquement au cas où X est une variété riemannienne compacte de dimension $d = 2$ ou 3. Il est clair que l'injection de $D(\Delta^*_{x_0})$ dans $L^2(X)$ est compacte comme l'est celle de $H^2(X)$ dans $L^2(X)$: les Δ_{α,x_0} sont donc tous à résolvante compacte et à spectre discret s'accumulant vers $+\infty$. On désigne par $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots$. la suite des valeurs propres de Δ_∞ (répétées avec leur multiplicité), par $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base orthonormée de $L^2(X)$ formée de fonctions propres associées aux $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et par E_λ l'espace propre de Δ_∞ de valeur propre λ. Soit, pour $\lambda \in \text{Spectre}(\Delta_\infty)$, $R(\lambda; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}}{\lambda - \lambda_n}$ le noyau distribution de $(\lambda - \Delta_\infty)^{-1}$ (résolvante de Δ_∞), on a le :

LEMME 2. – $R(\lambda; \cdot, x_0) \in D(\Delta^*_{x_0})$; *plus précisément, on a au voisinage de* x_0, $R(\lambda; x, x_0) = G_d(r) + F(\lambda; x_0) + o(1)$ *où* $F(\lambda; x_0)$ *est une fonction méromorphe en* λ, *ayant des pôles (simples) aux* $\lambda \in \text{Spectre}(\Delta_\infty)$ *tels que* E_λ *contienne une fonction non nulle en* x_0. *De plus* $F_{|\mathbf{R}}$ *est strictement décroissante entre les pôles.*

Preuve. – On a $\Delta R(\lambda; \cdot, x_0) = -\delta(x_0) + \lambda R(\lambda; \cdot, x_0)$; or $R(\lambda; \cdot, x_0) = (\lambda - \Delta)^{-1}(\delta(x_0))$ est dans $L^2(X)$ à cause des théorèmes de Sobolev. L'application $\lambda \longmapsto R(\lambda; \cdot, x_0) - R(\mu; \cdot, x_0)$ est méromorphe de $\mathbf{C}$ dans $H^2(X)$ et donc

$$\lambda \longmapsto R(\lambda; x_0, x_0) - R(\mu; x_0, x_0)$$

aussi ; ce qui prouve la méromorphie de F. De plus :

$$\text{Rés}(F(\cdot\,;x_0)\mid\lambda=\lambda_i)=\sum_{\lambda_n=\lambda_i}|\varphi_n(x_0)|^2$$

et
$$\frac{dF}{d\lambda}(\lambda\,;x_0)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\varphi_n(x_0)|^2}{|\lambda-\lambda_n|^2}\,.$$

Remarque. – En général $F(\lambda\,;x_0)$ est un invariant global sur X difficile à calculer ; cependant si X est homogène, $F(\lambda\,;x_0)$ est indépendante de x_0 et on a :

$$F'(\lambda\,;x_0)=-(\text{vol}(X))^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)^2}\,.$$

Ce genre de remarque permet par exemple de calculer F pour $X=(S^3,g_0)$. On remarque que dans ce cas $\lim_{\lambda\to-\infty}F(\lambda\,;x_0)=+\infty$.

THEOREME 2. – *Le spectre de* Δ_{α,x_0} *est composé de :*

1) *L'ensemble des* $\lambda\in\text{Spectre}(\Delta_\infty)$ *tels que* E_λ *contienne une fonction nulle en* x_0, *avec la multiplicité :*

$n(\lambda\,;\alpha)=\dim E_\lambda-1$ *si* E_λ *contient une fonction non nulle en* x_0,

$$n(\lambda\,;\alpha)=\dim E_\lambda+\begin{cases}0 & si\ \ F(\lambda\,;x_0)\neq\text{cotg}\,\alpha\\ 1 & si\ \ F(\lambda\,;x_0)=\text{cotg}\,\alpha\end{cases}$$

dans le cas où toutes les fonctions de E_λ *sont nulles en* x_0.

