ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BENT FUGLEDE

Sur les fonctions finement holomorphes

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 4 (1981), p. 57-88

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_4_57_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 4 (1981), 57-88.

SUR LES FONCTIONS FINEMENT HOLOMORPHES

par Bent FUGLEDE

Introduction.

Depuis quelques années divers auteurs ont étudié une généralisation de la notion classique de fonction holomorphe d'une variable complexe. Ces nouvelles fonctions s'appellent fonctions *finement holomorphes* parce qu'elles peuvent être définies dans des *ouverts fins* du plan complexe, c'est-à-dire des ensembles ouverts pour la *topologie fine* introduite par H. Cartan en 1940 comme une reformulation de la notion d'ensemble effilé introduite peu auparavant par Brelot. La topologie fine sur **C** est la topologie la moins fine rendant continues toutes les fonctions sous-harmoniques dans le plan. Elle est strictement plus fine que la topologie ordinaire sur **C**. – Voir l'aperçu [12].

Selon la première définition (de 1973, publiée dans [10]) une fonction f : $U \to \mathbf{C}$, définie dans un ouvert fin U de **C**, fut dite finement holomorphe si tout point de U possède un voisinage fin V dans U sur lequel f s'approche uniformément par des fonctions holomorphes au voisinage de V.

Une définition intrinsèque et plus maniable fut proposée peu après par Debiard et Gaveau [3]. On exigea que la fonction f soit finement harmonique (complexe) et qu'elle satisfasse à l'équation de Cauchy-Riemann $\bar{\partial} f = 0$ presque partout dans U au sens de la différentiation stochastique. Cette définition a été adoptée par Nguyen-Xuan-Loc [19], [20], [21] et par Lyons [15], [16]. – Au sujet des fonctions finement harmoniques voir mon mémoire [6].

L'équivalence entre ces deux notions d'holomorphie fine fut établie tout récemment par Lyons et O'Farrell [17] comme corollaire des résultats fort intéressants obtenus par Lyons [15], [16] par des méthodes probabilistes combinées avec la théorie des algèbres uniformes.

Dans le présent travail je propose (§ 3) une définition non-probabiliste de la notion de fonction finement holomorphe, fondée sur la théorie des fonctions de Beppo Levi comme précisées par Deny, voir [4]. En utilisant la transformation de Cauchy-Pompeiu des fonctions à carré sommable (et à support compact) et en outre un lemme-clef de Lyons [15], voir § 6, j'établis l'équivalence aux définitions antérieures, ainsi que des nouveaux résultats notamment sur la différentiation des fonctions finement holomorphes.

En particulier, la série de Taylor d'une fonction finement holomorphe f représente f asymptotiquement dans un voisinage fin convenable du point donné, et la fonction f est complètement déterminée par cette série, autrement dit par la suite de ses dérivées fines de tout ordre en un seul point (§ 14).

L'ensemble des zéros d'une fonction finement holomorphe est au plus dénombrable (§ 15).

Enfin on étudie les sous-espaces fermés $\mathcal{O}^p(\mathrm{U})$ de $\mathrm{L}^p(\mathrm{U})$ $(2<p\leqslant+\infty)$ formés par les éléments de $\mathrm{L}^p(\mathrm{U})$ qui sont finement holomorphes dans l'ouvert fin U de **C** (n° 16). Cela conduit en particulier à une étude des dérivées ponctuelles sur $\mathcal{O}^p(\mathrm{U})$, étendant des résultats de Debiard et Gaveau [2], [3] et de Lyons [15], [16].

Dans un travail prévu je me propose de présenter encore une définition équivalente de la notion de fonction finement holomorphe, à savoir tout simplement comme une fonction finement différentiable (une fois) à dérivée finement continue. Je montrerai entre autres choses que les fonctions monogènes de Borel forment une classe particulière de fonctions finement holomorphes. – Voir l'aperçu [12].

* * *

1. Préliminaires et notation. – On désigne par Ω un *domaine de Green* dans le plan complexe **C**, autrement dit, d'après le théorème de Myrberg, un ouvert connexe non-vide $\Omega \subset \mathbf{C}$ tel que Ω est non-polaire, i.e. de capacité logarithmique > 0. Soit $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes infiniment différentiables et à support compact dans Ω. On note G le *noyau de Green* sur $\Omega \times \Omega$. La restriction d'une fonction f à un ensemble E se note $f|_{\mathrm{E}}$.

En suivant Deny et Lions [4] on note $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ le complété de $\mathscr{D}(\Omega)$ pour la norme de Dirichlet $\|\cdot\|$ déduite du produit scalaire

$$(1) \qquad (f,g) := (\nabla f | \nabla g) = 4(\partial f | \partial g) = 4(\bar{\partial} f | \bar{\partial} g),$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$, et le gradient $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ (entendu au sens de la théorie des distributions sur Ω) est pris par rapport à $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ pour $z \in \mathbf{C}$. On note comme d'habitude

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

d'où en fait

$$\begin{aligned} 4(\partial f | \partial g) &= (f_x - if_y | g_x - ig_y) \\ &= (f_x | g_x) + (f_y | g_y) = (\nabla f | \nabla g). \end{aligned}$$

Car on a

$$(f_x | g_y) - (f_y | g_x) = \int (-f_{xy}\bar{g} + f_{yx}\bar{g}) = 0,$$

d'abord pour $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, puis pour $f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ grâce à la continuité de la forme linéaire $f \longmapsto (f_x | g_y) - (f_y | g_x)$ sur $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ pour tout $g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$. De façon analogue il vient $4(\bar{\partial} f | \bar{\partial} g) = (\nabla f | \nabla g)$.

$\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ est donc un espace hilbertien complexe. Or $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ est en outre un sous-espace vectoriel de l'espace BLD(**C**) de toutes les fonctions de Beppo Levi et Deny $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$. On renvoie à [4, ch II] pour la notion de fonction de Beppo Levi comme précisée par Deny. Plus précisément il s'agit des classes d'équivalence – modulo les ensembles polaires – de fonctions quasi-continues (autrement dit finement continues quasi partout) et en outre finies quasi partout (q.p.) dans Ω [1].

Pour tout *ouvert fin* U de Ω on pose

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega, U) &= \{f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) | f = 0 \text{ q.p. dans } \Omega \backslash U\}, \\ \mathscr{H}(\Omega, U) &= \{f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) | f \text{ est finement harmonique q.p. dans } U\}, \\ \mathscr{O}(\Omega, U) &= \{f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) | \bar{\partial} f = 0 \text{ p.p. dans } U\}. \end{aligned}$$

(1) Les mots « fin » et « finement » se rapportent à la *topologie fine* de Brelot-Cartan sur $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$.

Bien entendu les fonctions finement harmoniques sont à valeurs complexes ici. Le p.p. (presque partout) se rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$.

Ces trois sous-espaces vectoriels de $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ sont fermés, et on a la décomposition orthogonale (voir [13])

$$\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) = \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,\mathrm{U}) \oplus \mathscr{H}(\Omega,\mathrm{U}). \tag{2}$$

L'ensemble

$$\mathscr{O}^\infty(\Omega,\mathrm{U}) = \mathscr{O}(\Omega,\mathrm{U}) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$$

des fonctions bornées appartenant à $\mathscr{O}(\Omega,\mathrm{U})$ est une *algèbre* (sous-algèbre de l'algèbre des fonctions bornées de $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$). En effet, pour $f, g \in \mathscr{O}^\infty(\Omega,\mathrm{U})$

$$\bar\partial(fg) = f\bar\partial g + g\bar\partial f$$

appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et s'annule p.p. dans U.

2. Lemme. — *Pour tout* $f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ *et tout ouvert fin* V *d'adhérence compacte* $\bar{\mathrm{V}}$ *dans* Ω *les énoncés suivants sont équivalents :*

i) $\bar\partial f = 0$ *p.p. dans* V (*autrement dit :* $f \in \mathscr{O}(\Omega,\mathrm{V})$);

ii) f *et* $zf : z \longmapsto zf(z)$ *sont finement harmoniques q.p. dans* V ;

iii) $\displaystyle\int_{\mathrm{V}} f\overline{\partial g} = 0$ *pour tout* $g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,\mathrm{V})$.

Preuve. — On sait que $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Comme V est supposé relativement compact dans Ω il vient $f|_{\mathrm{V}} \in \mathrm{L}^2(\mathrm{V})$, et il existe $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tel que

$$\varphi(z) = z \quad \text{dans un ouvert ordinaire} \quad \omega \supset \mathrm{V}.$$

i) $\Rightarrow$ ii) : Supposons donc que $f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ et que $\bar\partial f = 0$ p.p. dans V. Pour tout $g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,\mathrm{V})$ on a $\bar\partial g = 0$ p.p. dans $\Omega\backslash\mathrm{V}$, voir [13, cor. de la prop. 10]. D'après (1) il en résulte que

$$(f,g) = 4(\bar\partial f\,|\,\bar\partial g) = 4\int_{\mathrm{V}} \bar\partial f\,\overline{\bar\partial g} = 0,$$

d'où $f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,\mathrm{V})^\perp = \mathscr{H}(\Omega,\mathrm{V})$ selon (2). — On a $\varphi f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ et

$$\bar\partial(\varphi f) = (\bar\partial\varphi)f + \varphi\bar\partial f = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathrm{V}$$

puisque $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}z = 0$ dans $\omega \supset V$. Comme plus haut il en résulte que $\varphi f \in \mathscr{H}(\Omega,V)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Supposons que f, $\varphi f \in \mathscr{H}(\Omega,V)$. Pour tout $g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,V)$ il vient d'après (1), (2)

$$4(\partial f \mid \partial g) = (f,g) = 0, \quad 4(\partial(\varphi f) \mid \partial g) = (\varphi f, g) = 0. \tag{3}$$

Comme $\partial\varphi = 1$ dans $\omega \supset V$ et que $\partial g = 0$ p.p. dans $\Omega \backslash V$ d'après [13, cor. de la prop, 10], il en résulte que

$$\begin{aligned}(f \mid \partial g) = (f\partial\varphi \mid \partial g) &= (\partial(\varphi f) - \varphi\partial f \mid \partial g)\\ &= -(\varphi\partial f \mid \partial g) = -(\partial f \mid \bar{\varphi}\partial g) = -(\partial f \mid \partial(\bar{\varphi} g)),\end{aligned}$$

car $g\partial\bar{\varphi} = 0$ p.p. dans Ω. Or $\bar{\varphi} g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,V)$, et par suite $(\partial f \mid \partial(\bar{\varphi} g)) = 0$ selon (3).

iii) $\Rightarrow$ i) : L'identité $(\bar{\partial} f \mid g) = -(f \mid \partial g)$ pour $f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$, $g \in \mathscr{D}(\Omega)$ se prolonge par continuité à tout $g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ à support compact dans Ω (donc $g \in L^2(\Omega)$), comme on voit par régularisation. Sous l'hypothèse iii) on a par suite $(\bar{\partial} f \mid g) = 0$ pour tout $g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,V)$. En remplaçant g par ψg pour $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, d'où $\psi g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,V)$, on en tire que

$$(\bar{\partial} f \mid \psi g) = \int_\Omega (\bar{\partial} f)\overline{\psi g} = 0,$$

et par suite

$$(\bar{\partial} f)\bar{g} = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \tag{4}$$

Choisissons un G-potentiel strict $p = G\mu$ d'une mesure positive μ de G-énergie finie sur Ω, et posons

$$g = p - \hat{R}_p^{\complement V} = G\mu - G(\mu^{\complement V})$$

(balayage toujours par rapport à Ω). On a alors $g \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,V)$, et comme $g > 0$ dans V il en résulte de (4) qu'on a bien $\bar{\partial} f = 0$ p.p. dans V.

