ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL LEHMANN

Résidus des connexions à singularités et classes caractéristiques

Annales de l'institut Fourier, tome 31, nº 1 (1981), p. 83-98

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_83_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble,
31, 1 (1981), 83-98

RÉSIDUS DES CONNEXIONS A SINGULARITÉS ET CLASSES CARACTÉRISTIQUES

par Daniel LEHMANN

1. Introduction.

Donnons nous :

– une variété différentiable V,
– un entier $k \geqslant 1$,
– une triangulation différentiable K de V,
– une partie fermée S de V telle que

$$S \cap sk^{2k-1}\ K = \emptyset$$

(sk^i K désignant le i-squelette de K),

– un groupe de Lie G,
– un G-fibré principal différentiable $E \longrightarrow V$,
– une connexion ω sur la restriction $E_{|V-S}$ du fibré E à l'ouvert $V - S$ (une telle connexion sera encore appelée "connexion à singularités" sur E, d'ensemble singulier S).

Puisque l'inclusion naturelle $sk^{2k-1}\,K \subset V$ induit un isomorphisme $H^i(V, \mathbf{R}) \longrightarrow H^i(sk^{2k-1}\,K, \mathbf{R})$ pour $i \leqslant 2k - 2$, la théorie de Chern-Weil ordinaire appliquée à $E_{|U}, \omega_{|U})$, où U désigne un voisinage tubulaire de sk^{2k-1}K dans $V - S$, montre que les classes caractéristiques réelles de E peuvent se calculer à partir de la connexion à singularités ω en dimension $i \leqslant 2k - 2$. Nous allons montrer *qu'il en est encore ainsi pour* $i = 2k$: ce sera l'objet de ce que nous appellerons le "théorème des résidus" pour la connexion à singularités ω. Ce théorème des résidus présente l'intérêt de coiffer simultanément 2 aspects, a priori assez distincts, de la théorie des classes caractéristiques :

– supposant $S = \emptyset$, on retrouve évidemment la théorie classique de Chern-Weil permettant de calculer les classes caractéristiques réelles à l'aide de la courbure d'une connexion.

– si la restriction $E_{|sk^{2k-1}K}$ de E au $2k-1$ squelette est triviale, il existe une section différentiable σ de $E_{|U}$, où U désigne un voisinage tubulaire de $sk^{2k-1}K$ dans V ; prenant alors pour S l'ensemble $V - U$, et pour ω la connexion plate à singularités définie par la trivialisation σ (caractérisée par $\sigma^* \omega = 0$), le théorème des résidus fournit, si G est compact connexe, un cocycle $\mu_\sigma \in Z^{2k}(K, \pi_{2k-1}(G) \otimes \mathbf{R})$ qui est l'image par $\pi_{2k-1}(G) \longrightarrow \pi_{2k-1}(G) \otimes \mathbf{R}$ du cocycle obstructeur à la possibilité de prolonger σ à $sk^{2k}K$. [Si $\pi_{2k-1}(G)$ est sans torsion, la nullité de cette obstruction est suffisante pour que σ soit prolongeable à $sk^{2k}K$].

Par exemple, si V est orientable compacte et de dimension 2, si $G = SO(2)$, et si $k = 1$, les 2 cas particuliers précédents correspondent au théorème de Gauss-Bonnet et au théorème de Hopf exprimant la classe d'Euler du fibré comme égale respectivement à la courbure totale d'une connexion métrique ou à l'indice d'une section à singularités isolées. La formule de Riemann-Hurwitz pour les revêtements ramifiés apparaît aussi comme un cas particulier du théorème des résidus.

Si l'on suppose maintenant que le fibré E lui-même n'est défini qu'au dessus de $U = V - S$, et pas seulement la connexion ω, on peut encore définir les résidus, au moins si $\pi_{2k-1}(BG) = 0$; on verra qu'ils sont alors étroitements liés aux S-caractères de Chern-Simons [8].

2. Rappels et notations.

Pour toute variété différentiable W, on notera $A^*_{DR}(W)$ son algèbre de de Rham.

Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, G, $I^k(G)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes P de degré k sur $\mathfrak{g}$ (ou applications k-linéaires symétriques $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \ldots . \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbf{R}$) qui sont invariants par la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$.

Pour tout G-fibré principal différentiable $p: E \longrightarrow V$ et toute connexion ω sur V, on notera : $\lambda_\omega : I^k(G) \longrightarrow A^{2k}_{DR}(V)$ l'application de Chern-Weil, à valeurs dans les $2k$-formes *fermées*, et $T_\omega : I^k(G) \longrightarrow A^{2k-1}_{DR}(E)$ l'application "de transgression" (cf. [2]) qui vérifie :

$$\text{(i)} \qquad \boxed{dT_\omega(P) = p^* \lambda_\omega(P)}$$

Si $\omega_0, \ldots, \omega_r$ désigne une famille de $r+1$ connexions sur E, on notera :

$$\Delta_{\omega_0, \ldots, \omega_r} : I^k(G) \longrightarrow A^{2k-r}_{DR}(V)$$

l'application linéaire définie en [1] telle que

$$\text{(ii)} \qquad \boxed{d\,.\,\Delta_{\omega_0, \ldots, \omega_r} = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \Delta_{\omega_0, \ldots, \hat{\omega}_i, \ldots, \omega_r}}$$