2) *L'ensemble des* $\lambda\notin\text{Spectre}(\Delta_\infty)$ *tels que* $F(\lambda\,;x_0)=\text{cotg}\,\alpha$: *cela donne lieu à des valeurs propres de multiplicité* 1,

$$\mu_0(\alpha)<\mu_1(\alpha)<\cdots$$

Remarque. – Dans le cas générique où les λ_n sont de multiplicité 1 et aucune φ_n ne s'annule en x_0, on a :

$$\mu_0(\alpha)<\lambda_0=0<\mu_1(\alpha)<\lambda_1<\mu_2(\alpha)<\cdots$$

Mais on peut avoir des situations différentes : si $X=(S^2,g_0)$, on a : $\mu_0(\alpha)<0<\mu_1(\alpha)<2<\mu_2(\alpha)<6<\cdots$ et le spectre de Δ_{α,x_0} est composé en outre des $k(k+1)$ $(k\in\mathbf{N})$ avec la multiplicité $(2k+1)-1=2k$.

Preuve. – Dans le cas où $f\in H^2(X)$ est une fonction propre de Δ_{α,x_0}, c'est aussi une fonction propre de Δ_∞ : on obtient ainsi toutes les fonctions propres de Δ_∞ nulles en x_0.

Dans le cas contraire, quitte à multiplier la fonction propre par un scalaire, on doit avoir : $(\Delta - \lambda) f = - \delta(x_0)$: on en déduit que $f = \mathrm{R}(\lambda, \cdot, x_0)$ et la condition $f \in \mathrm{D}(\Delta_{\alpha, x_0})$ s'écrit alors $\mathrm{F}(\lambda ; x_0) = \operatorname{cotg} \alpha$.

Si $\lambda \in \operatorname{Spectre}(\Delta_\infty)$, cela n'est possible que si $\mathrm{F}(\cdot, x_0)$ n'a pas de pôle en λ, et l'on retrouve la condition $\mathrm{F}(\lambda ; x_0) = \operatorname{cotg} \alpha$. Mettant toutes ces informations ensemble, on peut énoncer le théorème 2.

3. Application aux fonctions automorphes.

On désigne par H le demi-plan de Poincaré :

$$\mathrm{H} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\},$$

on pose $z = x + iy$. Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$ opérant sur H par $\gamma \cdot z = \dfrac{az + b}{cz + d}$ et tel que $\Gamma \backslash \mathrm{H}$ soit de volume fini pour la mesure $\dfrac{dx\, dy}{y^2}$ associée à la métrique hyperbolique de H. On suppose pour simplifier que $\Gamma \backslash \mathrm{H}$ n'a qu'une seule pointe associée au sous-groupe $\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$. L'opérateur Δ de domaine $\mathrm{C}_0^\infty(\Gamma \backslash \mathrm{H})$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2\left(\Gamma \backslash \mathrm{H}, \dfrac{dx\, dy}{y^2}\right)$, on note Δ_∞ sa fermeture : la théorie spectrale de Δ_∞ est bien connue [10], [11] ou [12]. Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on définit les séries d'Eisenstein $\mathrm{E}(z, s)$ par

$$\mathrm{E}(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} [\operatorname{Im} \gamma z]^s ,$$

alors $\mathrm{E}(\cdot, s)$ est une solution Γ-automorphe de

$$(\Delta - s(1 - s))\, \mathrm{E}(\cdot, s) = 0 ,$$

admettant un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ (voir [6] pour une preuve nouvelle de ce résultat), sans pôles sur $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{1}{2}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle $\mathrm{E}(\cdot, s) = \varphi(s)\, \mathrm{E}(\cdot, 1 - s)$ où φ est une fonction que l'on construit à partir de Γ : si $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$, on a $\varphi(s) = \dfrac{\xi(2s - 1)}{\xi(2s)}$ avec $\xi(s) = \pi^{-s/2}\, \Gamma(s/2)\, \zeta(s)$ où ζ est la fonction zêta de Riemann. De plus, si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, $|\varphi(s)| = 1$. Le comportement asymptotique de E quand $y \longmapsto +\infty$ est donné par $\mathrm{E}(z, s) = y^s + \varphi(s) y^{1-s} + \mathrm{O}(e^{-2\pi y})$.

