

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL LEHMANN

Résidus des connexions à singularités et classes caractéristiques

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 1 (1981), p. 83-98

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_83_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

RÉSIDUS DES CONNEXIONS A SINGULARITÉS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

par Daniel LEHMANN

1. Introduction.

Donnons nous :

- une variété différentiable V ,
- un entier $k \geq 1$,
- une triangulation différentiable K de V ,
- une partie fermée S de V telle que

$$S \cap sk^{2k-1} K = \emptyset$$

($sk^i K$ désignant le i -squelette de K),

- un groupe de Lie G ,
- un G -fibré principal différentiable $E \rightarrow V$,
- une connexion ω sur la restriction $E|_{V-S}$ du fibré E à l'ouvert $V-S$ (une telle connexion sera encore appelée “connexion à singularités” sur E , d'ensemble singulier S).

Puisque l'inclusion naturelle $sk^{2k-1} K \subset V$ induit un isomorphisme $H^i(V, \mathbb{R}) \rightarrow H^i(sk^{2k-1} K, \mathbb{R})$ pour $i \leq 2k-2$, la théorie de Chern-Weil ordinaire appliquée à $E|_U, \omega|_U$, où U désigne un voisinage tubulaire de $sk^{2k-1} K$ dans $V-S$, montre que les classes caractéristiques réelles de E peuvent se calculer à partir de la connexion à singularités ω en dimension $i \leq 2k-2$. Nous allons montrer *qu'il en est encore ainsi pour $i = 2k$* : ce sera l'objet de ce que nous appellerons le “théorème des résidus” pour la connexion à singularités ω . Ce théorème des résidus présente l'intérêt de coiffer simultanément 2 aspects, a priori assez distincts, de la théorie des classes caractéristiques :

— supposant $S = \emptyset$, on retrouve évidemment la théorie classique de Chern-Weil permettant de calculer les classes caractéristiques réelles à l'aide de la courbure d'une connexion.

— si la restriction $E_{|sk^{2k-1}K}$ de E au $2k-1$ squelette est triviale, il existe une section différentiable σ de $E|_U$, où U désigne un voisinage tubulaire de $sk^{2k-1}K$ dans V ; prenant alors pour S l'ensemble $V-U$, et pour ω la connexion plate à singularités définie par la trivialisation σ (caractérisée par $\sigma^*\omega = 0$), le théorème des résidus fournit, si G est compact connexe, un cocycle $\mu_\sigma \in Z^{2k}(K, \pi_{2k-1}(G) \otimes \mathbf{R})$ qui est l'image par $\pi_{2k-1}(G) \rightarrow \pi_{2k-1}(G) \otimes \mathbf{R}$ du cocycle obstruteur à la possibilité de prolonger σ à $sk^{2k}K$. [Si $\pi_{2k-1}(G)$ est sans torsion, la nullité de cette obstruction est suffisante pour que σ soit prolongeable à $sk^{2k}K$].

Par exemple, si V est orientable compacte et de dimension 2, si $G = SO(2)$, et si $k=1$, les 2 cas particuliers précédents correspondent au théorème de Gauss-Bonnet et au théorème de Hopf exprimant la classe d'Euler du fibré comme égale respectivement à la courbure totale d'une connexion métrique ou à l'indice d'une section à singularités isolées. La formule de Riemann-Hurwitz pour les revêtements ramifiés apparaît aussi comme un cas particulier du théorème des résidus.

Si l'on suppose maintenant que le fibré E lui-même n'est défini qu'au dessus de $U = V - S$, et pas seulement la connexion ω , on peut encore définir les résidus, au moins si $\pi_{2k-1}(BG) = 0$; on verra qu'ils sont alors étroitement liés aux S -caractères de Chern-Simons [8].

2. Rappels et notations.

Pour toute variété différentiable W , on notera $A_{DR}^*(W)$ son algèbre de de Rham.

Notons \mathcal{G} l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, G , $I^k(G)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes P de degré k sur \mathcal{G} (ou applications k -linéaires symétriques $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \dots \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}$) qui sont invariants par la représentation adjointe de G sur \mathcal{G} .

Pour tout G-fibré principal différentiable $p: E \rightarrow V$ et toute connexion ω sur V , on notera : $\lambda_\omega: I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k}(V)$ l'application de Chern-Weil, à valeurs dans les $2k$ -formes fermées, et $T_\omega: I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k-1}(E)$ l'application "de transgression" (cf. [2]) qui vérifie :

$$(i) \quad dT_\omega(P) = p^* \lambda_\omega(P)$$

Si $\omega_0, \dots, \omega_r$ désigne une famille de $r+1$ connexions sur E , on notera :

$$\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r}: I^k(G) \rightarrow A_{DR}^{2k-r}(V)$$

l'application linéaire définie en [1] telle que

$$(ii) \quad d \cdot \Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r} = \sum_{i=0}^r (-1)^i \Delta_{\omega_0, \dots, \hat{\omega}_i, \dots, \omega_r}$$