En particulier, pour $r = 0$, $\Delta_\omega = \lambda_\omega$ et

$$\text{(iii)} \qquad \boxed{d\,.\,\Delta_{\omega, \omega'} = \lambda_{\omega'} - \lambda_\omega}$$

Rappelons comment sont définies les applications T_ω et $\Delta_{\omega_0, \ldots, \omega_r}$: pour tout polynôme $P \in I^k(G)$, on définit une 1-forme $\hat{\omega}$ (resp. $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}(\omega_0, \ldots, \omega_r)$) sur $E \times [0, 1]$ (resp. sur $E \times \Delta^r$) à coefficients dans $\mathfrak{g}$ en posant :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{|E\times\{t\}} = t\omega & (t \in [0\,.\,1]) \\ \hat{\omega}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) = 0 & \end{cases}$$

$$\text{[resp. :} \begin{cases} \widetilde{\omega}_{|E\times(t_0, \ldots, t_r)} = \sum_{i=0}^{r} t_i\,\omega_i & \begin{pmatrix} 0 \leqslant t_i \leqslant 1 \\ \sum_{i=0}^{r} t_i = 1 \end{pmatrix} \\ \widetilde{\omega}_{|\{z\}\times\Delta^r} = 0 & (z \in E)]. \end{cases}$$

On pose alors :

$$T_\omega(P) = \int_0^1 P(\hat{\Omega}) \quad \text{où} \quad \hat{\Omega} = d\hat{\omega} + \frac{1}{2}\,\hat{\omega} \wedge \hat{\omega}$$

et où $\int_0^1 : A^{2k}_{DR}(E \times [0, 1]) \longrightarrow A^{2k-1}_{DR}(E)$ désigne l'intégration "le long de la fibre" $[0, 1]$ [resp. $\Delta_{\omega_0, \ldots, \omega_r}(P) = \int_{\Delta^r} \lambda_{\widetilde{\omega}}(P)$ où

$\int_{\Delta^r} : A^{2k}_{DR}(E \times \Delta^r) \longrightarrow A^{2k-r}_{DR}(E)$ désigne l'intégration "le long de la fibre" Δ^r].

La formule (i) est en fait purement algébrique, et s'applique en particulier à l'algèbre de Weil $W(G) = \Lambda(\mathcal{G}^*) \otimes S(\mathcal{G}^*)$: elle s'écrit $d T_{\omega_0}(P) = P \in I^k(G) = [S^k(\mathcal{G}^*)]^G$ où ω_0 désigne l'unique connexion sur $W(G)$.

Si l'on considère le G-fibré principal de base un point ($G \longrightarrow$ point), muni de son unique forme de connexion θ_G (qui n'est autre que la forme de Maurer-Cartan de G), on a au contraire $d T_{\theta_G}(P) = 0$, car la connexion θ_G est plate. [La $(2k-1)$-forme fermée $T_{\theta_G}(P)$ sur G est en fait biinvariante]. On dira alors que P est *normalisé* (et l'on notera $P \in I^k_Z(G)$) si la forme fermée $T_{\theta_G}(P)$ a ses périodes entières.

Pour la triangulation différentiable K de V, on notera : $\mathcal{J} : A^*_{DR}(V) \longrightarrow C^*(K, \mathbf{R})$ l'intégration des formes différentielles : $\langle \mathcal{J}(\alpha), c \rangle = \int_c \alpha$. Rappelons que $\mathcal{J}$ induit en cohomologie un isomorphisme d'algèbres graduées $[\mathcal{J}] : H^*_{DR}(V) \xrightarrow{\cong} H^*(K, \mathbf{R})$ (de Rham).

3. Résidus des connexions avec singularités.

Donnons nous (V, k, K, S et G) comme dans l'introduction, $p : E \longrightarrow V$ un G-fibré principal différentiable, et ω une connexion à singularités sur E d'ensemble singulier S.

[En disant que K est une triangulation différentiable de V, nous sous-entendons en particulier que chaque i-simplexe $c : \Delta^i \longrightarrow V$ est un difféomorphisme sur son image $c(\Delta^i)$, c'est-à-dire admet une extension $\widetilde{c}$ à un voisinage ouvert w_c du i-simplexe type Δ^i dans l'espace affine de dimension i qu'il engendre, qui est un difféomorphisme — au sens ordinaire — de w_c sur une sous-variété $\widetilde{c}(w_c)$ de V].

Soit $c : \Delta^{2k} \longrightarrow V$ un $2k$-simplexe de K et s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage $\widetilde{w}_c$ de $c(\Delta^{2k})$ dans V. [Une telle section existe, puisque $c(\Delta^{2k})$ est contractile !]. A tout polynôme $P \in I^k(G)$, associons le nombre

$$\boxed{\operatorname{Rés}_c(\omega\,,\mathrm{P}) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s\,,\,\omega}(\mathrm{P})}$$

(appelé *résidu* de $(\omega\,,\mathrm{P})$ par rapport à c), où ω_s désigne la connexion plate sur $\mathrm{E}_{|\widetilde{w}_c}$ associée à la trivialisation définie par s, et caractérisée par la relation $s^*(\omega_s) = 0$, la $(2k-1)$-forme $\Delta_{\omega_s,\omega}(\mathrm{P})$ n'étant évidemment définie que sur l'intersection $\widetilde{w}_c \cap \mathrm{V} - \mathrm{S}$ des domaines de définition de ω_s et ω ; on remarquera, puisque $\mathrm{S} \cap sk^{2k-1}\mathrm{K} = \emptyset$, que ∂c a son support dans $\widetilde{w}_c \cap \mathrm{V} - \mathrm{S}$.