Rappelons alors les résultats principaux de la théorie spectrale de Δ_∞ : pour $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\Gamma\backslash\mathrm{H})$, on pose $\hat{f}(s) = \langle f \mid \mathrm{E}(\cdot, s)\rangle$. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la famille orthonormée (non complète) des fonctions propres (L^2) de Δ_∞ de valeurs propres $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqslant \cdots$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{1}{2} + ir\right) \mathrm{E}\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) dr + \sum_{n=0}^{\infty} \langle f \mid \varphi_n \rangle \varphi_n(z),$$

et cette écriture correspond à une décomposition orthogonale $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H}) = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_d$ selon les spectres continus et discrets de Δ_∞ : elle se prolonge en une isométrie de $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H})$ sur

$$\mathrm{L}^2\left(\mathbf{R}^+, \frac{dr}{\sqrt{2\pi}}\right) \oplus \ell^2(\mathbf{N})$$

et l'on a :

$$\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left|\hat{f}\left(\frac{1}{2} + ir\right)\right|^2 dr + \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f \mid \varphi_n \rangle|^2 .$$

En particulier la résolvante $\mathrm{R}(s) = (s(1-s) - \Delta_\infty)^{-1}$ $\left(\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}, s \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ admet un noyau au sens de Schwartz donné par :

$$\mathrm{R}(s\,; z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{E}\left(z, \frac{1}{2} + ir\right) \mathrm{E}\left(z_0, \frac{1}{2} - ir\right) dr}{s(1-s) - \left(\frac{1}{4} + r^2\right)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(z_0)}}{s(1-s) - \lambda_n} .$$

Cette distribution sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, peut en fait se restreindre $\mathrm{X} \times \{z_0\}$ d'après les règles de calculs des fronts d'onde ; on obtient ainsi une distribution sur X :

$$\mathrm{R}(s, \cdot, z_0) = (s(1-s) - \Delta_\infty)^{-1}(\delta(z_0)) .$$

Cette distribution est en fait dans $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{H})$ car $\delta(z_0) \in \mathrm{H}^{-2}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X}) \cap \mathcal{E}'(\mathrm{X})$, est dans $\mathrm{H}^{-2}(\mathrm{X})$; d'où l'on tire l'estimation $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\left|E\left(z_0, \frac{1}{2} + ir\right)\right|^2}{(1+r^2)^2}\, dr < +\infty$ de la norme $L^2(]0, +\infty[, dr)$ de $\hat{R}(s, \cdot, z_0)(r) = \dfrac{E\left(z_0, \frac{1}{2} - ir\right)}{s(1-s) - \left(\frac{1}{4} + r^2\right)}$. On sait que $R(s, \cdot, z_0)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ dont les seuls pôles dans $\mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}$ sont les $\frac{1}{2} + ir_n$ tels que $\frac{1}{4} + r_n^2$ soit une valeur propre de Δ_∞ ; pour $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, on a : $\hat{R}(s, \cdot, z_0)(r) = \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \dfrac{E\left(z_0, \frac{1}{2} - ir\right)}{(s+\epsilon)(1-s-\epsilon) - \left(\frac{1}{4} + r^2\right)}$. Pour que $\hat{R}$ soit dans L^2 (et donc $R(s, \cdot, z_0)$ aussi si $s(1-s)$ n'est pas valeur propre), il est donc nécessaire et suffisant que $E(z_0, s) = 0$; on peut le voir aussi [4], en montrant que :

$$R(s, \cdot, z_0) = \frac{1}{1-2s} E(z_0, s)\, y^{1-s} + O(e^{-2\pi y}).$$

D'autre part, on voit facilement comme dans le cas compact que, au voisinage de z_0, on a :

$$R(s, z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Log} r + F(s, z_0) + o(1),$$

où $F(\cdot, z_0)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ n'ayant pas de pôles en dehors des s_n tels que $s_n(1-s_n)$ soit valeur propre de Δ_∞. Les remarques précédentes s'appliquent même si le point z_0 est un point elliptique, i.e. point fixe d'un sous-groupe cyclique fini de Γ : localement les fonctions au voisinage de z_0 peuvent se voir comme des fonctions au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$ invariantes par les rotations d'angle $\frac{2\pi}{N} k$ ($k \in \mathbf{Z}$; $N \in \mathbf{N}$ fixé).

On obtient ainsi le résultat suivant :

THEOREME 3. – *Les valeurs propres de* Δ_{α, z_0} *sont données par les mêmes conditions que dans le théorème 2 en remplaçant* *partout* Spectre(Δ_∞) *par valeurs propres de* Δ_∞ *et en ajoutant partout à la condition* $F(s, z_0) = \operatorname{cotg} \alpha$, *la condition simultanée* $E(z_0, s) = 0$.