En particulier, pour $r=0$, $\Delta_\omega = \lambda_\omega$ et

$$(iii) \quad d \cdot \Delta_{\omega, \omega'} = \lambda_{\omega'} - \lambda_\omega$$

Rappelons comment sont définies les applications T_ω et $\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r}$: pour tout polynôme $P \in I^k(G)$, on définit une 1-forme $\hat{\omega}$ (resp. $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega_0, \dots, \omega_r)$) sur $E \times [0, 1]$ (resp. sur $E \times \Delta^r$) à coefficients dans \mathcal{G} en posant :

$$\begin{cases} \hat{\omega}|_{E \times \{t\}} = t \omega & (t \in [0, 1]) \\ \hat{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{[resp. : } \begin{cases} \tilde{\omega}|_{E \times (t_0, \dots, t_r)} = \sum_{i=0}^r t_i \omega_i & \left(\begin{array}{l} 0 \leq t_i \leq 1 \\ \sum_{i=0}^r t_i = 1 \end{array} \right) \\ \tilde{\omega}|_{\{z\} \times \Delta^r} = 0 & (z \in E) \end{cases} \text{].}$$

On pose alors :

$$T_\omega(P) = \int_0^1 P(\hat{\Omega}) \quad \text{où} \quad \hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \frac{1}{2} \hat{\omega} \wedge \hat{\omega}$$

et où $\int_0^1: A_{DR}^{2k}(E \times [0, 1]) \rightarrow A_{DR}^{2k-1}(E)$ désigne l'intégration "le long de la fibre" $[0, 1]$ [resp. $\Delta_{\omega_0, \dots, \omega_r}(P) = \int_{\Delta^r} \lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ où

$\int_{\Delta'} : A_{DR}^{2k}(E \times \Delta') \longrightarrow A_{DR}^{2k-r}(E)$ désigne l'intégration "le long de la fibre" Δ' .

La formule (i) est en fait purement algébrique, et s'applique en particulier à l'algèbre de Weil $W(G) = \Lambda(\mathcal{G}^*) \otimes S(\mathcal{G}^*)$: elle s'écrit $dT_{\omega_0}(P) = P \in I^k(G) = [S^k(\mathcal{G}^*)]^G$ où ω_0 désigne l'unique connexion sur $W(G)$.

Si l'on considère le G -fibré principal de base un point ($G \rightarrow$ point), muni de son unique forme de connexion θ_G (qui n'est autre que la forme de Maurer-Cartan de G), on a au contraire $dT_{\theta_G}(P) = 0$, car la connexion θ_G est plate. [La $(2k-1)$ -forme fermée $T_{\theta_G}(P)$ sur G est en fait biinvariante]. On dira alors que P est *normalisé* (et l'on notera $P \in I_z^k(G)$) si la forme fermée $T_{\theta_G}(P)$ a ses périodes entières.

Pour la triangulation différentiable K de V , on notera : $\mathcal{I} : A_{DR}^*(V) \longrightarrow C^*(K, \mathbb{R})$ l'intégration des formes différentielles : $\langle \mathcal{I}(\alpha), c \rangle = \int_c \alpha$. Rappelons que \mathcal{I} induit en cohomologie un isomorphisme d'algèbres graduées $[\mathcal{I}] : H_{DR}^*(V) \xrightarrow{\cong} H^*(K, \mathbb{R})$ (de Rham).

3. Résidus des connexions avec singularités.

Donnons nous $(V, k, K, S$ et G) comme dans l'introduction, $p : E \rightarrow V$ un G -fibré principal différentiable, et ω une connexion à singularités sur E d'ensemble singulier S .

[En disant que K est une triangulation différentiable de V , nous sous-entendons en particulier que chaque i -simplexe $c : \Delta^i \rightarrow V$ est un difféomorphisme sur son image $c(\Delta^i)$, c'est-à-dire admet une extension \tilde{c} à un voisinage ouvert w_c du i -simplexe type Δ^i dans l'espace affine de dimension i qu'il engendre, qui est un difféomorphisme – au sens ordinaire – de w_c sur une sous-variété $\tilde{c}(w_c)$ de V].

Soit $c : \Delta^{2k} \rightarrow V$ un $2k$ -simplexe de K et s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage \tilde{w}_c de $c(\Delta^{2k})$ dans V . [Une telle section existe, puisque $c(\Delta^{2k})$ est contractile !]. A tout polynôme $P \in I^k(G)$, associons le nombre

$$\boxed{\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)}$$

(appelé *résidu* de (ω, P) par rapport à c), où ω_s désigne la connexion plate sur $E_{|\tilde{w}_c}$ associée à la trivialisation définie par s , et caractérisée par la relation $s^*(\omega_s) = 0$, la $(2k - 1)$ -forme $\Delta_{\omega_s, \omega}(P)$ n'étant évidemment définie que sur l'intersection $\tilde{w}_c \cap V - S$ des domaines de définition de ω_s et ω ; on remarquera, puisque $S \cap sk^{2k-1}K = \emptyset$, que ∂c a son support dans $\tilde{w}_c \cap V - S$.