LEMME 1. — *La définition ci-dessus du résidu ne dépend pas du choix de la section* s.

Notons en effet s_0 et s_1 deux sections de E définies au-dessus d'un même voisinage $\widetilde{w}_c$ de $c(\Delta^{2k})$ dans V.

D'après la formule (ii) du § 2, on a, sur $\widetilde{w}_c \cap \mathrm{V} - \mathrm{S}$:

$$\Delta_{\omega_{s_1},\omega}(\mathrm{P}) - \Delta_{\omega_{s_0},\omega}(\mathrm{P}) = -\,\Delta_{\omega_{s_0},\omega_{s_1}}(\mathrm{P}) + \text{cobord}$$

et par conséquent,

$$\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_1},\omega}(\mathrm{P}) - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0},\omega}(\mathrm{P}) = -\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0},\omega_{s_1}}(\mathrm{P})\,.$$

Soit $\widetilde{\omega}$ la connexion sur $\mathrm{E}_{|\widetilde{w}_c} \times [0\,,1] \longrightarrow \widetilde{w}_c \times [0\,,1]$ telle que

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}_{|\widetilde{w}_c \times \{t\}} = t\,\omega_{s_1} + (1-t)\,\omega_{s_0} \\ \widetilde{\omega}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) = 0. \end{cases}$$

Par construction de $\Delta_{\omega_{s_0},\omega_{s_1}}$, $\Delta_{\omega_{s_0},\omega_{s_1}}(\mathrm{P}) = \int_0^1 \lambda_{\widetilde{\omega}}(\mathrm{P})$ sur $\widetilde{w}_c$ et par conséquent

$$\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0},\omega_{s_1}}(\mathrm{P}) = \int_{\partial c \times [0,1]} \lambda_{\widetilde{\omega}}(\mathrm{P}) = \int_{\partial(c \times [0,1])} \lambda_{\widetilde{\omega}}(\mathrm{P}) + \int_c \lambda_{\omega_{s_0}}(\mathrm{P}) - \int_c \lambda_{\omega_{s_1}}(\mathrm{P})\,.$$

Puisque $\lambda_{\widetilde{\omega}}(\mathrm{P})$ est fermée, $\int_{\partial(c\times[0,1])} \lambda_{\widetilde{\omega}}(\mathrm{P}) = 0$. Puisque ω_{s_0} et ω_{s_1} sont des connexions plates, $\lambda_{\omega_{s_0}}(\mathrm{P}) = \lambda_{\omega_{s_1}}(\mathrm{P}) = 0$; et finalement $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0},\omega_{s_1}}(\mathrm{P}) = 0$, d'où le lemme.

4. Théorie de Chern-Weil pour les connexions à singularités.

Avec les notations du § 3, on associe, à tout G-fibré principal différentiable $E \longrightarrow V$, à toute connexion ω à singularités sur E d'ensemble singulier S inclus dans $V - sk^{2k-1}K$, et à tout polynôme $P \in I^k(G)$, une $2k$-cochaîne simpliciale $\text{Rés}(\omega, P) \in C^{2k}(K, \mathbf{R})$ en posant, pour tout $2k$-simplexe c de K :

$$\langle \text{Rés}(\omega, P), c \rangle = \text{Rés}_c(\omega, P) .$$

Notons $\text{Rés}(\omega) : I^k(G) \longrightarrow C^{2k}(K, \mathbf{R})$ l'application linéaire $P \longrightarrow \text{Rés}(\omega, P)$.

THEOREME 1 *(théorème des résidus).* –

(i) *L'application* $\text{Rés}(\omega)$ *prend ses valeurs dans l'espace* $Z^{2k}(K, \mathbf{R})$ *des cocycles de* $C^{2k}(K, \mathbf{R})$.

(ii) *Notant* $[\text{Rés}(\omega)] : I^k(G) \longrightarrow H^{2k}(K, \mathbf{R})$, *l'application induite par* $\text{Rés}(\omega)$ *en cohomologie,* $[\mathscr{I}]^{-1} \circ [\text{Rés}(\omega)]$ *est égale à l'homomorphisme caractéristique de Chern-Weil* $\lambda : I^k(G) \longrightarrow H^{2k}_{DR}(V)$, *et est donc en particulier indépendante des choix de* K, S *et* ω.

(iii) *Si* $\bar{\omega}$ *est une connexion sans singularité sur* $E (S = \emptyset)$, $\text{Rés}(\bar{\omega}) = \mathscr{I} \circ \lambda_{\bar{\omega}}$.

Soit g un $(2k + 1)$-simplexe de K et notons s une section de E au-dessus d'un voisinage $\widetilde{W}_g$ de $g(\Delta^{2k+1})$ dans V. On a alors :

$$\langle d\, \text{Rés}(\omega, P), g \rangle = \langle \text{Rés}(\omega, P), \partial g \rangle = \int_{\partial \partial g} \Delta_{\omega_s, \omega}(P) = 0 ,$$

d'où la partie (i) du théorème.