Remarque. — On montre plus loin (cor. du th. 5) que tout élément de $\mathscr{O}(\Omega,U)$ possède un représentant qui est finement continu *partout* dans U, donc finement holomorphe dans U tout entier au sens défini ci-dessous (voir notamment l'énoncé 3). — Il n'en est pas de même pour $\mathscr{H}(\Omega,U)$, voir [13, n° 12].

3. DÉFINITION. — *Une fonction* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$, *définie dans un ouvert fin* U *de* $\mathbf{C}$, *est dite finement holomorphe si elle possède une des propriétés suivantes, qui sont équivalentes :*

1) f *est finement harmonique partout dans* U, et $\bar{\partial} f = 0$ *p.p. dans* U (2) ;

2) f *et* zf *sont finement harmoniques dans* U ;

3) f *est finement continue dans* U, *et tout point* z *de* U *possède un voisinage fin et finement ouvert* V *dans lequel* f *est égale à une fonction de Beppo Levi précisée* (*au sens de* [4]) $\hat{f} \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ *telle que* $\bar{\partial}\hat{f} = 0$ *p.p. dans* V (3).

Dans le cas affirmatif on peut prendre V d'adhérence compacte dans U, et $\hat{f}$ continue et à support compact dans $\mathbf{C}$, donc $\hat{f} \in \mathcal{O}^{\infty}(\Omega,\mathrm{V})$ en particulier pour tout domaine de Green Ω contenant le support de $\hat{f}$.

L'équivalence entre ces trois propriétés résulte du lemme précédent, compte tenu de [13, th. 2] qui nous permet de passer de 1) ou de 2) à la propriété 3) (même sous la forme renforcée ci-dessus). Pour voir que 3) entraîne 1) ou 2) on utilise en outre [6, cor. 9.15], affirmant que toute fonction finement continue partout dans un ouvert fin U, et finement harmonique q.p. dans U, est finement harmonique partout dans U.

COROLLAIRE. — *Si* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *est finement localement bornée dans l'ouvert fin* U *et finement holomorphe dans* $\mathrm{U}\backslash e$ (e *polaire*) *alors on peut redéfinir* f *sur* e *de façon unique pour obtenir une fonction finement holomorphe dans* U *tout entier.*

Ce résultat sur les singularités apparentes se ramène au résultat correspondant [6, th. 9.15] pour les fonctions finement harmoniques lorsqu'on utilise l'énoncé 2) de la définition.

(2) On sait que toute fonction finement harmonique dans un ouvert fin $\mathrm{U} \subset \mathbf{R}^k$ ($k \geqslant 2$) est finement différentiable presque partout (pour la mesure de Lebesgue), voir [13, n° 2]. On note ∂f et $\bar{\partial} f$ les dérivées partielles fines de f dans U.

(3) Pour une fonction de Beppo Levi précisée $\hat{f} \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ les dérivées partielles $\partial\hat{f}/\partial x$ et $\partial\hat{f}/\partial y$ au sens des distributions sont les mêmes que les dérivées partielles classiques, qui existent p.p. et sont à carré sommable. Pour une fonction finement harmonique $\hat{f}$ dans un ouvert fin $\mathrm{U} \subset \mathbf{C}$, $\partial\hat{f}/\partial x$ et $\partial\hat{f}/\partial y$ sont les mêmes (p.p. dans U), soit au sens classique, soit au sens fin (voir la note précédente). Plus précisément il en est ainsi en tout point de U en lequel $\partial\hat{f}/\partial x$ et $\partial\hat{f}/\partial y$ existent dans les deux sens. Cela résulte de ce que tout voisinage fin d'un point de U contient des circonférences autour du point aussi petites que l'on veut.

Remarque. – La définition ci-dessus est inspirée par Debiard et Gaveau [3] et par Lyons [15] quant aux propriétés 1), resp. 2). Lyons montre l'équivalence entre 2) et la version de 1) où l'équation de Cauchy-Riemann $\bar{\partial} f = 0$ (p.p. dans U) est prise au sens de la différentiation stochastique par rapport au processus de Wiener (mouvement brownien) comme proposé par Debiard et Gaveau [3].

On note $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ l'ensemble des fonctions finement holomorphes dans l'ouvert fin U de $\mathbf{C}$.

Pour un *ouvert ordinaire* U de $\mathbf{C}$, $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ n'est rien que l'ensemble des fonctions holomorphes ordinaires sur U. On sait en fait que les fonctions finement harmoniques et les fonctions harmoniques ordinaires sont les mêmes sur un tel ouvert U de $\mathbf{C}$, voir [7], d'où l'énoncé selon la propriété 2) de la définition ci-dessus.

4. Théorème. – *Pour tout ouvert fin* U *de* $\mathbf{C}$, $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ *est une algèbre, fermée dans* $\mathbf{C}^{\mathrm{U}}$ *pour la topologie de la convergence finement localement uniforme. L'application* $\mathrm{U} \longmapsto \mathcal{O}(\mathrm{U})$ *définit un faisceau* (= *préfaisceau complet*) *d'algèbres de fonctions finement continues.*

Preuve. – Le fait que $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ est une algèbre découle de la propriété 3) de la définition 3 sous sa forme renforcée, vu que $\mathcal{O}^{\infty}(\Omega,\mathrm{V})$ est une algèbre, comme remarqué à la fin du § 1. Le fait que $\mathcal{O}(\mathrm{U})$ est fermée pour la topologie de la convergence uniforme sur un voisinage fin convenable de chaque point de U résulte de l'énoncé correspondant pour l'espace $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ des fonctions finement harmoniques (complexes) sur U grâce à la propriété 2) de la définition 3, voir [6, th. 11.9]. La propriété de faisceau pour $\mathcal{O}$ résulte également de celle pour $\mathscr{H}$.

Remarque. – La limite d'une suite simplement convergente (f_n) de fonctions finement holomorphes dans U est finement holomorphe pourvu que $\sup_n |f_n|$ soit bornée dans un voisinage fin de tout point de U. (Même démonstration.)

Corollaire. – *Toute fonction finement holomorphe* $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *est un morphisme pour la structure harmonique fine.*

Cette notion de morphisme est appelée « finely harmonic mapping » dans [10]. Par un tel morphisme on entend (au début) une application finement continue $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ telle que $g \circ f$ soit finement harmonique dans $f^{-1}(V)$ pour toute fonction harmonique g dans un ouvert ordinaire V de $\mathbf{C}$, voir [10, déf. 2] et la caractérisation plus naturelle [10, th. 5]. L'énoncé du corollaire ci-dessus résulte de ce que $\mathcal{O}(U)$ est une algèbre de fonctions finement harmoniques complexes, voir [10, n° 3*c*)].

Corollaire. — *Toute fonction finement holomorphe $f : U \to \mathbf{C}$ est une application continue et (si non-constante) ouverte par rapport à la topologie fine pour les deux variables $z \in U$ et $w = f(z) \in \mathbf{C}$. L'image réciproque de tout ensemble polaire dans $\mathbf{C}$ est un ensemble polaire (dans U), lorsque f est non-constante.*

Voir [10, théorèmes 5, 7 et 6]. — La première démonstration (probabiliste) de la propriété d'ouverture « fine-fine » des fonctions finement holomorphes fut donnée par Debiard et Gaveau [3]. Pour une démonstration non-probabiliste (plus simple que dans [10]) voir [11].

5. La transformation de Cauchy-Pompeiu. — Soit $\varphi \in L_c^2(\mathbf{C})$ une fonction $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ à carré sommable et à support compact. On sait que sa transformée de Cauchy-Pompeiu

$$f = \frac{1}{z} * \varphi$$

est bien définie q.p. par l'intégrale suivante par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbf{C}$:

$$f(z) = \int_{\mathbf{C}} \frac{1}{z - \zeta}\, \varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta),$$

qui converge absolument q.p. dans $\mathbf{C}$ et représente une fonction $f \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ (fonction de Beppo Levi précisée), voir [4, p. 361].

Les dérivées partielles de f existent donc p.p., et on sait que

$$\partial f = -z^{-2} * \varphi, \qquad \bar{\partial} f = \pi\varphi, \tag{5}$$

où le produit de convolution $z^{-2} * \varphi$ est interprété comme transformé de Hilbert de φ, c'est-à-dire défini p.p. dans $\mathbf{C}$ par la valeur principale

$$\partial f(z) = -\lim_{\rho \to 0} \int_{|\zeta - z| > \rho} \frac{\varphi(\zeta)}{(z - \zeta)^2}\, d\lambda(\zeta),$$

voir par exemple [23, p. 71]. La première formule (5) ne sera pas utilisée par la suite. La seconde identité (5) s'obtient par différentiation (au sens des distributions) de la relation $f = 2\partial[(\log|z|) * \varphi]$, vu que

$$2\bar{\partial}\partial \log|z| = \frac{1}{2}\Delta \log|z| = \pi\varepsilon,$$

où Δ note le laplacien et ε la mesure de Dirac en 0.

