Annales de l'institut Fourier

Jean Coquet

Représentation des entiers naturels et suites uniformément équiréparties

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 1 (1982), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_1_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 1 (1982), 1-5

REPRÉSENTATION DES ENTIERS NATURELS ET SUITE UNIFORMÉMENT ÉQUIRÉPARTIES

par Jean COQUET

1. INTRODUCTION

1.1. Enoncé du résultat.

On précise un résultat obtenu dans l'article [2] dont on reprend les notations et définitions. En particulier, $s(n)$ désigne la somme des chiffres de n en base q (q entier $\geqslant 2$) et $\sigma_\alpha(n)$ la α-somme des chiffres de n, autrement dit la somme des chiffres relative au développement du nombre irrationnel α en fraction continue (voir § 1.3). Dans [2], le résultat suivant est obtenu.

THEOREME 1. – *La suite* $xs + y\sigma_\alpha$ *est équirépartie modulo 1 si l'un au moins des nombres* x *et* y *est irrationnel.*

On précise ici que l'équirépartition est uniforme :

THEOREME 2. – *La suite* $xs + y\sigma_\alpha$ *est uniformément équirépartie modulo 1 si l'un au moins des nombres* x *et* y *est irrationnel.*

Rappelons qu'une suite $\lambda : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ est *uniformément équirépartie modulo 1* («well-distributed», [3] p. 40) si pour tout intervalle

$$A \subset [0,1[\,,\ \frac{1}{N}\ \text{Card}\ \{n \in \mathbf{N}\ ;\ t \leqslant n < N + t,\ \{\lambda(n)\} \in A\} \xrightarrow[N\to\infty]{} \ell(A)$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, $\ell(A)$ désignant la longueur de A et $\{u\}$ la partie fractionnaire du réel u.

1.2. Plan de la démonstration.

Comme dans [2], on pose $g(n) = e(xs(n))$, $g'(n) = e(y\sigma_\alpha(n))$ et $G(n) = g(n)\, g'(n)$. D'après le critère de Weyl ([3], p. 41), il s'agit de vérifier que, lorsque l'un au moins des nombres x et y est irrationnel, (1) $\frac{1}{N} \sum_{t \leqslant n < N+t} G(n) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$ uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, sachant déjà que G a une moyenne nulle [2].

On donne de très brèves indications sur la démonstration sans entrer dans le détail des calculs. On distingue encore 2 cas :

– Lorsque $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, g est périodique et

$$G(n) = e(xn + y\,\sigma_\alpha(n))$$

puisque $n \equiv s(n)$ mod. $q-1$.

– Dans le cas contraire, on montre (1) en précisant le comportement pseudo-aléatoire de G.

1.3. Rappels [2].

Soit $[a_0 ; a_1, \ldots, a_k, \ldots]$ le développement de α en fraction continue, soient $q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots$ les dénominateurs des réduites successives de α, déterminés par : $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ et $q_{k+2} = a_{k+2}\, q_{k+1} + q_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Tout entier naturel n s'écrit de manière unique $n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n)\, q_k$ avec :

$$\begin{cases} \epsilon_0(n) \in \{0, \ldots, a_1 - 1\} \\ \text{pour tout } k \in \mathbf{N}^*,\ \epsilon_k(n) \in \{0, \ldots, a_{k+1}\} \\ \text{pour tout } k \in \mathbf{N}^*,\ (\epsilon_k(n) = a_{k+1} \Longrightarrow \epsilon_{k-1}(n) = 0) \end{cases}$$

et $\sigma_\alpha(n)$ est égale à $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n)$ par définition.

Dans le cas où $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, G est *multiplicative relativement à* α, autrement dit : $G(0) = 1$ et $G(n) = \prod_{k=0}^{\infty} G(\epsilon_k(n)\, q_k)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2. CAS OU g EST PERIODIQUE

Lorsque $x(q-1) \in \mathbf{Z}$ et $y \notin \mathbf{Q}$, on montre dans [2] que : $\mu_k = \frac{1}{q_k} \sum_{n<q_k} G(n) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et on en déduit que G a une moyenne nulle.

On montre ① de la manière suivante. Soient $N \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{N}$. On pose $K = \operatorname{Max}\{k \in \mathbf{N}^* ; \epsilon_k(t) \neq \epsilon_k(N+t)\}$ de sorte que $\epsilon_K(N+t) > \epsilon_K(t)$, $A = \sum_{k>K} \epsilon_k(t)\, q_k$, $u = \sum_{k\leqslant K} \epsilon_k(t)\, q_k$, $w = q_K(1+\epsilon_K(t))$. $v = \sum_{k\leqslant K} \epsilon_k(N+t)\, q_k = N + t - A = u + N$, et $M_k = \operatorname{Max}\{|\mu_k|, |\mu_{k-1}|\}$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