Puisque l'homomorphisme caractéristique $\lambda : I^k(G) \longrightarrow H^{2k}_{DR}(V, R)$ est induit, à partir de n'importe quelle connexion $\bar{\omega}$ sans singularité sur E, par l'homomorphisme $\lambda_{\bar{\omega}} : I^k(G) \longrightarrow Z\,A^{2k}_{DR}(V)$, la partie (ii) du théorème résultera immédiatement, ainsi que la partie (iii), du

LEMME 2. – *Pour tout connexion* $\bar{\omega}$ *sans singularité,*

$$d \circ \mathscr{I} \circ \Delta_{\omega, \bar{\omega}_{|V-S}} = (\mathscr{I} \circ \lambda_{\bar{\omega}}) - \text{Rés}(\omega)$$

(en particulier, $\mathscr{I} \circ \lambda_{\bar{\omega}} = \text{Rés}(\bar{\omega})$*).*

En effet, pour tout $2k$-simplexe c de K et tout polynôme $P \in I^k(G)$, on a : $\langle \left(d \circ \mathscr{I} \circ \Delta_{\omega,\bar{\omega}_{|V-S}}\right)(P), c\rangle = \int_{\partial c} \Delta_{\omega,\bar{\omega}_{|V-S}}(P)$.

Soit s une section différentiable de E au-dessus d'un voisinage $\widetilde{w}_c$ de $c(\Delta^{2k})$ dans V. D'après la formule (ii) du §.2, on a, sur $\widetilde{w}_c \cap V - S$: $\Delta_{\omega,\bar{\omega}_{|V-S}}(P) = -\Delta_{\omega_s,\omega}(P) + \Delta_{\omega_s,\bar{\omega}_{|V-S}} +$ cobord et, par conséquent, $\int_{\partial c} \Delta_{\omega,\bar{\omega}_{|V-S}}(P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s,\bar{\omega}_{|V-S}}(P) - \text{Rés}_c(\omega, P)$.

Puisque ω_s et $\bar{\omega}$ sont définies au-dessus de tout $\widetilde{w}_c$, qui contient $c(\Delta^{2k})$,

$$\int_{\partial c} \Delta_{\omega_s,\bar{\omega}_{|V-S}}(P) = \int_c d\Delta_{\omega_s,\bar{\omega}_{|\widetilde{w}_c}}(P) = \int_c \lambda_{\bar{\omega}}(P) - \int_c \lambda_{\omega_s}(P)$$
$$= \int_c \lambda_{\bar{\omega}}(P) = \langle(\mathscr{I} \circ \lambda_{\bar{\omega}})(P), c\rangle$$

[puisque ω_s est plate, $\lambda_{\omega_s}(P) = 0$].

Le lemme en résulte. Ceci achève la démonstration du théorème.

5. Théorie de l'obstruction.

Supposons $E_{|sk^{2k-1}K}$ trivial. Soit U un voisinage tubulaire ouvert de $sk^{2k-1}K$ dans V, $S = V - U$, σ une section différentiable de $E_{|U}$ définissant la connexion ω_σ sur $E_{|U}$ telle que $\sigma^*(\omega_\sigma) = 0$. Soit c un $2k$-simplexe de K et $P \in I^k(G)$.

THEOREME 2. — (i) $\text{Rés}(\omega_\sigma) = 0$, *si* $\sigma_{|sk^{2k-1}K}$ *admet un prolongement différentiable* $\widetilde{\sigma}$ *sur un voisinage de* $sk^{2k}K$ *dans* V.

(ii) $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) \in \mathbf{Z}$, *si* P *est normalisé* ($\text{Rés}(\omega_\sigma, P) \in C^{2k}(K, \mathbf{Z})$).

Si $\sigma_{|sk^{2k-1}K}$ se prolonge en une section $\widetilde{\sigma}$ sur $sk^{2k}K$, on peut supposer que $\widetilde{\sigma}$ est la restriction d'une section différentiable définie sur un voisinage de $sk^{2k}K$ dans V. Pour calculer $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s,\omega_\sigma}(P)$, on peut alors prendre pour s la section σ elle-même. Puisque $\Delta_{\omega_\sigma,\omega_\sigma}(P) = 0$, on en déduit $\text{Rés}_c(\omega_\sigma, P) = 0$ si σ se prolonge à $sk^{2k}K$ d'où la partie (i) du théorème.

Posons $s = \sigma . g$ où $g : \widetilde{w}_c \cap V - S \longrightarrow G$ est une application différentiable. On a alors : $\sigma^*(\omega_s) = g^*(\theta_G)$ sur $\widetilde{w}_c \cap V - S$, où θ_G désigne la forme de Maurer-Cartan de G.

On en déduit : $\Delta_{\omega_\sigma,\omega_s}(P) = \int_0^1 \lambda_{\tilde\omega}(P)$ où $\tilde\omega$ désigne la connexion sur $E_{|\tilde W_c \cap V - S} \times [0,1]$ définie par

$$\begin{cases} \tilde\omega_{|W_c \cap (V-S)\times\{t\}} = t\omega_s + (1-t)\,\omega_\sigma \\ \tilde\omega\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) = 0 . \end{cases}$$

Puisque $\sigma^*[t\omega_s + (1-t)\,\omega_\sigma] = t\sigma^*(\omega_s) = tg^*(\theta_G)$

on en déduit $\int_0^1 \lambda_{\tilde\omega}(P) = g^* T_{\theta_G}(P)$ et, par conséquent $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_\sigma,\omega_s}(P) = \int_{g_*(\partial c)} T_{\theta_G}(P)$ est un nombre entier si P est normalisé, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. – Notons $Q^{2k}(G) = I^k(G)/ \bigoplus_{\substack{r+s=k \\ r,s\geq 1}} I^r(G) . I^s(G)$ le groupe abélien des indécomposables et $Q_Z^{2k}(G)$ l'image de $I_Z^k(G)$ dans $Q^{2k}(G)$ par passage aux quotients. Le groupe $\mathrm{Hom}_Z(Q_Z^{2k}(G), \mathbf{Z})$ sera noté $\pi_{2k-1}^\psi(G)$ et appelé $(2k-1)^{\text{ième}}$ groupe de pseudo homotopie de G. [Si G est réductif et connexe, on sait ([4] [5]) que $\pi_{2k-1}^\psi(G)$ est isomorphe au groupe $\pi_{2k-1}(G)$ modulo torsion, c'est-à-dire à la partie libre du $(2k-1)^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de G].

