

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL GAUDIN

**Spectre du noyau intégral**  $(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$

*Annales de l'institut Fourier*, tome 31, n° 1 (1981), p. 225-238

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1981\\_\\_31\\_1\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_225_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SPECTRE DU NOYAU INTÉGRAL

$$(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$$

par Michel GAUDIN

### 1. L'équation aux différences.

On décrit dans cet article une méthode de détermination des fonctions et valeurs caractéristiques de l'équation intégrale homogène

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2 + 1} = 0. \quad (1)$$

Cette équation réalise l'une des schématisations les plus simples d'un certain type de problèmes de propagation d'ondes. Deux problèmes de mécanique quantique résolus récemment, un modèle unidimensionnel pour trois particules en interaction (1) et un modèle du type de Kondo pour deux électrons en présence d'un moment localisé (2), présentent des analogies étroites avec des problèmes de diffraction par un ensemble de lames minces. Si l'on dépouille ces problèmes de l'aspect contingent dû aux modèles particuliers, on rencontre le genre d'équation linéaire ici étudiée, dont le noyau est manifestement lié à l'inversion de l'opérateur  $\Delta - 1$ , ou au dalembertien à deux dimensions d'espace. Le contraste entre la simplicité du noyau intégral et le caractère non-trivial de la solution constitue aussi une motivation à la publication des résultats qui suivent.

Le noyau  $K \equiv (2\pi)^{-1}(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$  défini sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  est symétrique, réel et de trace finie. On a

$$\text{tr } K = 8^{-1/2}, \quad \text{tr } K^2 = (4\pi)^{-1}. \quad (2)$$

Il est donc du type de Hilbert-Schmidt. C'est aussi un noyau positif dont le déterminant est de genre zéro.

On introduit la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{\varphi(y)}{x^2 + y^2 + 1} \quad (3)$$

et les transformées de Fourier  $\tilde{\varphi}(\xi)$  et  $\tilde{\varphi}(\xi, \eta)$  de  $\varphi(x)$  et de  $\varphi(x, y)$  :

$$\tilde{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi(x) e^{ix\xi}, \quad (4)$$

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta) = (2\pi)^{-2} \iint dx dy \varphi(x, y) e^{i(x\xi + y\eta)}. \quad (5)$$

Leur existence résulte de la sommabilité de  $\varphi$  et de  $\varphi^2$  prouvée section 3. Notre équation intégrale est alors équivalente à l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(-\Delta + 1)\tilde{\varphi}(\xi, \eta) - \lambda\tilde{\varphi}(\eta, 0)\delta(\xi) = 0, \quad (6)$$

où  $\Delta$  désigne le Laplacien à deux dimensions, augmentée de la relation

$$\tilde{\varphi}(\xi) \equiv \lambda\tilde{\varphi}(\xi, 0) \quad (7)$$

et de la condition à l'infini résultant de la continuité évidente de  $\varphi$   $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(\xi) = 0$ . L'équation (6) est analogue à celle de Schrödinger pour un état lié et manifeste l'analogie de notre problème avec la diffraction d'une onde à deux dimensions. Selon la méthode de Sommerfeld, on représente la fonction d'onde inconnue, en coordonnées polaires  $\xi = \rho \cos \theta$ ,  $\eta = \rho \sin \theta$  sous la forme de l'intégrale de contour

$$\tilde{\varphi}(\rho, \theta) = \int_{(C)} d\omega e^{\rho \cos \omega} (\phi(\omega - \theta) + \phi(\omega + \theta)) \quad (8)$$

qui vérifie certainement l'équation (6) dans l'ouvert  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Pour la représentation (8), on a tenu compte du fait que  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont des fonctions paires. On suppose que la fonction transformée  $\phi(\omega)$  est holomorphe au voisinage de  $\Im m \omega = +\infty$ ; (C) est un contour embrassant la bande  $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$  au voisinage de  $\Im m \omega = +\infty$ , de sorte que  $\Re \cos \omega$  soit négatif à l'infini et que l'intégrale converge.