Et en utilisant la relation $E(j, s) = C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^s . \zeta_K(s)/\zeta(2s)$, on a le :

Corollaire. – *Si* $\Gamma = PSL_2(\mathbf{Z})$, *et* $z_0 = j$, *les valeurs propres de* $\Delta_{\alpha, j}$ *sont les* $s(1-s)$ *telles que, ou bien* $s(1-s)$ *est valeur propre de* Δ_∞ *avec une fonction propre nulle en* j, *ou bien* $\zeta_K(s) = 0$ *et* $F(s, j) = \operatorname{cotg} \alpha$.

Donc si $\zeta_K(s_0) = 0$ *et* $\operatorname{Re}(s_0) = \frac{1}{2}$, comme $F(s_0, j)$ est réel, $s_0(1-s_0)$ est valeur propre de $\Delta_{\alpha_0, j}$ avec $\operatorname{cotg} \alpha_0 = F(s_0, j)$: et comme F n'est pas constante (car elle a des pôles [4]), il est probable que α_0 dépend du zéro s_0 de ζ_K choisi : chacune des pseudo-fonctions propres de Hejhal associée à un zéro de ζ_K sur la droite critique, est donc fonction propre d'un des opérateurs autoadjoint $\Delta_{\alpha, j}$.

On obtient une autre conséquence inattendue :

Theoreme 4. – *Pour presque tout couple* $(z_0, \alpha) \in (\Gamma \backslash H) \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, Δ_{α, z_0} *n'a pas d'autres valeurs propres que les valeurs propres multiples de* Δ_∞.

En effet, on choisit z_0 en dehors de la réunion (de mesure nulle) des zéros des fonctions propres de multiplicité 1 et pour chaque z_0 on choisit α tel que $\operatorname{cotg} \alpha \neq F(s, z_0)$ pour tous les zéros (dénombrable) de $E(z_0, s)$.

En particulier, si $X = X_0 \cup X_1$ où X_1 est une pointe hyperbolique et X_0 compacte avec une métrique générique, Δ_∞ n'aura aucune valeur propre multiple et donc, pour presque tout (α, z_0), Δ_{α, z_0} n'aura aucune valeur propre. On obtient ainsi des opérateurs voisins du laplacien sur une variété hyperbolique d'aire finie, sans aucune valeur propre : ceci peut être intéressant en relation avec la conjecture de Rœlcke qui affirme que toute variété hyperbolique $\Gamma \backslash H$ d'aire finie admet une infinité de valeurs propres : cette propriété semble très instable, et en tout cas dépendre de la nature arithmétique du problème, plutôt que de méthodes d'analyse. Il serait également intéressant de regarder si le théorème 4 ne donne pas accès à des informations sur les valeurs propres multiples de Δ_∞ .

BIBLIOGRAPHIE

[1] Albeverio, Fenstadt, Hoegh-Krohn, *Trans. A.M.S.*, t. 252 (1979), 275-295.

[2] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lecture Notes in Math.*, 194 (1971), Springer.

[3] P. Cartier, Analyse numérique d'un problème de valeurs propres à haute précision (application aux fonctions automorphes), *Preprint I.H.E.S.*, (1978).

[4] P. Cartier, D. Hejhal, Sur les zéros de la fonction zêta de Selberg, *Preprint I.H.E.S.*, (1979).

[5] E. Coddington, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill, (1955).

[6] Y. Colin De Verdiere, Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein, *CRAS*, t. 293 (1981), 361-363.

[7] M. Gaffney, *Ann. of Math.*, 60 (1954), 140-145.

[8] Grossmann, Hoegh-Krohn, Mebkhout, *Comm. Math. Phys.*, 77 (1980), 87-100.

[9] H. Haas, Numerische Berechnung. . . , Diplomarbeit, Heidelberg (1977).

[10] T. Kubota, *Elementary theory of Eisenstein series*, John Wiley, (1973).

[11] S. Lang, $SL_2(\mathbf{R})$, Addison-Wesley (1975).

[12] P. Lax, R. Phillips, Scattering theory for automorphic functions, *Annals of Math. Studies*, 87 (1976).

[13] Reed, B. Simon, *Methods of modern math. physics*, vol. II, Academic Press (1975).

[14] A. VENKOV, *Russian Math. Surveys*, 34 (1979), 79-153.

Manuscrit reçu le 16 novembre 1981.

Yves COLIN DE VERDIERE,
Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Laboratoire de Mathematiques Pures associé au CNRS
Institut Fourier
B.P. 116
38402 – Saint-Martin d'Hères.