Il est clair que l'application $[\mu_{\omega_\sigma}] : I^k(G) \longrightarrow H^{2k}(K, \mathbf{R})$ passe aux quotients modulo les décomposables. D'après la partie (ii) du théorème 2, $\mu_{\omega_\sigma}(P) \in C^{2k}(K, \mathbf{Z})$ si P est normalisé. On en déduit donc un élément $[\mu_\sigma] \in \mathrm{Hom}_Z(Q_Z^{2k}(G), H^{2k}(K, \mathbf{Z})) \cong H^{2k}(K, \pi_{2k-1}^\psi(G))$ qui définit entièrement l'homomorphisme caractéristique en dimension $2k$.

En particulier, si $E_{|sk^{2k-1}K}$ est trivial,

l'homomorphisme caractéristique en dimension $2k$ est entièrement caractérisé par un élément $[\mu_\sigma] \in H^{2k}(K, \pi_{2k-1}^\psi(G))$ dont la nullité est une condition nécessaire pour que $E_{|sk^{2k}K}$ soit trivial.

COROLLAIRE. – *Soit $c : \Delta^{2k} \longrightarrow V$ un $2k$-simplexe de K, s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage w de $c(\Delta^{2k})$ dans V, et s' une section différentiable de E définie seulement au-dessus d'un voisinage u de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans V.*

On a alors : $\mathrm{Rés}_c(\omega, P) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s'},\omega}(P) + \mathrm{Rés}_c(\omega_{s'}, P)$.

En outre, $\text{Rés}_c(\omega_{s'}, \mathrm{P}) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s,\omega_{s'}}(\mathrm{P})$ *est un nombre entier, si* P *est normalisé.*

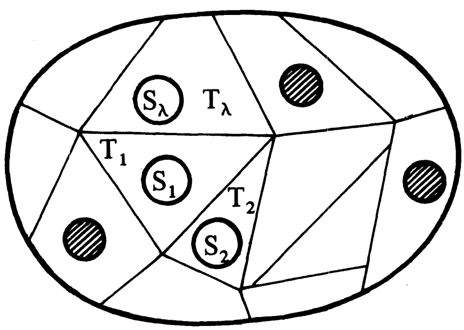
En effet, au voisinage de c $(\partial\Delta^{2k})$, on a, d'après la formule (ii) du § .2 : $\Delta_{\omega_s,\omega} - \Delta_{\omega_{s'},\omega} = \Delta_{\omega_s,\omega_{s'}}$ + cobord, d'où

$$\text{Rés}_c(\omega, \mathrm{P}) = \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s'},\omega}(\mathrm{P}) + \int_{\partial c} \Delta_{\omega_s,\omega_{s'}}(\mathrm{P}) .$$

La seconde partie du corollaire résulte immédiatement du théorème 2, appliqué à $\mathrm{E}_{|w}$ avec $\sigma = s'$.

6. Exemple $\mathrm{G} = \mathrm{SO}(2)$, $\dim \mathrm{V} = 2$, $k = 1$.

Supposons V compacte et orientée, soit $\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{V}$ un SO(2)-fibré principal différentiable, $\mathrm{K} = (\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}_\mathrm{F})$ une triangulation de V par des triangles T_λ, S_λ une partie fermée de l'intérieur de T_λ (éventuellement $\mathrm{S}_\lambda = \emptyset$), $\mathrm{S} = \bigcup_{1<\lambda<\mathrm{F}} \mathrm{S}_\lambda$ et ω une connexion sur $\mathrm{E}_{|\mathrm{V}-\mathrm{S}}$.



Soit s_λ une section de E au-dessus d'un voisinage ouvert w_λ de T_λ dans V ne rencontrant pas S_μ pour $\mu \neq \lambda$, et soit $\omega_\lambda = s_\lambda^* \omega$ sur $w_\lambda - \mathrm{S}_\lambda$. [Si $\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{V}$ désigne le fibré vectoriel de rang 2 associé à E, il existe une base orthonormée $(\mathrm{A}_\lambda, \mathrm{B}_\lambda)$ du module des sections de $\mathrm{E}_{|w_\lambda}$, $s_\lambda = (\mathrm{A}_\lambda, \mathrm{B}_\lambda)$ et la dérivée covariante associée à ω est définie, pour tout champ de vecteurs Z sur $w_\lambda - \mathrm{S}_\lambda$, par les relations

$$\begin{cases} \nabla_\mathrm{Z} \mathrm{B}_\lambda = + \,\omega_\lambda(\mathrm{Z})\, \mathrm{A}_\lambda \\ \nabla_\mathrm{Z} \mathrm{A}_\lambda = - \,\omega_\lambda(\mathrm{Z})\, \mathrm{B}_\lambda \end{cases}].$$

Posons : $R_\lambda(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda$.