LEMME 1. — *La définition ci-dessus du résidu ne dépend pas du choix de la section s .*

Notons en effet s_0 et s_1 deux sections de E définies au-dessus d'un même voisinage \tilde{w}_c de $c(\Delta^{2k})$ dans V .

D'après la formule (ii) du § 2, on a, sur $\tilde{w}_c \cap V - S$:

$$\Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) = -\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) + \text{cobord}$$

et par conséquent,

$$\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) = - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P).$$

Soit $\tilde{\omega}$ la connexion sur $E_{|\tilde{w}_c} \times [0, 1] \longrightarrow \tilde{w}_c \times [0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} \tilde{\omega}|_{\tilde{w}_c \times \{t\}} = t\omega_{s_1} + (1-t)\omega_{s_0} \\ \tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0. \end{cases}$$

Par construction de $\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}$, $\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) = \int_0^1 \lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ sur \tilde{w}_c et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) &= \int_{\partial c \times [0, 1]} \lambda_{\tilde{\omega}}(P) = \int_{\partial(c \times [0, 1])} \lambda_{\tilde{\omega}}(P) \\ &\quad + \int_c \lambda_{\omega_{s_0}}(P) - \int_c \lambda_{\omega_{s_1}}(P). \end{aligned}$$

Puisque $\lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ est fermée, $\int_{\partial(c \times [0, 1])} \lambda_{\tilde{\omega}}(P) = 0$. Puisque ω_{s_0} et ω_{s_1} sont des connexions plates, $\lambda_{\omega_{s_0}}(P) = \lambda_{\omega_{s_1}}(P) = 0$; et finalement $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) = 0$, d'où le lemme.

4. Théorie de Chern-Weil pour les connexions à singularités.

Avec les notations du § 3, on associe, à tout G-fibré principal différentiable $E \rightarrow V$, à toute connexion ω à singularités sur E d'ensemble singulier S inclus dans $V - sk^{2k-1}K$, et à tout polynôme $P \in I^k(G)$, une $2k$ -cochaîne simpliciale $Rés(\omega, P) \in C^{2k}(K, \mathbf{R})$ en posant, pour tout $2k$ -simplexe c de K :

$$\langle Rés(\omega, P), c \rangle = Rés_c(\omega, P).$$

Notons $Rés(\omega) : I^k(G) \rightarrow C^{2k}(K, \mathbf{R})$ l'application linéaire $P \mapsto Rés(\omega, P)$.

THEOREME 1 (théorème des résidus). —

(i) *L'application $Rés(\omega)$ prend ses valeurs dans l'espace $Z^{2k}(K, \mathbf{R})$ des cocycles de $C^{2k}(K, \mathbf{R})$.*

(ii) *Notant $[Rés(\omega)] : I^k(G) \rightarrow H^{2k}(K, \mathbf{R})$, l'application induite par $Rés(\omega)$ en cohomologie, $[J]^{-1} \circ [Rés(\omega)]$ est égale à l'homomorphisme caractéristique de Chern-Weil*

$\lambda : I^k(G) \rightarrow H_{DR}^{2k}(V)$, et est donc en particulier indépendante des choix de K, S et ω .

(iii) *Si $\bar{\omega}$ est une connexion sans singularité sur $E(S = \emptyset)$, $Rés(\bar{\omega}) = J \circ \lambda_{\bar{\omega}}$.*

Soit g un $(2k+1)$ -simplexe de K et notons s une section de E au-dessus d'un voisinage \tilde{w}_g de $g(\Delta^{2k+1})$ dans V . On a alors :

$$\langle d Rés(\omega, P), g \rangle = \langle Rés(\omega, P), dg \rangle = \int_{\partial g} \Delta_{\omega_s, \omega}(P) = 0,$$

d'où la partie (i) du théorème.

Puisque l'homomorphisme caractéristique $\lambda : I^k(G) \rightarrow H_{DR}^{2k}(V, \mathbf{R})$ est induit, à partir de n'importe quelle connexion $\bar{\omega}$ sans singularité sur E , par l'homomorphisme $\lambda_{\bar{\omega}} : I^k(G) \rightarrow Z A_{DR}^{2k}(V)$, la partie (ii) du théorème résultera immédiatement, ainsi que la partie (iii), du

LEMME 2. — Pour tout connexion $\bar{\omega}$ sans singularité,

$$d \circ J \circ \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}} = (J \circ \lambda_{\bar{\omega}}) - Rés(\omega)$$

(en particulier, $J \circ \lambda_{\bar{\omega}} = Rés(\bar{\omega})$).