Si φ s'annule p.p. dans un ouvert fin $U \subset \mathbf{C}$ il vient $\bar{\partial} f = \pi\varphi = 0$ p.p. dans U d'après (5). Or cela signifie selon la propriété 3) de la définition 3 que f est (définie et) finement holomorphe q.p. dans U. D'après la proposition 9 plus loin f est même bien définie et finement holomorphe *partout* dans U, voir aussi le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Pour qu'une fonction f soit finement holomorphe dans un ouvert fin U de $\mathbf{C}$ il faut et il suffit que tout point de U possède un voisinage fin $V \subset U$ dans lequel f soit égale à la transformée de Cauchy-Pompeiu d'une fonction $\varphi \in L^2(\mathbf{C})$ à support compact telle que $\varphi = 0$ p.p. dans V :*

$$f(z) = \int_{\mathbf{C}} \frac{1}{z-\zeta}\,\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta), \qquad z \in V.$$

Début de la preuve. — Supposons d'abord que f soit finement holomorphe dans U. On se ramène au cas d'un ouvert fin U d'adhérence ordinaire contenue dans un disque ouvert Ω. D'après la propriété 3) de la définition 3 on peut supposer en outre que f se prolonge en une fonction $\hat{f} \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ telle que $\bar{\partial}\hat{f} = 0$ p.p. dans U. Après multiplication par une fonction de $\mathscr{D}(\Omega)$ valant 1 dans un voisinage de U on peut supposer enfin que $\hat{f}$ soit de support compact dans Ω, donc $\hat{f} \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$, voir [4, p. 359]. On a alors

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{1}{z-\zeta}\,\bar{\partial}\hat{f}(\zeta)\,d\lambda(\zeta) \quad \text{q.p. dans } \Omega. \tag{6}$$

Pour une fonction $\hat{f} \in \mathscr{D}(\Omega)$ ceci est l'identité de Green-Pompeiu, valable partout dans Ω ; elle résulte de l'identité de Green sous forme complexe, utilisée pour le complémentaire d'un petit disque autour de z, voir par exemple [23, p. 24-25]. Puis (6) se prolonge facilement par continuité au cas actuel $\hat{f} \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$, $\hat{f}$ de support compact.

La fonction $\varphi : = \pi^{-1} \bar{\partial} \hat{f} \in L^2(\mathbf{C})$ est à support compact dans Ω et s'annule p.p. dans U. D'après (6) on a

$$f(z) = \hat{f}(z) = \int_{\mathbf{C}} \frac{1}{z-\zeta} \varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta), \qquad z \in U,$$

d'abord quasi partout dans U, puis partout dans U. En effet, f est supposée finement holomorphe dans U (donc finement continue en particulier), et il en est de même pour la transformée de Cauchy-Pompeiu $z^{-1} * \varphi$ d'après la proposition 9 plus loin. Cela montrera en même temps l'implication opposée dans le présent théorème.

COROLLAIRE. — *Toute fonction de Beppo Levi [précisée] sur* $\mathbf{C}$ *peut être redéfinie sur un ensemble négligeable [resp. polaire] de façon à devenir finement holomorphe partout dans le plus grand ouvert fin* U *tel que* $\bar{\partial} f = 0$ *p.p. dans* U.

Comme dans la démonstration du théorème ci-dessus on se ramène facilement au cas $f \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} f$ compact dans un disque ouvert Ω. D'où $f = z^{-1} * \varphi$ p.p. dans Ω d'après (6), en posant $\varphi = \pi^{-1} \bar{\partial} f$, fonction de la classe $L^2_c(\Omega)$ s'annulant p.p. dans U. En vertu du principe quasi-Lindelöf il existe en fait un plus grand ouvert fin U dans lequel on ait $\bar{\partial} f = 0$ presque partout.

6. LEMME (Lyons [15]). — *Pour tout point* z_0 *d'un ouvert fin* $U \subset \mathbf{C}$ *et tout nombre réel* $\alpha > 0$ *il existe un voisinage fin* U_α *de* z_0 *dans* U *et un nombre* N_α *tels que*

$$\operatorname{cap}^* (A_n(z) \backslash U) \leqslant 2^{-n\alpha}$$

pour tout $z \in U_\alpha$ *et tout* $n \geqslant N_\alpha$.

On note cap^* la capacité logarithmique extérieure et $A_n(z)$ la couronne

$$A_n(z) = \{\zeta \in \mathbf{C} \mid 2^{-n-1} \leqslant |\zeta - z| < 2^{-n}\}.$$

Voir l'appendice (§ 17) pour une démonstration non-probabiliste.

7. LEMME. — *Soient* U *un ouvert fin de* $\mathbf{C}$ *et* S *un compact ordinaire de* $\mathbf{C}$. *Pour tout* α *réel la fonction* h_α *définie par*

$$h_\alpha(z) : = \int_{S \backslash U} |z-\zeta|^{-\alpha}\, d\lambda(\zeta), \qquad z \in U$$

est finie et finement continue partout dans U. *Tout point* $z_0 \in U$ *possède donc un voisinage fin* V *dans* U *sur lequel chacune des* h_α *est bornée :*

$$c_\alpha := \sup_{z \in V} h_\alpha(z) < +\infty. \tag{7}$$

Preuve. — Si $\alpha < 2$, la fonction $z \longmapsto |z|^{-\alpha}$ est localement intégrable par rapport à λ, et h_α est donc finie et continue, même pour la topologie ordinaire, et on peut prendre pour V n'importe quel voisinage fin de z_0 tel que V soit compact (pour la topologie ordinaire) et contenu dans U. Il nous reste donc le cas $\alpha \geqslant 2$. En ajoutant à U l'ensemble polaire des points où $\complement U$ est effilé on arrange que U devient un F_σ pour la topologie ordinaire sur $\mathbf{C}$. Avec les notations du lemme précédent il vient pour $z \in U_\alpha$ et $n \geqslant N := N_\alpha$

$$\begin{aligned}\int_{A_n(z)\setminus U} |z-\zeta|^{-\alpha}\, d\lambda(\zeta) &\leqslant 2^{(n+1)\alpha}.\lambda(A_n(z)\setminus U)\\ &\leqslant 2^{(n+1)\alpha}.\pi[\operatorname{cap}(A_n(z)\setminus U)]^2\\ &\leqslant 2^{-(n-1)\alpha}.\pi.\end{aligned}$$

On utilise ici l'inégalité classique

$$\lambda(E) \leqslant \pi(\operatorname{cap} E)^2$$

entre la mesure de Lebesgue et la capacité logarithmique d'un ensemble borélien borné $E \subset \mathbf{C}$, voir [22]. Par addition il vient

$$\int_{|z-\zeta|<2^{-N}} |z-\zeta|^{-\alpha}\, d\lambda(\zeta) \leqslant \sum_{n \geqslant N} 2^{-(n-1)\alpha}.\pi \leqslant 2\pi.2^{-(N-1)\alpha}.$$

D'autre part

$$\int_{|z-\zeta|\geqslant 2^{-N},\, \zeta\in S} |z-\zeta|^{-\alpha}\, d\lambda(\zeta) \leqslant 2^{N\alpha}\lambda(S),$$

d'où en somme

$$h_\alpha(z) \leqslant 2\pi.2^{-(N-1)\alpha} + 2^{N\alpha}\lambda(S), \qquad z \in U_\alpha.$$

La restriction de h_α à $U_{2\alpha}$ est continue au sens ordinaire, car on peut approcher h_α uniformément sur $U_{2\alpha}$ par une suite de fonctions $h_{\alpha,j}$

continues dans des ouverts ordinaires $\omega_j \supset U$, à savoir

$$h_{\alpha,j}(z) = \int_{S\setminus\omega_j} |z-\zeta|^{-\alpha}\, d\lambda(\zeta),$$

où les ouverts $\omega_j \supset U$ forment une suite décroissante telle que $\lambda(S \cap \omega_j \setminus U) \to 0$. On a en effet pour $z \in U_{2\alpha}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$0 \leqslant h_\alpha(z) - h_{\alpha,j}(z) = \int_{S \cap \omega_j \setminus U} |z-\zeta|^{-\alpha}\, d\lambda(\zeta)$$

$$\leqslant \sup_{z \in U_{2\alpha}} (h_{2\alpha}(z)^{\frac{1}{2}})\lambda(S \cap \omega_j \setminus U)^{\frac{1}{2}}.$$

On vient de montrer en particulier que chaque h_α est finie et finement continue dans U. Tout point $z_0 \in U$ possède donc un voisinage fin V dans U tel que *toutes* les restrictions $h_{\alpha|V}$ sont continues au sens ordinaire, voir [10, lemme 1]. On peut prendre V compact pour la topologie ordinaire, et il résulte alors que chaque h_α est bornée sur V (même pour $\alpha < 2$). (On se ramène par monotonie au cas des α rationnels.)

Remarque. – Il n'y a rien d'analogue en dimension (réelle) > 2, comme on peut montrer par des exemples simples. Ceci met en évidence le fait bien connu que l'effilement d'un ensemble ($\complement U$ dans notre cas) est une propriété de rareté beaucoup plus accentuée dans le cas du plan qu'en dimension supérieure.

8. Définition. – *Une fonction* $f : U \to \mathbf{C}$, *définie dans un ouvert fin* U *de* $\mathbf{C}$, *est dite finement différentiable* (*au sens complexe*) *avec la dérivée* (*fine*) $f' : U \to \mathbf{C}$ *lorsqu'on a*

$$\lim_{w\to z} \text{fine} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z)$$

pour tout $z \in U$.

On sait que ceci équivaut à dire que tout point $z \in U$ possède un voisinage fin V dans U tel que

$$\lim_{\substack{w\to z \\ w\in V}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z)$$

(limite ordinaire), voir Brelot [1, th. 6].

Par récurrence on parvient ensuite à la notion de fonction finement infiniment différentiable, et à la notion des dérivées (fines) $f^{(n)}$ d'ordres supérieurs $n = 1, 2. \dots$ (on pose $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$).