Le théorème des résidus s'écrit alors :

THEOREME 3. — $\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{F} R_\lambda(\omega) = \langle \chi(E), [V] \rangle$, *où* $\chi(E)$ *désigne la classe d'Euler de* E.

Notons en effet X l'application :

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{X} \frac{1}{2\pi} x .$$

Il est connu (cf. [4] par exemple) que $X \in I^1_Z(SO(2))$ et que la classe caractéristique correspondante est la classe d'Euler. Le théorème 1 du § .4 permet alors de conclure.

Remarque. — Pour démontrer le théorème 3, il suffit que le fibré vectoriel orienté $F \longrightarrow V$ soit défini au-dessus de tout V ; mais il n'est pas nécessaire que la métrique riemannienne sur F soit définie en les points m_λ (autrement dit, il n'est pas nécessaire que la SO(2)-réduction E du $GL^+(2, R)$-fibré principal $\widetilde{E} \longrightarrow V$ associé à F soit définie en les points m_λ). Cette remarque est utilisée dans le cas particulier 3 ci-dessous.

Cas particuliers.

1) $S = \emptyset$. La connexion ω est alors définie sur tout V, et $d\omega_\lambda = \Omega_{|W_\lambda}$, où Ω désigne la 2-forme de courbure. Puisque ω_λ est définie dans tout T_λ, on peut appliquer la formule de Stokes : $\displaystyle\int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \iint_{T_\lambda} \Omega$. On a alors $\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{F} \iint_{T_\lambda} \Omega = \iint_V \Omega$, et le théorème des résidus devient le *théorème de Gauss-Bonnet* :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \iint_V \Omega = \langle \chi(E), [V] \rangle}$$

2) Soit A une section différentiable du fibré vectoriel $F \longrightarrow V$ à singularités $m_1, \ldots, m_r$ isolées. Soit $U = V - \{m_1, \ldots, m_r\}$ et B la section de F au-dessus de U telle que $(A(m), B(m))$ soit un repère orthonormé direct de la fibre F_m de F en chaque point $m \in U$. Soit $\sigma = (A, B)$ la section de $E_{|U}$ définie par A et B

[si ∇ désigne la dérivation covariante associée à la connexion ω_σ sur $E_{|U}$ définie par $\sigma^*(\omega_\sigma) = 0$, il revient au même de dire : $\forall Z$, $\nabla_Z A = 0$, $\nabla_Z B = 0$].

Soit K une triangulation de V telle que $sk^1 K \cap \{m_1,\ldots,m_r\} = \emptyset$. Supposons en outre, quitte à subdiviser davantage la triangulation, que chaque triangle T_λ de K contienne au plus 1 point singulier m_λ en son intérieur [si T_λ ne contient pas de point singulier en son intérieur, on notera m_λ n'importe quel point intérieur à T_λ]. Soit $s_\lambda = (A_\lambda, B_\lambda)$ une section différentiable locale de $E_{|w_\lambda}$ (où w_λ désigne un voisinage de T_λ ne rencontrant $\{m_1,\ldots,m_r\}$ qu'en m_λ) et $\theta_\lambda : w_\lambda - \{m_\lambda\} \longrightarrow SO(2)$ l'application différentiable telle que :

$$\begin{cases} A = \cos\theta_\lambda \,.\, A_\lambda + \sin\theta_\lambda \,.\, B_\lambda \\ B = -\sin\theta_\lambda \,.\, A_\lambda + \cos\theta_\lambda \,.\, B_\lambda \,. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \nabla_Z B_\lambda = d\theta_\lambda(Z) \,.\, A_\lambda \\ \nabla_Z A_\lambda = -d\theta_\lambda(Z) \,.\, B_\lambda \,, \end{cases}$$

soit : $\omega_\lambda = d\theta_\lambda$. On en déduit par conséquent que le résidu

$$R_\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial T_\lambda} d\theta_\lambda$$

est égal à l'indice $I(A, m_\lambda) = I(B, m_\lambda)$ de la section A (ou de la section B) par rapport au point m_λ. Le théorème des résidus devient donc ici le *théorème de Hopf* (cf., par exemple, [3])

$$\boxed{\sum_{\lambda=1}^{F} I(A, m_\lambda) = \langle \chi(E), [V] \rangle}$$

3) Soit $f : V \longrightarrow W$ une application différentiable de degré d entre surfaces compactes orientées. Supposons qu'il existe un ensemble fini de points $S = \{m_1, \ldots, m_\lambda, \ldots, m_r\}$ de V tel que f soit de rang 2 sur $V - S$ (et de rang 0 sur S), et supposons qu'en chaque point m_λ, f ait un indice de ramification égal à l'entier n_λ. Nous allons voir que la *formule de Riemann-Hurwitz* pour les revêtements ramifiés

$$\boxed{d \cdot \chi_W = \chi_V + \sum_\lambda (n_\lambda - 1)}$$

apparaît aussi comme une application du théorème des résidus (χ_V et χ_W désignant respectivement l'invariant d'Euler Poincaré de V et de W).