On obtient les majorations suivantes :

$$② \left| \sum_{t\leqslant n<N+t} G(n) \right| \leqslant \left| \sum_{u\leqslant m<w} G(m) \right| + \left| \sum_{w\leqslant m<v} G(m) \right|$$

$$③ \left| \sum_{w\leqslant m<v} G(m) \right| \leqslant (\epsilon_K(N+t) - \epsilon_K(t) - 1)\, q_K M_K + \sum_{k<K} \epsilon_k(N+t)\, q_k M_k .$$

En partageant l'intervalle $]u, w[$ à l'aide des points u_j définis pour $0 \leqslant j \leqslant K$ par :

$$u_j = \begin{cases} \sum_{j<k\leqslant K} \epsilon_k(t)\, q_k + (1+\epsilon_j(t))\, q_j & \text{si } \epsilon_j(t) < a_{j+1} \\ \sum_{j<k\leqslant K} \epsilon_k(t)\, q_k + q_{j+1} & \text{si } \epsilon_j(t) = a_{j+1}, \end{cases}$$

on montre la majoration suivante :

$$④ \left| \sum_{u\leqslant m<w} G(m) \right| \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{K} M_{j-1}(u_j - u_{j-1}).$$

De ②, ③, ④, et $\lim_{k\to\infty} M_k = 0$, on déduit ① par des arguments élémentaires.

3. CAS OU g EST PSEUDO-ALEATOIRE

3.1. Suites uniformément pseudo-aléatoires.

Dans [2], il est établi que, lorsque $x(q-1) \notin \mathbf{Z}$, G est pseudo-aléatoire autrement dit, possède une corrélation γ_G définie par : $\gamma_G(h) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} G(n+h)\,\overline{G(n)}$ pour tout $h \in \mathbf{N}$, et vérifiant $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{h<H} |\gamma_G(h)|^2 = 0$.

On va prouver que G est *uniformément pseudo-aléatoire,* autrement dit possède la propriété supplémentaire suivante :

$$\text{(5)} \qquad \gamma_G(h) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t\leqslant n<N+t} G(n+h)\,\overline{G(n)}$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, pour tout $h \in \mathbf{N}$. On en déduit (1) à l'aide du lemme suivant qu'on obtient par des arguments classiques (inégalité de Van der Corput par exemple).

LEMME 1. — *Si* G *est une suite uniformément pseudo-aléatoire, on a :* $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t\leqslant n<N+t} G(n) = 0$, *uniformément par rapport à* $t \in \mathbf{N}$.

3.2. G est uniformément pseudo-aléatoire.

Dans [1], Besineau démontre, lorsque $x(q-1) \in \mathbf{Z}$, le caractère pseudo-aléatoire de $g(n) = e(xs(n))$ en mettant en évidence des partitions de $\mathbf{N}$ conformément au :

LEMME 2. — *Pour tout* $h \in \mathbf{N}^*$, *il existe une partition de* $\mathbf{N}$ *en progressions arithmétiques* $\mathcal{P}_k$, $k \in \mathbf{N}$, *et une suite* (λ_k) *telles que :* $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathcal{P}_k$, $s(n+h) - s(n) = \lambda_k$.

Dans [2], on montre que l'existence de $\gamma_{g'}$ (corrélation de g') tient à l'existence, pour tout $h \in \mathbf{N}^*$, d'une partition de $\mathbf{N}$ en sous-ensembles $\mathcal{G}_j$, $j \in \mathbf{N}$, sur lesquels $\sigma_\alpha(n+h) - \sigma_\alpha(n)$ reste constante. L'indépendance statistique de ces sous-ensembles vis-à-vis des progressions arithmétiques conduit à la relation $\gamma_G(h) = \gamma_g(h)\,\gamma_{g'}(h)$.

Puisque $g'(n+h)\,\overline{g'(n)}$ est constante sur les ensembles $\mathcal{G}_j$, un point essentiel de la preuve de (5) est de montrer que :

(6) $$\delta = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t \leq n < N+t} \chi(n),$$

uniformément par rapport à $t \in \mathbf{N}$, χ étant la fonction caractéristique de $\mathcal{G}_j$ et δ sa densité (dont la valeur est donnée dans [2]). Les ensembles $\mathcal{G}_j$ sont de la forme $\mathcal{E}(r, a) = \{n \in \mathbf{N}\,;\, \Psi_r(n) = a\}$ où $\Psi_r(n) = \sum_{k \leq r} \epsilon_k(n)\, q_k$ et $a < q_{r+1}$. La démonstration de (6) se fait en adaptant à χ les calculs de majoration du paragraphe 2 relatifs à G.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BESINEAU, Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction somme des chiffres, *Acta Arithmetica,* 20 (1972), 401-416.

[2] J. COQUET, G. RHIN, Ph. TOFFIN, Représentations des entiers naturels et indépendance statistique 2, *Annales Institut Fourier,* 31, 1 (1981), 1-15.

[3] L. KUIPERS, H. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences,* Wiley Interscience, New-York, (1974).

Manuscrit reçu le 1er juin 1981
révisé le 15 juillet 1981.

Jean COQUET,
Département de Mathématique
Université de Valenciennes
F – 59326 Valenciennes Cedex.