9. Proposition. — *La transformée de Cauchy-Pompeiu* $f = z^{-1} * \varphi$ *d'une fonction* $\varphi \in L_c^p(\mathbf{C})$, $p > 1$, *est bien définie et finement holomorphe partout dans tout ouvert fin* $U \subset \mathbf{C}$ *tel que* $\varphi = 0$ *p.p. dans* U. *La fonction* f *est alors finement infiniment différentiable dans* U. *Ses dérivées sont finement holomorphes dans* U *et s'obtiennent par différentiation sous le signe d'intégration :*

$$f^{(n)} = (-1)^n n\,!\; z^{-n-1} * \varphi \quad \textit{dans} \quad U, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

les intégrales correspondantes étant absolument convergentes dans U.

Preuve. — Au cours de la preuve — qui sera donnée en 3 étapes — on va démontrer en outre le théorème 11 plus loin pour le cas présent $f = z^{-1} * \varphi$, $\varphi \in L_c^p(\mathbf{C})$, $\varphi = 0$ p.p. dans U. On note S le support compact de φ.

Dans les deux premières étapes on entendra par $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, les fonctions sur U obtenues par différentiation de $f = z^{-1} * \varphi$ sous le signe d'intégration :

$$(8) \quad f^{(n)}(z) : = (-1)^n n\,! \int_{S \setminus U} \frac{1}{(z-\zeta)^{n+1}} \varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta), \qquad z \in U.$$

Ces intégrales convergent absolument pour $z \in U$ d'après le lemme 7 et l'inégalité de Hölder. L'identification des $f^{(n)}$, prises dans ce sens, aux dérivées fines de f sera donnée à la fin de la 2ᵉ étape.

On se donne un point z_0 de U, et on prend un voisinage fin V de z_0 dans U tel que V soit compact pour la topologie ordinaire et que (7) soit rempli (voir le lemme 7).

1) Choisissons une suite décroissante d'ouverts $\omega_j \supset V$ d'intersection V, et posons

$$\varphi_j = 1_{\complement \omega_j} \varphi, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

donc $\|\varphi_j - \varphi\|_{L^p} \to 0$ puisque $\varphi = 0$ p.p. dans U par hypothèse. La fonction

$$f_j : = \frac{1}{z} * \varphi_j$$

est holomorphe dans ω_j avec les dérivées

(9) $$f_j^{(n)} = (-1)^n n! \quad z^{-n-1} * \varphi_j \qquad \text{dans} \quad \omega_j.$$

De (7), (8) et (9) on tire d'après l'inégalité de Hölder, en posant $q = p/(p-1)$,

$$\sup_{z \in V} |f_j^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)| \leqslant n! \; (c_{(n+1)q})^{1/q} \|\varphi_j - \varphi\|_{L^p} \to 0$$

pour $j \to \infty$. D'où l'énoncé *a*) du théorème 11 pour le présent cas (avec $f^{(n)}$ définie par (8)).

En même temps on en tire d'après le théorème 4 que chaque $f^{(n)}$ est finement holomorphe dans l'intérieur fin V′ de V, donc dans U tout entier, car chaque $f_j^{(n)}$ est finement holomorphe dans ω_j, et dans V′ en particulier (voir la fin du § 3).

Pour $n = 0$ ceci montre que $f = z^{-1} * \varphi$ elle-même est bien définie et finement holomorphe dans U, ce qui achève la preuve du théorème 5.

2) Fixons $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, et considérons le reste m-ième dans le développement de Taylor de la fonction $z \longmapsto z^{-n-1}$. Pour $z, w \in \mathbf{C} \backslash \{0\}$ ce reste s'écrit

$$\begin{aligned} R(z,w) &= w^{-n-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (w-z)^k \, \partial^k z^{-n-1} \\ &= z^{-m-n} w^{-n-1} P(z,w), \end{aligned}$$

où P est un polynôme en z et w. Si l'on regarde P comme polynôme en z et $w - z$ on trouve un développement en série finie

$$P(z,w) = \sum_{i \geqslant 0} P_i(z)(w-z)^i$$

avec certains polynômes P_i d'une variable. La limite

$$\lim_{w \to z} \frac{R(z,w)}{(w-z)^m} = \lim_{w \to z} z^{-m-n} w^{-n-1} \sum_{i \geqslant 0} P_i(z)(w-z)^{i-m}$$

existe d'après la formule de Taylor pour tout $z \neq 0$. Cela montre qu'on a

$$P_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad i < m,$$

et par suite (pour $w \neq z$)

$$\frac{R(z,w)}{(w-z)^m} = z^{-m-n}w^{-n-1}\sum_{j\geqslant 0} P_{m+j}(z)(w-z)^j$$

$$= z^{-m-n}w^{-n-1}\sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij}z^iw^j$$

$$= \sum_{r,s} b_{rs}z^{-r}w^{-s},$$

encore une somme finie à coefficients b_{rs} constants.

Ceci s'applique avec z et w remplacés par $z - \zeta$ et $w - \zeta$ pourvu que z, w et ζ sont distincts. Prenons $z, w \in V$ et $\zeta \in \Omega\backslash U$. Après multiplication par $(-1)^n n!\ \varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta)$ et intégration sur $S\backslash U$ il vient d'après (8)

$$\frac{1}{(w-z)^m}\left(f^{(n)}(w) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}(w-z)^k f^{(n+k)}(z)\right)$$
$$= \int_\Omega (-1)^n n!\,\frac{R(z-\zeta, w-\zeta)}{[(w-\zeta)-(z-\zeta)]^m}\,\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)$$
$$= (-1)^n n!\sum_{r,s} b_{rs}\int_{S\backslash U}(z-\zeta)^{-r}(w-\zeta)^{-s}\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta).$$

Cette somme finie est bornée comme fonction de $z, w \in V$ (pour m, n fixés). Cela résulte de (7), Lemme 7, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\left|\int_{S\backslash U}(z-\zeta)^{-r}(w-\zeta)^{-s}\varphi(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right| \leqslant \|\varphi\|_{L^p}\left(\int_{S\backslash U}|z-\zeta|^{-rq}|w-\zeta|^{-sq}\,d\lambda(\zeta)\right)^{1/q}$$
$$\leqslant \|\varphi\|_{L^p}\,h_{2rq}(z)^{1/(2q)}h_{2sq}(w)^{1/(2q)}.$$

Comme chaque h_α est bornée sur V (lemme 7) on a ainsi établi l'inégalité

$$(10)\quad |f^{(n)}(w) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}(w-z)^k f^{(n+k)}(z)| \leqslant A_{m,n}\|\varphi\|_{L^p}|w-z|^m$$

pour $z, w \in V$ et $m, n = 0, 1, 2, \ldots,$ avec des constantes $A_{m,n}$ indépendantes de $z, w \in V$ et de la fonction φ. — D'où l'énoncé *b*) du théorème 11 pour le présent cas et avec $f^{(n)}$ définie par (8).

Pour $m = 2$ et $z = z_0$ on déduit de (10) pour $w \in V$

$$\left|\frac{f^{(n)}(w) - f^{(n)}(z_0)}{w - z_0} - f^{(n+1)}(z_0)\right| \leqslant A_{2,n}\|\varphi\|_{L^p}|w - z_0|,$$

ce qui montre que chaque $f^{(n)}$ (comme définie par (8)) est finement différentiable au point donné z_0, donc partout dans U, avec la dérivée fine $f^{(n+1)}$ (voir encore (8)). Il en résulte par récurrence que $f = z^{-1} * \varphi$ est finement infiniment différentiable dans U, et que ses dérivées (fines) sont justement les fonctions $f^{(n)}$ définies provisoirement par (8). On vient de montrer dans la 1ère étape que ces fonctions $f^{(n)}$ sont finement holomorphes dans U.

3) Pour tout $n, n' = 0,1,2, \ldots$ et tout $z \in V$ posons

$$(11) \qquad f^{(n,n')}(z) = \begin{cases} f^{(n)}(z) & \text{pour} \quad n' = 0, \\ 0 & \text{pour} \quad n' > 0. \end{cases}$$

L'inégalité (10) peut alors s'écrire

$$|f^{(n,n')}(w) - \sum_{k+k' \leqslant m-1} \frac{1}{k\,!\,k'\,!}(w-z)^k(\bar{w}-\bar{z})^{k'} f^{(n+k,\,n'+k')}(z)| \leqslant A_{m,n}\|\varphi\|_{L^p}|w-z|^m$$

pour $z, w \in V$ et $m, n, n' = 0, 1, 2, \ldots$. Or cela montre que les hypothèses du théorème de prolongement de Whitney [24] (écrit sous forme complexe) sont remplies. Il existe donc une fonction $\tilde{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{C})$ telle que $\tilde{f} = f$ dans V et par suite

$$\partial^n \bar{\partial}^{n'} \tilde{f} = f^{(n,n')} \qquad \text{dans} \quad V,$$

pour tout $n, n' = 0, 1, 2, \ldots$; d'où l'énoncé *c*) du théorème 11 pour le présent cas, compte tenu de (11).

Remarque. — L'hypothèse $\varphi \in L^p_c$ avec $p > 1$ ne peut pas être affaiblie à $\varphi \in L^1_c$.

10. Théorème. — *Toute fonction finement holomorphe* $f : U \to \mathbf{C}$ *est finement infiniment dérivable, et les dérivées* $f^{(n)}$ *sont elles-mêmes finement holomorphes dans* U.

Preuve. — Grâce au théorème 5 (dont la démonstration fut achevée à la fin de la 1ère étape de la preuve de la proposition 9) on se ramène au cas $f = z^{-1} * \varphi$ envisagé dans le § 9.

11. THÉORÈME. — *Si $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ est finement holomorphe alors tout point de* U *possède un voisinage fin* V *dans* U *avec les propriétés suivantes :*

a) Il existe une suite de fonctions f_j holomorphes dans des ouverts ordinaires $\omega_j \supset \mathrm{V}$ telle que, pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$, la dérivée ordinaire $f_j^{(n)}$ tend uniformément sur V *à la dérivée (fine) correspondante $f^{(n)}$ pour $j \to \infty$.*

b) Pour tout $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ la fonction

$$\frac{f^{(n)}(w) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(w - z)^k f^{(n+k)}(z)}{(w - z)^m}$$

est bornée pour $(z, w) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V}$, $z \neq w$ (⁴).

c) Il existe une fonction infiniment différentiable (au sens ordinaire) $\tilde{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{C})$ telle qu'on a $\tilde{f} = f$ dans V *et par suite*

$$\partial^n \tilde{f} = f^{(n)}, \qquad \partial^n \bar{\partial}^{n'} \tilde{f} = 0 \qquad \text{dans } \mathrm{V}$$

pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$ et tout $n' = 1, 2, \ldots$.