Nous allons en effet prendre pour F le fibré image réciproque $f^{-1}T(W) \longrightarrow V$, et le munir de la connexion métrique à singularités ∇ définie de la façon suivante : soit ∇^0 une connexion sur T(V) respectant une métrique riemannienne g_0 ; l'application linéaire tangente à f définit un isomorphisme de fibrés vectoriels $T(V)_{|U} \xrightarrow[\approx]{f'} f^{-1}T(W)_{|U} = F_{|U}$ où $U = V - S$; on définit alors ∇ comme la connexion à singularités sur F, d'ensemble singulier S, égale à $f'(\nabla^0)$ [la métrique riemannienne sur F n'est elle-même définie qu'au-dessus de U, mais peu importe pour le théorème des résidus, ainsi que nous l'avons déjà remarqué]. Soient alors (A_λ, B_λ) une base orthonormée du module des champs de vecteurs sur un voisinage U_λ de m_λ dans V, et ω_λ la 1-forme sur U telle que $\nabla B_\lambda = \omega_\lambda \,.\, A_\lambda$ (on suppose évidemment que $m_\mu \notin U_\lambda$ dès que $\mu \neq \lambda$). Notons (A'_λ, B'_λ) les sections de $F_{|U - \{m_\lambda\}}$ obtenues par l'isomorphisme f' :

$$\begin{aligned} f'(A_\lambda) &= A'_\lambda \quad \text{sur} \quad U_\lambda - \{m_\lambda\}, \\ f'(B_\lambda) &= B'_\lambda \qquad\quad '' \qquad\quad . \end{aligned}$$

D'après le corollaire du théorème 2,

$$\text{Rés}_{m_\lambda}(\nabla) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda + I(A'_\lambda, m_\lambda)$$

(où m_λ est intérieur au triangle T_λ d'une triangulation K de V dont le 1-squelette ne rencontre pas S, et dont chaque triangle contient au plus 1 point singulier).

Mais $I(A'_\lambda, m_\lambda) = n_\lambda - 1$, $\dfrac{1}{2\pi} \sum_\lambda \int_{\partial T_\lambda} \omega_\lambda = \chi_V$ d'après le théorème de Gauss-Bonnet et

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \text{Rés}_m(\nabla) &= \langle \chi(f^{-1}T(W), [V] \rangle = \langle f^* \chi(T(W)), [V] \rangle \\ &= \langle \chi(T(W)), f_*[V] \rangle = d \cdot \langle \chi(T(W)), [W] \rangle = d \cdot \chi_W \,, \end{aligned}$$

d'où la formule de Riemann-Hurwitz.

(Le cas où $F \longrightarrow V$ est le fibré tangent a été étudié plus en détails dans [6]).

7. Résidus des fibrés à singularités et caractères différentiels de Chern-Simons.

Dans tout ce §, on se donne (V, k, K, S, G) comme dans l'introduction, mais on suppose maintenant que le G-fibré principal $E \xrightarrow{p} U$ que l'on se donne en plus n'est défini qu'au-dessus du voisinage $U = V - S$ de $sk^{2k-1}K$ dans V. [On dira encore que E est un "fibré à singularités" sur V, d'ensemble singulier S]. Soit ω une connexion sur E.

On sait, en général, que les groupes d'homotopie du classifiant BG de G n'ont que de la torsion en dimension impaire. On fera ici l'hypothèse supplémentaire :

$$\boxed{\pi_{2k-1}(BG) = 0}\,.$$

Soit $P \in I^k(G)$ et $u \in H^{2k}(BG, \mathbf{Z})$ tels que $w(P) = r(u)$ dans le diagramme $I^k(G) \xrightarrow{w} H^{2k}(BG, \mathbf{R}) \xleftarrow{r} H^{2k}(BG, \mathbf{Z})$ (où w désigne l'homomorphisme de Chern-Weil universel, et r le changement de coefficients $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}$).

Le polynôme P est alors obligatoirement *normalisé* $(P \in I^k_{\mathbf{Z}}(G))$. On notera $S_{P,u}(\omega) : Z_{2k-1}(U) \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ le S-caractère correspondant (cf. [8]).

Soit $c : \Delta^{2k} \longrightarrow V$ un $2k$-simplexe de K, et s une section différentiable de E définie au-dessus d'un voisinage $w_{\partial c}$ de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U. [Prenant pour $w_{\partial c}$ un voisinage tubulaire de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U, une telle section existe toujours, puisque nous avons supposé $\pi_{2k-1}(BG) = 0$ et que la restriction du fibré E à $w_{\partial c}$ est donc triviale]. A l'aide de cette section, on peut encore définir le nombre $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_s, \omega}(P)$.

Bien que le lemme 1 ne se généralise pas, et que par conséquent le nombre ci-dessus dépende en général de la classe d'homotopie de la section s, nous allons voir que sa classe modulo $\mathbf{Z}$ n'en dépend pas.

Plus précisément, on a le

THEOREME 4. – (i) *Le nombre* $\int_{\partial c} \Delta_{\omega_s,\omega}(P)$ *ne dépend que de la classe d'homotopie de la section* s.

(ii) *La classe modulo* $\mathbf{Z}$ *du nombre ci-dessus (notée* $\overline{\text{Rés}_c(\omega, \text{P})}$) *ne dépend pas du choix de* s,

(iii) $\overline{\text{Rés}_c(\omega, \text{P})} = \langle \text{S}_{\text{P},u}(\omega), \partial c \rangle$ (∂c *est un cycle de* U),

(iv) *Le fibré* $\text{E}_{|sk^{2k-1}\text{K}}$ *admet une extension* $\widetilde{\text{E}}$ *à un voisinage tubulaire* $\widetilde{\text{U}}$ *de* $sk^{2k}\text{K}$ *dans* V.