En effet, pour tout $2k$ -simplexe c de K et tout polynôme $P \in I^k(G)$, on a : $\langle (d \circ J \circ \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}})(P), c \rangle = \int_{\partial c} \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}}(P)$.

Soit s une section différentiable de E au-dessus d'un voisinage \tilde{w}_c de $c(\Delta^{2k})$ dans V . D'après la formule (ii) du §.2, on a, sur $\tilde{w}_c \cap V - S$: $\Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) = -\Delta_{\omega_s, \omega}(P) + \Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{V-S}} + \text{cobord}$ et, par conséquent, $\int_{\partial c} \Delta_{\omega, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) - \text{Rés}_c(\omega, P)$.

Puisque ω_s et $\bar{\omega}$ sont définies au-dessus de tout \tilde{w}_c , qui contient $c(\Delta^{2k})$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{V-S}}(P) &= \int_c d\Delta_{\omega_s, \bar{\omega}|_{\tilde{w}_c}}(P) = \int_c \lambda_{\bar{\omega}}(P) - \int_c \lambda_{\omega_s}(P) \\ &= \int_c \lambda_{\bar{\omega}}(P) = \langle (J \circ \lambda_{\bar{\omega}})(P), c \rangle \end{aligned}$$

[puisque ω_s est plate, $\lambda_{\omega_s}(P) = 0$].

Le lemme en résulte. Ceci achève la démonstration du théorème.

5. Théorie de l'obstruction.

Supposons $E_{|sk^{2k-1}K}$ trivial. Soit U un voisinage tubulaire ouvert de $sk^{2k-1}K$ dans V , $S = V - U$, σ une section différentiable de $E|_U$ définissant la connexion ω_σ sur $E|_U$ telle que $\sigma^*(\omega_\sigma) = 0$. Soit c un $2k$ -simplexe de K et $P \in I^k(G)$.

THEOREME 2. — (i) $\text{Rés}(\omega_\sigma) = 0$, si $\sigma_{|sk^{2k-1}K}$ admet un prolongement différentiable $\tilde{\sigma}$ sur un voisinage de $sk^{2k}K$ dans V .

(ii) $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) \in \mathbf{Z}$, si P est normalisé ($\text{Rés}(\omega_\sigma, P) \in C^{2k}(K, \mathbf{Z})$).

Si $\sigma_{|sk^{2k-1}K}$ se prolonge en une section $\tilde{\sigma}$ sur $sk^{2k}K$, on peut supposer que $\tilde{\sigma}$ est la restriction d'une section différentiable définie sur un voisinage de $sk^{2k}K$ dans V . Pour calculer $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega_\sigma}(P)$, on peut alors prendre pour s la section σ elle-même. Puisque $\Delta_{\omega_\sigma, \omega_\sigma}(P) = 0$, on en déduit $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) = 0$ si σ se prolonge à $sk^{2k}K$ d'où la partie (i) du théorème.

Posons $s = \sigma \cdot g$ où $g : \tilde{w}_c \cap V - S \rightarrow G$ est une application différentiable. On a alors : $\sigma^*(\omega_s) = g^*(\theta_G)$ sur $\tilde{w}_c \cap V - S$, où θ_G désigne la forme de Maurer-Cartan de G .

On en déduit : $\Delta_{\omega_\sigma, \omega_s}(P) = \int_0^1 \lambda_{\tilde{\omega}}(P)$ où $\tilde{\omega}$ désigne la connexion sur $E_{|w_c \cap V-S} \times [0,1]$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_{|w_c \cap (V-S) \times \{t\}} = t\omega_s + (1-t)\omega_\sigma \\ \tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0. \end{cases}$$

Puisque $\sigma^*[t\omega_s + (1-t)\omega_\sigma] = t\sigma^*(\omega_s) = tg^*(\theta_G)$ on en déduit $\int_0^1 \lambda_{\tilde{\omega}}(P) = g^*T_{\theta_G}(P)$ et, par conséquent $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_\sigma, \omega_s}(P) = \int_{g_*(\partial c)} T_{\theta_G}(P)$ est un nombre entier si P est normalisé, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. — Notons $Q^{2k}(G) = I^k(G) / \bigoplus_{r+s=k, r,s \geq 1} I^r(G) \cdot I^s(G)$ le

groupe abélien des indécomposables et $Q_Z^{2k}(G)$ l'image de $I_Z^k(G)$ dans $Q^{2k}(G)$ par passage aux quotients. Le groupe $\text{Hom}_Z(Q_Z^{2k}(G), \mathbf{Z})$ sera noté $\pi_{2k-1}^\psi(G)$ et appelé $(2k-1)^{\text{ième}}$ groupe de pseudo homotopie de G . [Si G est réductif et connexe, on sait ([4] [5]) que $\pi_{2k-1}^\psi(G)$ est isomorphe au groupe $\pi_{2k-1}(G)$ modulo torsion, c'est-à-dire à la partie libre du $(2k-1)^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de G].