Preuve. — Grâce au théorème 5 on se ramène encore à la démonstration au § 9 où les énoncés *a*), *b*) et *c*) furent vérifiés respectivement dans les étapes 1), 2) et 3) pour le cas typique $f = z^{-1} * \varphi$.

Remarques. — 1) L'énoncé *b*) du théorème 11 montre que la série de Taylor d'une fonction finement holomorphe $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$, bien que divergente en général, représente la fonction asymptotiquement dans un voisinage fin de chaque point de U (et même dans un sens uniforme). — Toute fonction finement holomorphe dans un *domaine fin* (ensemble finement ouvert et finement connexe) est complètement déterminée par sa série de Taylor, voir le théorème 14 plus loin.

2) Pour qu'une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ soit finement holomorphe il faut et il suffit que tout point de U possède un voisinage fin V tel que $f|_\mathrm{V}$ se prolonge en une fonction $\tilde{f} \in \mathscr{C}^1(\mathbf{C})$ pour laquelle on ait $\bar{\partial}\tilde{f} = 0$ dans V. (La nécessité résulte de l'énoncé *c*) du théorème 11 pour $(n,n') = (0,1)$. La suffisance découle de la version 3) de la définition 3).

COROLLAIRE. — *Une fonction finement holomorphe f dans un domaine fin* U *de* **C** *est constante si sa première dérivée f' s'annule identiquement dans* U.

(⁴) Pour $m = 0$ l'expression ci-dessus se réduit à $f^{(n)}(w)$.

Il suffit de montrer que f est finement localement constante dans U. Montrons que $f = \tilde{f}$ est constante dans le voisinage fin V (qu'on peut prendre finement ouvert et finement connexe) de la remarque 2) ci-dessus. Or cela résulte de ce que $\bar{\partial}\tilde{f} = 0$ dans V et $\partial\tilde{f} = f' = 0$ dans V, car on sait que deux points quelconques de V peuvent se joindre par une ligne polygonale finie contenue dans V, voir [8].

La topologie fine est localement connexe, mais pas localement simplement connexe. Cela explique pourquoi une fonction finement holomorphe n'admet pas en général de primitive. Une telle primitive — lorsqu'elle existe — est univoquement déterminée à une constante additive près, selon le corollaire ci-dessus.

Exemple. — Soit (a_n) une suite de nombres > 0 telle que $\Sigma a_n < +\infty$. Posons $z_n = 2^{-n}$ $(n=1,2,\ldots)$ et

$$f(z) = \sum_n \frac{a_n}{z - z_n}. \tag{12}$$

Cette série converge absolument, et localement uniformément, dans l'ouvert ordinaire $\Omega = \mathbf{C}\backslash(\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}} \cup \{0\})$, et f est par suite bien définie et holomorphe dans Ω, et méromorphe dans $\mathbf{C}\backslash\{0\}$.

Soit (r_n) une suite de nombres tels que $0 < r_n < |z_n|$ et que

$$\sum_n \frac{n}{\log(1/r_n)} < +\infty.$$

D'après le critère de Wiener la réunion A des disques fermés de centre z_n et de rayon r_n est effilée en $0 \notin A$, d'où $U := \mathbf{C}\backslash A$ est un voisinage fin de 0. On suppose désormais qu'on a choisi les a_n de façon que

$$\sum_n a_n/r_n < +\infty.$$

La série (12) converge alors uniformément dans U, et f devient ainsi finement holomorphe dans le domaine fin $\mathbf{C}\backslash\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ $(=\Omega\cup\{0\})$ (et « finement méromorphe » dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$).

Montrons que f n'admet de primitive dans aucun voisinage fin de 0. Supposons au contraire que f soit la dérivée (fine) d'une fonction finement holomorphe F dans un voisinage fin U_1 de 0 dans $\complement\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. D'après la remarque 2 au théorème 11 il y a un voisinage fin $V \subset U \cap U_1$ tel que

$F|_V$ se prolonge en une fonction $\tilde{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbf{C})$, et par suite $\partial\tilde{F} = F' = f$ dans V, et $\bar{\partial}\tilde{F} = 0$ dans V. D'où

$$\int f(z)\, dz = \int (\partial\tilde{F}\, dz + \bar{\partial}\tilde{F}\, d\bar{z}) = 0$$

le long de toute circonférence $|z| = r$ contenue dans V (et on sait qu'il y en a une). Or cela est absurde puisque

$$\int_{|z|=r} f(z)\, dz = \sum_n \int_{|z|=r} \frac{a_n}{z - z_n}\, dz = 2\pi i \sum_{|z_n|<r} a_n > 0$$

grâce à la convergence uniforme de la série (12) dans $V \subset U$.

12. Rapport avec l'algèbre R(K). — Pour tout compact $K \subset \mathbf{C}$ on note $R(K)$ l'adhérence dans $\mathscr{C}(K)$ (avec la topologie uniforme) de la sous-algèbre formée par les restrictions à K des fonctions holomorphes (ou rationnelles) au voisinage de K. Toute fonction $f \in R(K)$ est finement holomorphe dans l'intérieur fin K' d'après le théorème 4. D'autre part il existe un compact K et une fonction $f \in \mathscr{C}(K) \backslash R(K)$ telle que f est finement holomorphe dans K'. Voir pour ça l'exemple de McKissic [18] d'un compact $K \subset \mathbf{C}$ tel que $R(K) \neq \mathscr{C}(K)$ et que $R(K)$ est normal, d'où facilement $K' = \varnothing$. Néanmoins on a la caractérisation finement locale suivante de l'holomorphie fine par les algèbres $R(K)$:

Corollaire (du théorème 11). — *Pour qu'une fonction f soit finement holomorphe dans un ouvert fin U de $\mathbf{C}$ il faut et il suffit que tout point de U possède un voisinage fin V dans U tel que V soit compact pour la topologie ordinaire et que la restriction de f à V appartienne à $R(V)$.*

La nécessité résulte de l'énoncé *a*) du théorème 11 pour $n = 0$, et la suffisance de ce qu'on vient de dire au sujet de $R(K)$.

Ce résultat — dû à Lyons et O'Farrell [17] — montre que la présente notion de fonction finement holomorphe (voir la définition 3) est identique à la notion plus restrictive en apparence que j'avais proposée antérieurement, voir [10].

13. Théorème. — *a*) *Si $f : U \to \mathbf{C}$ et $g : V \to \mathbf{C}$ sont finement holomorphes avec $f(U) \subset V$ alors $g \circ f : U \to \mathbf{C}$ est finement holomorphe et on a $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$ dans U.*

b) Si $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *est finement holomorphe et injective alors l'application inverse* $g := f^{-1}$ *est finement holomorphe dans l'ouvert fin* $f(\mathrm{U})$, *et on a* $f' \neq 0$ *(dans* U) *et* $g' = 1/f' \circ g$ *(dans* $f(\mathrm{U})$).

c) Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbf{C}$ *finement holomorphe et soit* $z_0 \in \mathrm{U}$. *Pour que la restriction de* f *à un voisinage fin convenable* V *de* z_0 *dans* U *soit injective il faut et il suffit que* $f'(z_0) \neq 0$.

Preuve. – L'énoncé *a*) s'obtient facilement moyennant la remarque 2) au théorème 11.

Pour vérifier le premier énoncé dans *b*) il s'agit d'après l'énoncé 2 de la définition 3 de montrer que les fonctions $w \longmapsto g(w)$ et $w \longmapsto wg(w)$ sont finement harmoniques dans $f(\mathrm{U})$, ensemble finement ouvert d'après le 2e corollaire du théorème 4. Comme f est un morphisme pour la structure harmonique fine, d'après le 1er corollaire du même théorème, l'inverse $g = f^{-1}$ est également un tel morphisme, voir [10, th. 8]. Comme les fonctions $z \longmapsto z$ et $z \longmapsto zf(z)$ sont finement harmoniques (dans U), par hypothèse, leurs composées $w \longmapsto g(w)$ et $w \longmapsto g(w)w$ avec le morphisme g sont bien finement harmoniques (dans $f(\mathrm{U})$) selon [10, th. 5]. – Les relations $f' \neq 0$ et $g' = 1/f' \circ g$ résultent par exemple de la formule dans l'énoncé *a*), utilisée pour l'application identique $f \circ g$ dans notre cas.

On vient donc de vérifier la nécessité de la condition $f'(z_0) \neq 0$ dans l'énoncé *c*). La suffisance de cette condition résulte facilement de la remarque 2 au théorème 11. Car la relation $\partial \tilde{f}(z_0) = f'(z_0) \neq 0$ entraîne que $\tilde{f}$ est injective dans un voisinage ordinaire de z_0 dans $\mathbf{C}$.

14. Théorème (d'unicité). – *Une fonction finement holomorphe* f *dans un domaine fin* U *de* $\mathbf{C}$ *est complètement déterminée par ses dérivées (fines)* $f^{(n)}(z_0)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ *en un point prescrit* z_0 *de* U.

Preuve. – On peut supposer que $z_0 = 0$ et que $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$. D'après l'énoncé *b*) du théorème 11 pour $n = 0$ il existe un voisinage fin V de 0 dans U tel que $f(z)/z^m$ soit bornée sur V pour tout $m = 0,1,2,\ldots$, disons

$$(13) \qquad |f(z)| \leqslant a_n |z|^n, \qquad z \in \mathrm{V}.$$

On peut supposer en outre que V soit une partie finement ouverte et finement connexe du disque unité Ω, et que $|f| \leqslant 1$ dans V.

Notons $G^{\Omega}(.,0)$, resp. $G^{V}(.,0)$, la fonction de Green de pôle 0 pour Ω, resp. pour V, voir [9]. La fonction $-\log|f|$ est finement hyperharmonique et $\geqslant 0$ dans V selon [10, th. 5]. On a d'après (13)

$$\begin{aligned} -\log|f(z)| &\geqslant -n\log|z| - \log a_n \\ &\geqslant nG^{V}(z,0) - \log a_n \end{aligned}$$

dans V, car $-\log|z| = G^{\Omega}(z,0) \geqslant G^{V}(z,0)$.