On a alors $\overline{\text{Rés}_c(\omega, \text{P})}$ = *classe modulo* $\mathbf{Z}$ *de* $\text{Rés}_c(\widetilde{\omega}, \text{P})$ (*où* $\widetilde{\omega}$ *désigne la restriction de* ω *à* $\text{U} \cap \widetilde{\text{U}}$).

Soient s_0 et s_1 deux sections différentiables de E au-dessus d'un voisinage $w_{\partial c}$ de $c(\partial\Delta^{2k})$ dans U. Il existe une unique fonction différentiable $g : w_{\partial c} \longrightarrow \text{G}$ telle que $s_1 = s_0 . g$ et on a alors :

$$s_0^*(\omega_{s_0}) = 0$$

$$s_0^*(\omega_{s_1}) = g^*(\theta_\text{G})$$

$$s_0^*(t\omega_{s_1} + (1-t)\,\omega_{s_0}) = g^*(t\theta_\text{G})$$

et

$$\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(\text{P}) = g^*(\text{T}_{\theta_\text{G}}(\text{P})).$$

Puisque, d'après la formule (ii) du § .2,

$$d\Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}, \omega}(\text{P}) = \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(\text{P}) - \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(\text{P}) + \Delta_{\omega_{s_0}, \omega_{s_1}}(\text{P}),$$

on en déduit : $\displaystyle\int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_1}, \omega}(\text{P}) - \int_{\partial c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(\text{P}) = \int_{g_*(\partial c)} \text{T}_{\theta_\text{G}}(\text{P})$.

Si s_0 et s_1 sont homotopes, la fonction $g : w_{\partial c} \longrightarrow \text{G}$ est homotope à une application constante et $g_*(\partial c)$ est un bord, d'où la partie (i) du théorème. Dans le cas général $\displaystyle\int_{g_*(\partial c)} \text{T}_{\theta_\text{G}}(\text{P})$ est un entier, puisque P est normalisé, d'où la partie (ii).

Notons $(\text{E}_0 \longrightarrow \text{B}, \omega_0)$ un G-fibré différentiable E_0 dont la base est G-classifiante pour la dimension de U, muni d'une connexion ω_0 universelle pour les connexions sur les fibrés de base dim U : une telle connexion universelle existe d'après Narasimhan et Ramanan (cf. [7]).

Soit $f : \text{U} \longrightarrow \text{B}_0$ une application classifiante pour la connexion (projection d'un morphisme $\hat{f} : \text{E} \longrightarrow \text{E}_0$ tel que $\omega = \hat{f}^*(\omega_0)$).

On a alors, par naturalité : $\langle \text{S}_{p,u}(\omega), \partial c \rangle = \langle \text{S}_{p,u}(\omega_0), f_*(\partial c) \rangle$.

Puisque $(f \circ c_{|\partial\Delta^{2k}}) \sim 0$, il existe $f_c : \Delta^{2k} \longrightarrow \text{B}_0$ tel que $(f \circ c_{|\partial\Delta^{2k}}) \sim (f_c \circ \iota)$ (où ι désigne l'inclusion $\partial\Delta^{2k} \hookrightarrow \Delta^{2k}$) :

on en déduit $f_*(\partial c) = \partial f_c$, et, par définition des S caractères (cf. [8]), $\langle S_{p,u}(\omega_0), \partial f_c \rangle = \int_{f_c} \lambda_{\omega_0}(P)$ modulo $\mathbf{Z}$.

Soit
$$\begin{tikzcd} \Delta^{2k} \times G \arrow[r, "\hat{f}_c"] \arrow[d] & E_0 \arrow[d] \\ \Delta^{2k} \arrow[r, "f_c"] & B_0 \end{tikzcd}$$

un homomorphisme de G-fibrés principaux différentiables au-dessus de f_c, et s_0 une section différentiable arbitraire du fibré trivial $\Delta^{2k} \times G \longrightarrow \Delta^{2k}$.

On a alors : $d\Delta_{\omega_{s_0}, \hat{f}_c^*(\omega_0)}(P) = \lambda_{\hat{f}_c^*(\omega_0)}(P)$ et, par conséquent, $\int_{f_c} \lambda_{\omega_0}(P) = \int_{\partial f_c} \Delta_{\omega_{s_0}, \omega}(P)$, d'où la partie (iii) du théorème. La partie (iv) est évidente, une fois remarqué que l'hypothèse $\pi_{2k-1}(BG) = 0$ implique l'existence d'une extension $\widetilde{f}$ de $f_{|sk^{2k-1}K}$ à $sk^{2k}K$: il suffit alors d'appliquer le théorème 1 à $(\widetilde{E}, \widetilde{\omega})$ pour conclure.

Remarque. – Cette extension $\widetilde{f}$ n'est pas unique, en général, même à homotopie près.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BOTT, Characteristic classes and foliations, (mimeographied notes by L. Conlon, (1972).

[2] S. CHERN et J. SIMONS, Characteristic forms and transgression I, *mimeographied notes, Stonybrook Univ.*, (1972).

[3] W. GREUB, S. HALPERIN et R. VAN STONE, Connections, curvature and cohomology, tome I (Ac. Press. 1973).

[4] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VAN STONE, Connections, curvature and cohomoly, tome II.