Il est clair que l'application $[\mu_{\omega_\sigma}] : I^k(G) \longrightarrow H^{2k}(K, \mathbf{R})$ passe aux quotients modulo les décomposables. D'après la partie (ii) du théorème 2, $\mu_{\omega_\sigma}(P) \in C^{2k}(K, \mathbf{Z})$ si P est normalisé. On en déduit donc un élément $[\mu_\sigma] \in \text{Hom}_Z(Q_Z^{2k}(G), H^{2k}(K, \mathbf{Z})) \cong H^{2k}(K, \pi_{2k-1}^\psi(G))$ qui définit entièrement l'homomorphisme caractéristique en dimension $2k$.

En particulier, si $E_{|sk^{2k-1}K}$ est trivial, l'homomorphisme caractéristique en dimension $2k$ est entièrement caractérisé par un élément $[\mu_\sigma] \in H^{2k}(K, \pi_{2k-1}^\psi(G))$ dont la nullité est une condition nécessaire pour que $E_{|sk^{2k}K}$ soit trivial.

COROLLAIRE. — Soit $c : \Delta^{2k} \longrightarrow V$ un $2k$ -simplexe de K , s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage w de $c(\Delta^{2k})$ dans V , et s' une section différentiable de E définie seulement au-dessus d'un voisinage u de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans V .

On a alors : $\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s'}, \omega}(P) + \text{Rés}_c(\omega_{s'}, P).$

En outre, $\text{Rés}_c(\omega_{s'}, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega_{s'}}(P)$ est un nombre entier, si P est normalisé.

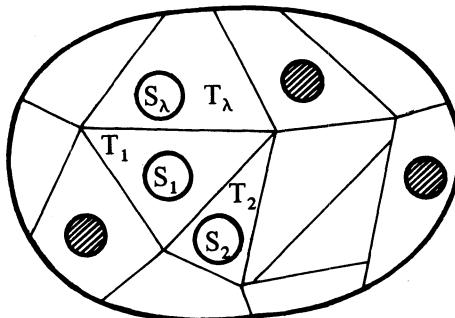
En effet, au voisinage de c ($\partial\Delta^{2k}$), on a, d'après la formule (ii) du §.2 : $\Delta_{\omega_s, \omega} - \Delta_{\omega_{s'}, \omega} = \Delta_{\omega_s, \omega_{s'}} + \text{cobord}$, d'où

$$\text{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P) + \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega_{s'}}(P).$$

La seconde partie du corollaire résulte immédiatement du théorème 2, appliqué à $E|_W$ avec $\sigma = s'$.

6. Exemple $G = \text{SO}(2)$, $\dim V = 2$, $k = 1$.

Supposons V compacte et orientée, soit $E \rightarrow V$ un $\text{SO}(2)$ -fibré principal différentiable, $K = (T_1, \dots, T, \dots, T_F)$ une triangulation de V par des triangles T_λ , S_λ une partie fermée de l'intérieur de T_λ (éventuellement $S_\lambda = \emptyset$), $S = \bigcup_{1 \leq \lambda \leq F} S_\lambda$ et ω une connexion sur $E|_{V-S}$.



Soit s_λ une section de E au-dessus d'un voisinage ouvert w_λ de T_λ dans V ne rencontrant pas S_μ pour $\mu \neq \lambda$, et soit $\omega_\lambda = s_\lambda^* \omega$ sur $w_\lambda - S_\lambda$. [Si $F \rightarrow V$ désigne le fibré vectoriel de rang 2 associé à E , il existe une base orthonormée (A_λ, B_λ) du module des sections de $E|_{w_\lambda}$, $s_\lambda = (A_\lambda, B_\lambda)$ et la dérivée covariante associée à ω est définie, pour tout champ de vecteurs Z sur $w_\lambda - S_\lambda$, par les relations

$$\begin{cases} \nabla_Z B_\lambda = + \omega_\lambda(Z) A_\lambda \\ \nabla_Z A_\lambda = - \omega_\lambda(Z) B_\lambda \end{cases}.$$

$$\text{Posons : } R_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda.$$

Le théorème des résidus s'écrit alors :

THEOREME 3. — $\sum_{\lambda=1}^F R_\lambda(\omega) = \langle \chi(E), [V] \rangle$, où $\chi(E)$ désigne la classe d'Euler de E .

Notons en effet X l'application :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{x} \frac{1}{2\pi} x.$$

Il est connu (cf. [4] par exemple) que $X \in I_Z^1(SO(2))$ et que la classe caractéristique correspondante est la classe d'Euler. Le théorème 1 du §.4 permet alors de conclure.

Remarque. — Pour démontrer le théorème 3, il suffit que le fibré vectoriel orienté $F \rightarrow V$ soit défini au-dessus de tout V ; mais il n'est pas nécessaire que la métrique riemannienne sur F soit définie en les points m_λ (autrement dit, il n'est pas nécessaire que la $SO(2)$ -réduction E du $GL^+(2, R)$ -fibré principal $\tilde{E} \rightarrow V$ associé à F soit définie en les points m_λ). Cette remarque est utilisée dans le cas particulier 3 ci-dessous.