Comme $G^{V}(.,0)$ est finement continue, et que $G^{V}(0,0) = +\infty$, il existe un voisinage fin et finement fermé W_n de 0 dans V tel que

$$\frac{1}{2}nG^{V}(z,0) \geqslant \log a_n, \qquad z \in W_n.$$

La fonction

$$u(z) := -\log|f(z)| - \frac{1}{2}nG^{V}(z,0) \tag{14}$$

est alors $\geqslant 0$ sur W_n. Elle est finement hyperharmonique et $\geqslant -\frac{1}{2}nG^{V}(z,0)$ dans l'ouvert fin $V \backslash W_n$. Noter que $G^{V}(.,0)$ est un potentiel fin relatif à V, voir [9]. Enfin on a

$$u \geqslant 0 \qquad \text{sur} \qquad V \cap \partial_{\text{fine}}(V \backslash W_n) \qquad (\subset W_n),$$

où ∂_{fine} note la frontière fine. Il en résulte d'après un principe du minimum à la frontière fine relative qu'on a $u \geqslant 0$ dans $V \backslash W_n$ et par suite dans V tout entier, voir [6, th. 10.8].

Comme $G^{V}(z,0) > 0$ pour tout $z \in V$ on en tire de (14) pour $n \to \infty$ que $f = 0$ dans V, et par conséquent dans U tout entier selon le 2[e] corollaire au théorème 4.

Remarque. — La question se pose de déterminer tous les « jets » qui proviennent de quelque fonction finement holomorphe au voisinage fin de 0. On peut montrer (en faisant décroître très rapidement les z_n dans l'exemple au § 11) qu'il existe de tels jets à croissance aussi rapide que l'on veut. D'autre part il existe des jets qui ne proviennent d'aucune fonction finement holomorphe. En effet, dans l'exemple cité soit $\Sigma c_n z^n = \Sigma f^{(n)}(0) z^n/n!$ la série de Taylor de la fonction finement holomorphe f au voisinage fin de 0. La série intégrée $\Sigma c_n z^{n+1}/(n+1)$ ne peut pas être la série de Taylor d'une fonction finement holomorphe F au voisinage fin de 0. Car on aurait alors $F' = f$ dans ce voisinage fin (qu'on pourrait supposer finement ouvert et finement connexe) d'après le théorème d'unicité.

DÉFINITION. — *La multiplicité d'un zéro* $z_0 \in U$ *d'une fonction finement holomorphe* $f : U \to \mathbf{C}$ *(non-identique à* 0 *au voisinage fin de* z_0*) est le plus petit parmi les entiers* $n \geqslant 0$ *tel que* $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

C'est aussi le plus grand entier n tel que la fonction

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$$

soit bornée (pour $z \neq z_0$) dans un voisinage fin de z_0, donc prolongeable en une fonction finement holomorphe dans U (y compris z_0).

L'existence de cette multiplicité selon la première définition résulte du théorème d'unicité ci-dessus. L'équivalence des deux définitions découle facilement de l'énoncé *b*) du théorème 11 pour $n = 0$, compte tenu du corollaire au § 3.

15. THÉORÈME. — *L'ensemble des zéros d'une fonction finement holomorphe* $f \not\equiv 0$ *dans un domaine fin est au plus dénombrable.*

Preuve. — Soit (Ω_j) un recouvrement dénombrable de U par des disques de diamètre < 1, et considérons les composantes fines (en nombre dénombrable, on le sait) des ouverts fins

$$\Omega_j \cap \{z \in U \mid |f(z)| < k\}, \qquad j, k \in \mathbf{N}.$$

D'après le 2e corollaire au § 4 on a $f \not\equiv 0$ dans chacune de ces composantes fines. On peut donc supposer que U soit contenu dans un disque de diamètre < 1, donc l'adhérence $\bar{U}$ dans un disque ouvert Ω de diamètre 1, et de plus qu'on ait $|f| \leqslant 1$ dans U (après multiplication de f par une petite constante $\neq 0$).

Cela étant, soit $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une suite finie quelconque de zéros (distincts) de f dans U, et soit m_j la multiplicité de z_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ (voir la définition au § 14). La fonction

$$\text{(15)} \qquad F(z) := f(z)(z-z_1)^{-m_1} \ldots (z-z_n)^{-m_n}$$

est alors bien définie dans $U \backslash \{z_1, \ldots z_n\}$ et se prolonge par continuité fine en une fonction finement holomorphe F dans U tout entier d'après le théorème 4 (propriété d'algèbre) et la seconde forme de la définition au § 14.

Pour tout $j = 1, \dots, n$ la fonction

$$h_j(z) = -\log|z-z_j|, \qquad z \in \Omega,$$

est > 0 puisque Ω est de diamètre 1. Elle se décompose comme suit

$$h_j(z) = G^{\Omega}(z,z_j) + g_j(z), \qquad z \in \Omega,$$

avec g_j harmonique et > 0 dans Ω, $G^{\Omega}(.,z_j)$ étant la fonction de Green, de pôle z_j, pour le disque Ω.

En balayant sur $\Omega \backslash U$ (relativement à Ω) — ce qui laisse g_j invariante puisque $\bar{U} \subset \Omega$ — on obtient

$$\hat{R}_{h_j}^{\complement U} = \hat{R}_{G^{\Omega}(.,z_j)}^{\complement U} + g_j,$$

d'où par soustraction

$$h_j - \hat{R}_{h_j}^{\complement U} = G^{U}(.,z_j), \tag{16}$$

la fonction de Green de pôle z_j pour le domaine fin U $(\subset \Omega)$, voir [9].

D'après (15), (16) et l'inégalité $|f| \leqslant 1$ il vient

$$\begin{aligned}(17)\quad 0 \leqslant -\log|f| &= \sum_{j=1}^{n} m_j h_j - \log|F| \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j G^{U}(.,z_j) + \sum_{j=1}^{n} m_j \hat{R}_{h_j}^{\complement U} - \log|F|.\end{aligned}$$

Or $p = \sum_{j=1}^{n} m_j G^{U}(.,z_j)$ est un potentiel fin sur U d'après [6, th. 10.6] puisque chaque $G^{U}(.,z_j)$ est un potentiel fin sur U, voir [9]. L'inégalité (17) montre que

$$\log|F| - \sum_{j=1}^{n} m_j \hat{R}_{h_j}^{\complement U}$$

est une minorante finement hypoharmonique de ce potentiel fin p sur U. Elle est donc non-positive (voir [6, déf. 10.5]), de sorte qu'on a

$$\log|F| \leqslant \sum_{j=1}^{n} m_j \hat{R}_{h_j}^{\complement U} \qquad \text{dans U}.$$

D'après (17) on en tire l'inégalité du type de Jensen

$$(18) \qquad \sum_{j=1}^{n} m_j G^{U}(z,z_j) \leqslant -\log|f(z)|, \qquad z \in U.$$

Comme $G^U(z,z_j) > 0$, cette inégalité (18), utilisée pour un $z \in U$ tel que $f(z) \neq 0$, montre que l'ensemble de tous les zéros de f dans U est au plus dénombrable.

16. Les espaces de Banach $\mathcal{O}^p(U)$, $p > 2$. — Soit U un ouvert fin de **C**, et posons

$$\mathcal{O}^p(U) = \mathcal{O}(U) \cap L^p(U), \qquad 1 \leqslant p \leqslant +\infty.$$

C'est l'ensemble des fonctions finement holomorphes dans U appartenant à l'espace de Banach $L^p(U)$ (formé avec la mesure de Lebesgue λ). Rappeler que deux fonctions finement continues dans U sont identiques lorsqu'elles sont égales p.p. Pour $p = +\infty$ la norme sur $\mathcal{O}^p(U)$ est donc simplement la borne supérieure du module.

Proposition. — *On a* $\int_U f\bar{\partial}\varphi = 0$ *pour tout* $f \in \mathcal{O}^2(U)$ *et tout* $\varphi \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ *de support compact et tel que* $\varphi = 0$ *q.p. dans* $\complement U$.

Preuve. — Soit Ω un domaine de Green contenant le support compact de φ. En remplaçant U par $\Omega \cap U$ on peut supposer que $U \subset \Omega$. Comme f est finement holomorphe il existe d'après la définition 3 un recouvrement $\mathscr{V}$ de U par des ouverts fins V d'adhérence compacte $\bar{V} \subset U$ tel que $f|_V$ se prolonge en une fonction $f_V \in \mathcal{O}(\Omega,V)$. Pour tout $\varphi \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,V)$ on a $\bar{\partial}\varphi = 0$ p.p. dans $\Omega \backslash V$ d'après [13, cor. 10], et par suite

$$\int_U f\bar{\partial}\varphi = \int_V f\bar{\partial}\varphi = \int_V f_V\bar{\partial}\varphi = 0$$

selon le lemme 2. Comme $f \in L^2(U)$, l'équation $\int_U f\bar{\partial}\varphi = 0$ se prolonge par continuité et linéarité à tout $\varphi \in \hat{\mathscr{D}}^1(\Omega,U)$ d'après [13, prop. 10]. Cela achève la démonstration, car la restriction de la fonction donnée φ à Ω appartient à $\hat{\mathscr{D}}^1(\Omega)$ parce que $\varphi = 0$ q.p. dans $\complement\Omega$ $(\subset \complement U)$, voir [4, p. 355, p. 359].

Remarques. – 1) L'hypothèse que φ soit de support compact est inutile [5]. – L'hypothèse $f \in \mathcal{O}^2(U)$ peut évidemment être affaiblie à ce que f (de $L^2(U)$) soit finement holomorphe quasi partout dans U.

2) D'après un théorème de Havin [14] la condition $\int f\bar{\partial}\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ avec $\varphi = 0$ q.p. dans $\complement U$ est nécessaire et suffisante pour qu'on puisse approcher f dans $L^2(U)$ par des (restrictions à U des) fonctions holomorphes dans des ouverts ordinaires contenant U.

Il en résulte d'après notre proposition que la condition $\int f\bar{\partial}\varphi = 0$ (pour tout φ comme ci-dessus) caractérise les éléments f de l'*adhérence* de $\mathcal{O}^2(U)$ dans $L^2(U)$. On peut montrer que cette adhérence de $\mathcal{O}^2(U)$ est encore l'image par l'opérateur ∂ (au sens fin) de l'espace de toutes les fonctions finement harmoniques complexes u sur U telles que $\partial u \in L^2(U)$.