Cas particuliers.

1) $S = \emptyset$. La connexion ω est alors définie sur tout V , et $d\omega_\lambda = \Omega|_{w_\lambda}$, où Ω désigne la 2-forme de courbure. Puisque ω_λ est définie dans tout T_λ , on peut appliquer la formule de Stokes : $\int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \iint_{T_\lambda} \Omega$. On a alors $\sum_{\lambda=1}^F \iint_{T_\lambda} \Omega = \iint_V \Omega$, et le théorème des résidus devient le *théorème de Gauss-Bonnet* :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = \langle \chi(E), [V] \rangle}$$

2) Soit A une section différentiable du fibré vectoriel $F \rightarrow V$ à singularités m_1, \dots, m_r isolées. Soit $U = V - \{m_1, \dots, m_r\}$ et B la section de F au-dessus de U telle que $(A(m), B(m))$ soit un repère orthonormé direct de la fibre F_m de F en chaque point $m \in U$. Soit $\sigma = (A, B)$ la section de $E|_U$ définie par A et B

[si ∇ désigne la dérivation covariante associée à la connexion ω_σ sur $E|_U$ définie par $\sigma^*(\omega_\sigma) = 0$, il revient au même de dire : $\forall Z, \nabla_Z A = 0, \nabla_Z B = 0$].

Soit K une triangulation de V telle que $sK^1 \cap \{m_1, \dots, m_r\} = \emptyset$. Supposons en outre, quitte à subdiviser davantage la triangulation, que chaque triangle T_λ de K contienne au plus 1 point singulier m_λ en son intérieur [si T_λ ne contient pas de point singulier en son intérieur, on notera m_λ n'importe quel point intérieur à T_λ]. Soit $s_\lambda = (A_\lambda, B_\lambda)$ une section différentiable locale de $E|_{w_\lambda}$ (où w_λ désigne un voisinage de T_λ ne rencontrant $\{m_1, \dots, m_r\}$ qu'en m_λ) et $\theta_\lambda : w_\lambda - \{m_\lambda\} \rightarrow SO(2)$ l'application différentiable telle que :

$$\begin{cases} A = \cos \theta_\lambda \cdot A_\lambda + \sin \theta_\lambda \cdot B_\lambda \\ B = -\sin \theta_\lambda \cdot A_\lambda + \cos \theta_\lambda \cdot B_\lambda. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \nabla_Z B_\lambda = d\theta_\lambda(Z) \cdot A_\lambda \\ \nabla_Z A_\lambda = -d\theta_\lambda(Z) \cdot B_\lambda, \end{cases}$$

soit : $\omega_\lambda = d\theta_\lambda$. On en déduit par conséquent que le résidu

$$R_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} d\theta_\lambda$$

est égal à l'indice $I(A, m_\lambda) = I(B, m_\lambda)$ de la section A (ou de la section B) par rapport au point m_λ . Le théorème des résidus devient donc ici le *théorème de Hopf* (cf., par exemple, [3])

$$\boxed{\sum_{\lambda=1}^F I(A, m_\lambda) = \langle \chi(E), [V] \rangle}$$

3) Soit $f : V \rightarrow W$ une application différentiable de degré d entre surfaces compactes orientées. Supposons qu'il existe un ensemble fini de points $S = \{m_1, \dots, m_\lambda, \dots, m_r\}$ de V tel que f soit de rang 2 sur $V - S$ (et de rang 0 sur S), et supposons qu'en chaque point m_λ , f ait un indice de ramification égal à l'entier n_λ . Nous allons voir que la *formule de Riemann-Hurwitz* pour les revêtements ramifiés

$$\boxed{d \cdot \chi_W = \chi_V + \sum_\lambda (n_\lambda - 1)}$$

apparaît aussi comme une application du théorème des résidus (χ_V et χ_W désignant respectivement l'invariant d'Euler Poincaré de V et de W).

Nous allons en effet prendre pour F le fibré image réciproque $f^{-1}T(W) \rightarrow V$, et le munir de la connexion métrique à singularités ∇ définie de la façon suivante : soit ∇^0 une connexion sur $T(V)$ respectant une métrique riemannienne g_0 ; l'application linéaire tangente à f définit un isomorphisme de fibrés vectoriels $T(V)_U \xrightarrow{f'} f^{-1}T(W)_{|U} = F_{|U}$ où $U = V - S$; on définit alors ∇ comme la connexion à singularités sur F , d'ensemble singulier S , égale à $f'(\nabla^0)$ [la métrique riemannienne sur F n'est elle-même définie qu'au-dessus de U , mais peu importe pour le théorème des résidus, ainsi que nous l'avons déjà remarqué]. Soient alors (A_λ, B_λ) une base orthonormée du module des champs de vecteurs sur un voisinage U_λ de m_λ dans V , et ω_λ la 1-forme sur U telle que $\nabla B_\lambda = \omega_\lambda \cdot A_\lambda$ (on suppose évidemment que $m_\mu \notin U_\lambda$ dès que $\mu \neq \lambda$). Notons (A'_λ, B'_λ) les sections de $F_{|U - \{m_\lambda\}}$ obtenues par l'isomorphisme f' :

$$\begin{aligned} f'(A_\lambda) &= A'_\lambda \quad \text{sur } U_\lambda - \{m_\lambda\}, \\ f'(B_\lambda) &= B'_\lambda \quad " \end{aligned}$$