3) Il existe un ouvert fin borné $U \subset \mathbf{C}$ tel que $\mathcal{O}^2(U)$ n'est pas fermé dans $L^2(U)$, autrement dit que la condition $\int f\bar{\partial}\varphi = 0$ (pour les φ indiqués) n'est pas suffisante pour que f de $L^2(U)$ soit finement holomorphe (même q.p.) dans U. On montre sans peine qu'un récent exemple de Øksendal [25] sert pour ce but. En vertu du dernier énoncé de la remarque précédente il semble que ceci rend inexact un énoncé-clef de [21].

4) Notons $L^p_a(U)$ l'ensemble des $f \in L^p(U)$ qui admettent un prolongement holomorphe dans un voisinage ordinaire de U. Évidemment $L^p_a(U) \subset \mathcal{O}^p(U)$. Pour $1 < p < 2$ on sait d'après Havin [14] que $L^p_a(U)$, donc aussi $\mathcal{O}^p(U)$, est *dense* dans le sous-espace fermé $L^p(U, \mathring{U})$ de $L^p(U)$ formé par les f de $L^p(U)$ qui sont holomorphes

(5) Supposons d'abord que $\mathbf{C}\backslash U$ soit *non-polaire*. Il contient donc un compact non-polaire K. Toute composante Ω de $\complement K$ est alors un domaine de Green, et on a $\varphi = 0$ q.p. sur la frontière de Ω (car elle est contenue dans $K \subset \complement U$). La restriction de φ à Ω appartient donc à $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega)$ d'après [4, p. 355, p. 359], et plus précisément à $\hat{\mathcal{D}}^1(\Omega, U \cap \Omega)$. Le raisonnement dans le texte montre que $\int_{\Omega \cap U} f\bar{\partial}\varphi = 0$, d'où le résultat par sommation. – Dans le cas $\complement U$ *polaire* l'hypothèse qu'on ait $\varphi = 0$ q.p. dans $\complement U$ est toujours remplie, et il suffit d'approcher $\varphi \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ par des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbf{C})$ en norme de Dirichlet, ce qui est possible d'après [4, p. 318], vu que les seules fonctions harmoniques appartenant à $\mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ sont les constantes.

dans l'intérieur ordinaire $\mathring{U}$ de U ; il en est de même pour $p = 1$, au moins si U est borné et $\mathring{U} = \varnothing$. – Pour $p = 2$, $L_a^p(U)$ et $\mathcal{O}^p(U)$ ont encore la même adhérence, voir la remarque 2 ci-dessus. – Pour $2 < p \leqslant +\infty$, $\mathcal{O}^p(U)$ est *fermé* dans $L^p(U)$ (voir le théorème plus loin), et $\mathcal{O}^p(U)$ peut être un sous-espace propre de $L^p(U,\mathring{U})$ (même si $\mathring{U}$ est vide).

LEMME. – *On suppose* $2 < p \leqslant +\infty$. *Pour tout* $f \in \mathcal{O}^p(U)$ *et tout* $\varphi \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ *de support compact tel que* $\varphi = 0$ q.p. *dans* $\complement U$ *on a*

$$\int_U \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\, \bar\partial\varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta) = 0, \qquad z \in U,$$

et par suite

$$f(z)\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_U \frac{1}{z - \zeta}\, f(\zeta)\bar\partial\varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta) \quad \textit{p.p. pour} \quad z \in U.$$

Preuve. – Pour z fixé dans U la fonction

$$g(\zeta) := (f(z) - f(\zeta))/(z-\zeta) \quad \text{de} \quad \zeta \in U,$$

interprétée comme la dérivée (fine) $f'(z)$ pour $\zeta = z$, est finement holomorphe dans U, d'après le corollaire au § 3. De plus, $g \in L^2(U)$, donc $g \in \mathcal{O}^2(U)$. Car g est bornée dans un voisinage fin V de z dans U, et

$$\int_{U\setminus V} |g(\zeta)|^2\, d\lambda(\zeta)$$
$$\leqslant \left(\int_{\bar U\setminus V} |z-\zeta|^{-\frac{2p}{p-2}}\, d\lambda(\zeta)\right)^{1-\frac{2}{p}} \left(\int_U |f(z)-f(\zeta)|^p\, d\lambda(\zeta)\right)^{\frac{2}{p}} < +\infty$$

d'après l'inégalité de Hölder et le lemme 7 parce qu'on peut supposer $\bar U$ compact et V finement ouvert. – D'où la première relation cherchée selon la proposition plus haut.

La seconde relation en découle pour tout $z \in U$ en lequel l'intégrale à droite et l'intégrale dans la formule de Green-Pompeiu (6), § 5,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{1}{z - \zeta}\, \bar\partial\varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta),$$

sont tous les deux absolument convergentes, et cela a lieu p.p. dans U puisque $f\bar{\partial}\varphi \in L^1_c(\mathbf{C})$. Rappeler qu'on a $\bar{\partial}\varphi = 0$ p.p. dans $\complement$U d'après [13, cor. 10].

Pour $p = +\infty$ on peut écrire « quasi partout » au lieu de « presque partout » parce qu'alors $f\bar{\partial}\varphi \in L^2_c$.

On peut maintenant donner une version du théorème 11 qui est uniforme par rapport aux fonctions de $\mathcal{O}^p(\mathrm{U})$:

THÉORÈME. — *On suppose* $2 < p \leqslant +\infty$. $\mathcal{O}^p(\mathrm{U})$ *est alors fermé dans* $L^p(\mathrm{U})$, *donc un espace de Banach. Pour tout point donné* z_0 *de* U *le voisinage fin* V *de* z_0 *dans* U *mentionné dans le théorème* 11 *peut être choisi de façon que les énoncés a), b) et c) de ce théorème sont valables simultanément pour tout* f *de* $\mathcal{O}^p(\mathrm{U})$.

En particulier on a $f|_{\mathrm{V}} \in \mathrm{R}(\mathrm{V})$ *pour tout* $f \in \mathcal{O}^p(\mathrm{U})$ (*si l'on prend* V *compact*). *De plus on a*

$$(19) \qquad \left|f^{(n)}(w) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(w-z)^k f^{(n+k)}(z)\right| \leqslant a_{m,n}\|f\|_{L^p}|w-z|^m$$

pour tout $f \in \mathcal{O}^p(\mathrm{U})$, *tout* $(z,w) \in \mathrm{V} \times \mathrm{V}$, *et tout* $m, n = 0,1,2,\ldots$, *avec des constantes* $a_{m,n}$ *indépendantes de* f, z *et* w.

Preuve. — On peut supposer U borné. Il existe une fonction $\varphi \in \mathrm{BLD}(\mathbf{C})$ telle que $\varphi = 1$ dans un voisinage fin U_0 de z_0 et que $\varphi = 0$ q.p. dans $\complement$U [6]. Pour tout $f \in \mathcal{O}^p(\mathrm{U})$ on a alors d'après le lemme ci-dessus p.p. pour $z \in \mathrm{U}_0$

$$(20) \qquad f(z) = f(z)\varphi(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{U}} \frac{1}{z-\zeta} f(\zeta)\bar{\partial}\varphi(\zeta)\, d\lambda(\zeta).$$

L'intégrale à droite est la transformée de Cauchy-Pompeiu de la fonction

$$\pi^{-1} f\bar{\partial}\varphi \in L_c^{\frac{2p}{p+2}},$$

[6] Il suffit de choisir un disque ouvert $\Omega \supset \mathrm{U}$ et un G-potentiel strict $\mathrm{G}\mu$ d'une mesure positive μ sur Ω de G-énergie finie (par exemple μ = la mesure de Lebesgue sur Ω). On peut alors prendre $\varphi = \min(1, a\psi)$ avec

$$\varepsilon = \mathrm{G}\mu - \hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{G}\mu}^{\Omega\setminus\mathrm{U}} \quad (\in \hat{\mathcal{D}}^1_+(\Omega))$$

(balayage par rapport à Ω), la constante a étant choisie telle que $a\psi(z_0) > 1$.

qui s'annule p.p. dans U_0 d'après [13, cor. 10]. (Noter que $f \in L^p$ et $\bar{\partial}\varphi \in L^2$.) Comme $p > 2$ il vient $2p/(p+2) > 1$, d'où la proposition 9 s'applique. Il en résulte que l'intégrale dans (20) représente une fonction finement holomorphe dans U_0, qui est alors égale à f *partout* dans U_0. Comme dans la preuve de la proposition 9 on prend pour V un voisinage fin de z_0 dans U_0 tel que V soit compact pour la topologie ordinaire et que (7) soit rempli (voir le lemme 7). Les énoncés *a*), *b*) et *c*) du théorème 11 sont alors valables pour tout $f \in \mathcal{O}^p(U)$, comme on l'a démontré dans la preuve de la proposition 9. L'énoncé *a*) affirme pour $n = 0$ que $f|_V \in R(V)$ (voir § 12). Enfin l'inégalité (19) avec

$$a_{m,n} = \pi^{-1} A_{m,n} \|\bar{\partial}\varphi\|_{L^2}$$

découle de l'inégalité correspondante (10) (dans la preuve de la proposition 9), car on a

$$\|f\bar{\partial}\varphi\|_{L^{2p/(p+2)}} \leqslant \|f\|_{L^p}\|\bar{\partial}\varphi\|_{L^2} \tag{21}$$

d'après l'inégalité de Hölder.

Si l'on prend $m = 0$ dans (19) il vient

$$\sup_{w \in V} |f^{(n)}(w)| \leqslant a_{0,n}\|f\|_{L^p} \tag{22}$$

pour tout $f \in \mathcal{O}^p(U)$, ce qui montre (pour $n = 0$) que toute suite $(f_j) \subset \mathcal{O}^p(U)$ qui converge dans $L^p(U)$ (au sens de la norme) à un élément $f_0 \in L^p(U)$, est une suite de Cauchy pour la semi-norme $f \longmapsto \sup_{w \in V} |f(w)|$ sur $\mathcal{O}^p(U)$, donc converge dans l'intérieur fin V' uniformément à une fonction finement holomorphe dans V' d'après le théorème 4. En faisant varier le point z_0 (donc aussi les voisinages fins V) ces fonctions-limites finement holomorphes se recollent (deux fonctions finement continues étant égales dès qu'elles coïncident p.p.). Autrement dit, ces fonctions-limites admettent un prolongement commun à U tout entier qui est finement holomorphe dans U, et égal à f_0 p.p. dans U d'après le principe quasi-Lindelöf. Cela montre qu'on a $f_0 \in \mathcal{O}^p(U)$, d'où $\mathcal{O}^p(U)$ est fermé dans $L^p(U)$.

COROLLAIRE. — *Pour tout* $z \in U$ *et tout* $n = 0,1,2,\ldots$, *la forme linéaire* $D_z^{(n)}$ *sur* $\mathcal{O}^p(U)$ $(2 < p \leqslant +\infty)$, *définie par*

$$D_z^{(n)} f = f^{(n)}(z),$$

est continue. Sa norme $\|D_z^{(n)}\|$ *est une fonction finement continue dans* U.

En effet, le premier énoncé résulte de (19) pour $m = 0$, $w = z_0$ (et z quelconque), voir aussi (22), tandis que le second énoncé découle de (19) pour $m = 1$ comme suit :

$$\big|\|D_w^{(n)}\| - \|D_z^{(n)}\|\big| \leqslant \|D_w^{(n)} - D_z^{(n)}\| = \sup_{\|f\|_{L^p} \leqslant 1} |f^{(n)}(w) - f^{(n)}(z)| \leqslant a_{1,n}|w-z|$$

pour tout $z, w \in V$.

Remarque. – Pour $U = K'$ (l'intérieur fin d'un compact $K \subset \mathbf{C}$) et $p = +\infty$ le premier énoncé étend un résultat analogue de Debiard et Gaveau [2] sur la sous-algèbre $R(K)$ de $\mathcal{O}^\infty(K')$. Ce dernier résultat fut étendu par Lyons [15] à l'algèbre intermédiaire $\mathscr{C}(K) \cap \mathcal{O}(K')$. Le fait que $\|D_z^{(1)}\|$ est finement localement borné dans le cas de l'algèbre $\mathscr{C}(K) \cap \mathcal{O}(K')$ est dû à Lyons [16].

17. Appendice. – On donne une démonstration non-probabiliste du lemme-clef de Lyons [15], cité dans le § 6 plus haut. On se ramène au cas $z_0 = 0\,(\in U)$. Comme $\complement U$ est effilé en 0 il existe un ouvert ordinaire E effilé en 0 et contenant $\complement U$. Le noyau de Green pour le disque unité Ω s'écrit

$$G(z,w) = \log \frac{|z-w^*|}{|z-w|\,|w^*|}, \qquad z, w \in \Omega,$$

avec la notation $w^* = 1/\bar{w}$ et l'interprétation $G(z,0) = -\log|z|$. Dans ce qui suit on suppose

$$|z| < \frac{1}{2}, \qquad |w| < \frac{1}{2},$$

d'où $|w^*| > 2$, $\frac{3}{4}|w^*| < |z-w^*| < \frac{5}{4}|w^*|$, et par suite

$$\log \frac{3/4}{|z-w|} < G(z,w) < \log \frac{5/4}{|z-w|}.$$

La G-capacité d'un ensemble borélien $A \subset \Omega$ se définit par

$$1/\text{G-cap } A = \inf \iint G(z,w)\, d\mu(z)\, d\mu(w),$$

où μ parcourt les mesures de probabilité portées par A. Lorsque $A \subset \frac{1}{2}\Omega$ il vient

$$\log\frac{3}{4} \leqslant \iint\left(G(z,w) - \log\frac{1}{|z-w|}\right) d\mu(z)\, d\mu(w) \leqslant \log\frac{5}{4},$$

d'où les inégalités suivantes (connues) entre la G-capacité et la capacité logarithmique (qu'on note cap) :

$$\log\frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{\text{G-cap A}} - \log\frac{1}{\text{cap A}} \leqslant \log\frac{5}{4}, \qquad A \subset \frac{1}{2}\Omega.$$

Ceci s'applique pour $A = E \cap A_n(z)$ pour $n \geqslant 2$, E ouvert et effilé en 0, et $|z| < \frac{1}{4}\cdot$ Le G-potentiel d'équilibre pour $E \cap A_n(z)$, pris en z, s'exprime comme suit au moyen de la mesure d'équilibre μ associée (balayage relatif à Ω) :

$$\hat{R}_1^{E \cap A_n(z)}(z) = \int_\Omega G(z, w)\, d\mu(w) \geqslant \int_{\overline{A_n(z)}} \log\frac{3/4}{|z-w|}\, d\mu(w)$$

$$\geqslant \log\left(\frac{3}{4}\cdot 2^n\right)\cdot \text{G-cap}(E \cap A_n(z))$$

$$\geqslant \log\left(\frac{3}{4}\cdot 2^n\right)\cdot\left(\log\frac{1}{\text{cap}\,(E \cap A_n(z))} + \log\frac{5}{4}\right)^{-1}.$$

Comme $\log\frac{3}{4} \geqslant -\frac{1}{2}\log 2 \geqslant -\frac{1}{2}\log(2^n)$, et que

$$\log\frac{1}{\text{cap}\,(E \cap A_n(z))} \geqslant \log\frac{1}{\text{cap}\,A_n(z)} = \log(2^n) \geqslant \log\frac{5}{4},$$

il vient en somme $\left(\text{pour } n \geqslant 2,\ |z| < \frac{1}{4}\right)$:

$$\hat{R}_1^{E \cap A_n(z)}(z) \geqslant \frac{(n/4)\log 2}{-\log\text{cap}\,(E \cap A_n(z))}. \tag{23}$$

Or on sait d'après Brelot [1, p. 90] que l'effilement est toujours « fort ».

Au nombre donné $\alpha > 0$ correspond donc $r > 0$ $(r<1/4)$ tel que

$$\hat{R}_1^{E\cap 2r\Omega}(0) < \frac{1}{4\alpha}.$$

Choisissons N_α tel que $2^{-N_\alpha} < r$, et un voisinage fin U_α de 0 tel que $U_\alpha \subset r\Omega$ et que

$$\hat{R}_1^{E\cap 2r\Omega}(z) < \frac{1}{4\alpha} \quad \text{pour tout} \quad z \in U_\alpha.$$

Comme $A_n(z) \subset 2r\Omega$ pour $z \in U_\alpha \left(\subset \frac{1}{4}\Omega\right)$ et $n \geqslant N_\alpha$, il en résulte que

$$\hat{R}_1^{E\cap A_n(z)}(z) < \frac{1}{4\alpha} \quad \text{pour} \quad z \in U_\alpha, \quad n \geqslant N_\alpha.$$

D'après (23) ceci entraîne l'inégalité cherchée

$$\operatorname{cap}^*(A_n(z)\backslash U) \leqslant \operatorname{cap}(E \cap A_n(z)) \leqslant 2^{-n\alpha}$$

pour $z \in U_\alpha$ et $n \geqslant N_\alpha$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Introduction axiomatique de l'effilement, *Annali Mat. Pura Appl.*, (IV), 57 (1962), 77-96.

[2] A. Debiard et B. Gaveau, Potentiel fin et algèbres de fonctions analytiques I, *J. Funct. Anal.*, 16 (1974), 289-304.

[3] A. Debiard et B. Gaveau, Potentiel fin et algèbres de fonctions analytiques II, *J. Funct. Anal.*, 17 (1974), 296-310.

[4] J. Deny et J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953-54), 305-370.

[5] B. Fuglede, Connexion en topologie fine et balayage des mesures, *Ann. Inst. Fourier*, 21, 3 (1971), 227-244.

[6] B. Fuglede, Finely Harmonic Functions, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 289, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[7] B. Fuglede, Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, 24, 4 (1974), 77-91.

[8] B. Fuglede, Asymptotic paths for subharmonic functions, *Math, Ann.* 213 (1975); 261-274.

[9] B. Fuglede, Sur la fonction de Green pour un domaine fin, *Ann. Inst. Fourier*, 25, 3-4 (1975), 201-206.

[10] B. FUGLEDE, Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions, *Ann. Acad. Sci. Fennicæ* (A.I.), 2 (1976), 113-127.

[11] B. FUGLEDE, Invariant characterization of the fine topology in potential theory, *Math. Ann.*, 241 (1979), 187-192.

[12] B. FUGLEDE, Fine topology and finely holomorphic functions, To appear in the *Proceedings of the 18th Scandinavian Congress of Mathematicians*, Aarhus 1980. Birkhäuser Verlag.

[13] B. FUGLEDE, Fonctions BLD et fonctions finement surharmoniques, KUMI *Preprint Series* n° 15, Copenhagen 1980. (A paraître dans *Séminaire de Théorie du Potentiel*, Paris.)

[14] V. P. HAVIN, Approximation in the mean by analytic functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, 5 (1968). (Russian)) – *Soviet Math. Dokl.* 9, 1 (1968), 245-248.

[15] T. LYONS, Finely holomorphic functions, *J. Funct. Anal.*, 37 (1980), 1-18.

[16] T. LYONS, A theorem in fine potential theory and applications to finely holomorphic functions, *J. Funct. Anal.*, 37 (1980), 19-26.

[17] T. LYONS and A. G. O'FARRELL. (Personal communication.)

[18] R. MCKISSIC, A non-trivial normal sup norm algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 391-395.

[19] NGUYEN-XUAN-LOC, Sur la théorie des fonctions finement holomorphes. *Bull. Sci. Math.*, 102 (1978), 271-308.

[20] NGUYEN-XUAN-LOC, Sur la théorie des fonctions finement holomorphes (II). Dans : *Complex Analysis Joensuu*, 1978, 289-300. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 747, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[21] NGUYEN-XUAN-LOC, Singularities of locally analytic processes (with applications in the study of finely holomorphic and finely harmonic functions). In : *Potential Theory*, Copenhagen, 1979, 267-288. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 787. Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[22] G. POLYA and G. SZEGÖ, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, *Annals of Mathematics Studies*, n° 27, Princeton, 1951.

[23] I. N. VEKUA, *Generalized Analytic Functions*, Oxford-London-New York-Paris, 1962.

[24] H. WHITNEY, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36 (1934), 63-89.

[25] B. ØKSENDAL, Finely harmonic functions need not be differentiable quasi-everywhere, (Manuscript, 1980).

Manuscrit reçu le 30 décembre 1980.

Bent FUGLEDE,

Institut de Mathématique
Université de Copenhague
Universitetsparken 5
DK-2100 København Ø (Danemark).