D'après le corollaire du théorème 2,

$$\text{Rés}_{m_\lambda}(\nabla) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda + I(A'_\lambda, m_\lambda)$$

(où m_λ est intérieur au triangle T_λ d'une triangulation K de V dont le 1-squelette ne rencontre pas S , et dont chaque triangle contient au plus 1 point singulier).

Mais $I(A'_\lambda, m_\lambda) = n_\lambda - 1$, $\frac{1}{2\pi} \sum_\lambda \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \chi_V$ d'après le théorème de Gauss-Bonnet et

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \text{Rés}_m(\nabla) &= \langle \chi(f^{-1}T(W), [V]) \rangle = \langle f^* \chi(T(W)), [V] \rangle \\ &= \langle \chi(T(W)), f_*[V] \rangle = d \cdot \langle \chi(T(W)), [W] \rangle = d \cdot \chi_W, \end{aligned}$$

d'où la formule de Riemann-Hurwitz.

(Le cas où $F \rightarrow V$ est le fibré tangent a été étudié plus en détails dans [6]).

7. Résidus des fibrés à singularités et caractères différentiels de Chern-Simons.

Dans tout ce §, on se donne (V, k, K, S, G) comme dans l'introduction, mais on suppose maintenant que le G -fibré principal $E \xrightarrow{p} U$ que l'on se donne en plus n'est défini qu'au-dessus du voisinage $U = V - S$ de $sk^{2k-1}K$ dans V . [On dira encore que E est un "fibré à singularités" sur V , d'ensemble singulier S]. Soit ω une connexion sur E .

On sait, en général, que les groupes d'homotopie du classifiant BG de G n'ont que de la torsion en dimension impaire. On fera ici l'hypothèse supplémentaire :

$$\boxed{\pi_{2k-1}(BG) = 0} .$$

Soit $P \in I^k(G)$ et $u \in H^{2k}(BG, \mathbf{Z})$ tels que $w(P) = r(u)$ dans le diagramme $I^k(G) \xrightarrow{w} H^{2k}(BG, \mathbf{R}) \xleftarrow{r} H^{2k}(BG, \mathbf{Z})$ (où w désigne l'homomorphisme de Chern-Weil universel, et r le changement de coefficients $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$).

Le polynôme P est alors obligatoirement *normalisé* ($P \in I_Z^k(G)$). On notera $S_{P,u}(\omega) : Z_{2k-1}(U) \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ le S -caractère correspondant (cf. [8]).

Soit $c : \Delta^{2k} \rightarrow V$ un $2k$ -simplexe de K , et s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage $w_{\partial c}$ de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U . [Prenant pour $w_{\partial c}$ un voisinage tubulaire de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U , une telle section existe toujours, puisque nous avons supposé $\pi_{2k-1}(BG) = 0$ et que la restriction du fibré E à $w_{\partial c}$ est donc triviale]. A l'aide de cette section, on peut encore définir le nombre $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)$.

Bien que le lemme 1 ne se généralise pas, et que par conséquent le nombre ci-dessus dépende en général de la classe d'homotopie de la section s , nous allons voir que sa classe modulo \mathbf{Z} n'en dépend pas.

Plus précisément, on a le

THEOREME 4. — (i) *Le nombre $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de la section s .*

(ii) La classe modulo \mathbf{Z} du nombre ci-dessus (notée $\overline{\text{Rés}_c(\omega, P)}$) ne dépend pas du choix de s ,

(iii) $\overline{\text{Rés}_c(\omega, P)} = \langle S_{P,u}(\omega), \partial c \rangle$ (∂c est un cycle de U),

(iv) Le fibré $E_{|sk^{2k-1}K}$ admet une extension \widetilde{E} à un voisinage tubulaire \widetilde{U} de $sk^{2k}K$ dans V .

On a alors $\overline{\text{Rés}_c(\omega, P)} = \text{classe modulo } \mathbf{Z} \text{ de } \text{Rés}_c(\widetilde{\omega}, P)$ (où $\widetilde{\omega}$ désigne la restriction de ω à $U \cap \widetilde{U}$).

Soient s_0 et s_1 deux sections différentiables de E au-dessus d'un voisinage $w_{\partial c}$ de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U . Il existe une unique fonction différentiable $g : w_{\partial c} \rightarrow G$ telle que $s_1 = s_0 \cdot g$ et on a alors :

$$s_0^*(\omega_{s_0}) = 0$$

$$s_0^*(\omega_{s_1}) = g^*(\theta_G)$$

$$s_0^*(t\omega_{s_1} + (1-t)\omega_{s_0}) = g^*(t\theta_G)$$

et

$$\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P) = g^*(T_{\theta_G}(P)).$$

Puisque, d'après la formule (ii) du §.2,

$$d\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}, \omega}(P) = \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) + \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(P),$$

$$\text{on en déduit : } \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(P) - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P) = \int_{g_*(\partial c)} T_{\theta_G}(P).$$

Si s_0 et s_1 sont homotopes, la fonction $g : w_{\partial c} \rightarrow G$ est homotope à une application constante et $g_*(\partial c)$ est un bord, d'où la partie (i) du théorème. Dans le cas général $\int_{g_*(\partial c)} T_{\theta_G}(P)$ est un entier, puisque P est normalisé, d'où la partie (ii).

Notons $(E_0 \rightarrow B, \omega_0)$ un G -fibré différentiable E_0 dont la base est G -classifiante pour la dimension de U , muni d'une connexion ω_0 universelle pour les connexions sur les fibrés de base $\dim U$: une telle connexion universelle existe d'après Narasimhan et Ramanan (cf. [7]).

Soit $f : U \rightarrow B_0$ une application classifiante pour la connexion (projection d'un morphisme $\hat{f} : E \rightarrow E_0$ tel que $\omega = \hat{f}^*(\omega_0)$).

On a alors, par naturalité : $\langle S_{P,u}(\omega), \partial c \rangle = \langle S_{P,u}(\omega_0), f_*(\partial c) \rangle$.

Puisque $(f \circ c|_{\partial\Delta^{2k}}) \sim 0$, il existe $f_c : \Delta^{2k} \rightarrow B_0$ tel que $(f \circ c|_{\partial\Delta^{2k}}) \sim (f_c \circ \iota)$ (où ι désigne l'inclusion $\partial\Delta^{2k} \hookrightarrow \Delta^{2k}$):

on en déduit $f_*(\partial c) = \partial f_c$, et, par définition des S caractères (cf. [8]), $\langle S_{p,u}(\omega_0), \partial f_c \rangle = \int_{f_c} \lambda_{\omega_0}(P)$ modulo \mathbf{Z} .

Soit

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{2k} \times G & \xrightarrow{\hat{f}_c} & E_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{2k} & \xrightarrow{f_c} & B_0 \end{array}$$

un homomorphisme de G -fibrés principaux différentiables au-dessus de f_c , et s_0 une section différentiable arbitraire du fibré trivial $\Delta^{2k} \times G \rightarrow \Delta^{2k}$.

On a alors : $d\Delta_{\omega_{s_0}, \hat{f}_c^*(\omega_0)}(P) = \lambda_{\hat{f}_c^*(\omega_0)}(P)$ et, par conséquent, $\int_{f_c} \lambda_{\omega_0}(P) = \int_{\partial f_c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P)$, d'où la partie (iii) du théorème. La partie (iv) est évidente, une fois remarqué que l'hypothèse $\pi_{2k-1}(BG) = 0$ implique l'existence d'une extension \tilde{f} de $f|_{\Delta^{2k-1} K}$ à $\Delta^{2k} K$: il suffit alors d'appliquer le théorème 1 à $(\tilde{E}, \tilde{\omega})$ pour conclure.

Remarque. — Cette extension \tilde{f} n'est pas unique, en général, même à homotopie près.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BOTT, Characteristic classes and foliations, (mimeographed notes by L. Conlon, (1972).
- [2] S. CHERN et J. SIMONS, Characteristic forms and transgression I, *mimeographed notes, Stonybrook Univ.*, (1972).
- [3] W. GREUB, S. HALPERIN et R. VAN STONE, Connections, curvature and cohomology, tome I (Ac. Press. 1973).
- [4] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VAN STONE, Connections, curvature and cohomology, tome II.

- [5] J.L. KOSZUL, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, (1949).
- [6] D. LEHMANN, Résidus des connexions métriques à singularités isolées sur les surfaces, à paraître dans *l'Enseignement Mathématique*, Genève.
- [7] NARASIMHAN et RAMANAN, Existence of universal connections II, *Amer. J. of Maths*, 85 (1963).
- [8] J. SIMONS, Characteristic forms and transgression II : characters associated to a connection, *mimeographed notes, Stonybrook Univ.*, (1972).

Manuscrit reçu le 31 mars 1980
révisé le 17 septembre 1980.

Daniel LEHMANN,
ERA 590 du C.N.R.S.
U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Université des Sciences et Techniques
de Lille I
59655 – Villeneuve d'Ascq Cedex.