Sur la droite  $\xi = 0$ , nous avons la condition de raccordement qui découle de (6)

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\varphi}(\xi, \eta) \Big|_{\xi=+0} = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(\eta) \quad (9)$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\varphi}(\rho, \theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(\rho); \quad (10)$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \frac{2}{\rho} \int_{(C)} d\omega e^{\rho \cos \omega} \left( -\frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega - \theta) + \frac{\partial}{\partial \omega} \phi(\omega + \theta) \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \quad (11)$$

$\phi$  étant borné à l'infini d'après notre hypothèse d'holomorphic, l'intégration par partie donne

$$\tilde{\varphi}(\rho) = -2 \int_{(C)} \sin \omega d\omega e^{\rho \cos \omega} \left( \phi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - \phi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) \right). \quad (12)$$

Or, d'après (7) et (8), on a

$$\tilde{\varphi}(\rho) = 2\lambda \int_{(C)} \phi(\omega) d\omega e^{\rho \cos \omega}. \quad (13)$$

Il suffit donc que  $\phi$  satisfasse l'équation aux différences

$$\phi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) - \phi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\lambda}{\sin \omega} \phi(\omega). \quad (14)$$

Nous chercherons des solutions méromorphes dans la bande  $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ , qui par conséquent le seront dans tout le plan  $\omega$  en vertu de (14). Dans le voisinage de  $\Im m \omega = +\infty$ , la solution de croissance maximum admissible se comporte comme

$$\phi(\omega) = 1 - \lambda e^{i\omega} - \frac{2i\lambda^2}{\pi} \omega e^{2i\omega} + \dots \quad (15)$$

Supposant en effet que  $\phi(\omega)$  soit fini au voisinage de  $\Im m \omega = +\infty$ , il suffit de résoudre l'équation aux différences (14) par approximations successives pour obtenir le développement ci-dessus, normalisé à  $\phi(\infty) = 1$ .

Il n'existe pas de développement de la forme  $\sum_n a_n e^{in\omega}$  entraînant l'existence d'une solution périodique.

Il est commode de changer de fonction inconnue en posant

$$\phi(\omega) = \sin \omega f(\omega) \quad (16)$$

ce qui donne la relation

$$f\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - x(\omega) f(\omega) = 0 \quad (17)$$

avec  $x(\omega) \equiv \frac{\lambda}{\cos \omega}$ .

Au voisinage de  $\Im m \omega = +\infty$  :

$$f(\omega) = e^{i\omega} - \lambda e^{2i\omega} + O(\omega e^{2i\omega}). \quad (18)$$

## 2. Solution méromorphe.

La méthode pour construire les solutions méromorphes d'équations aux différences secondes analogues à (17) a été exposée en détail dans des travaux antérieurs (1, 2), c'est pourquoi le développement de cette section sera rapide.

On est amené à représenter la fonction méromorphe inconnue  $f$  comme somme de deux fonctions non uniformes, mais prolongées l'une de l'autre sur une «surface de Riemann» à deux feuillets  $\mathfrak{S}$  :

$$f(\omega) = g(\omega) + \tilde{g}(\omega), \quad (19)$$

de sorte que l'on ait la récurrence

$$g\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + g\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) - x(\omega) \tilde{g}(\omega) = 0 \quad (20)$$

et la propriété multiplicative

$$\begin{cases} g(\omega + 2\pi) = \eta^{-1}(\omega) g(\omega) \\ \tilde{g}(\omega + 2\pi) = \tilde{\eta}^{-1}(\omega) \tilde{g}(\omega). \end{cases} \quad (21)$$

On trouve aisément à l'aide de (20)

$$\eta = \frac{\sqrt{\Delta} + \lambda^2}{\sqrt{\Delta} - \lambda^2}, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{\sin^2 2\omega + \lambda^4}. \quad (22)$$

La surface de Riemann  $\mathfrak{S}$  est celle de la courbe  $(\sqrt{\Delta}, \omega)$  uniformisée dans le plan  $\omega$  par le système de coupures indiquées figure 1. La fonction  $\sqrt{\eta}$  est méromorphe sur  $\mathfrak{S}$  : ses pôles et zéros sont simples, voir figure 1. Comme on a

$$\widetilde{\sqrt{\Delta(\omega)}} = -\sqrt{\Delta(\omega)} = \sqrt{\Delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\Delta(-\omega)}, \quad (23)$$

ceci entraîne

$$\tilde{\eta}(\omega) = \eta^{-1}(\omega) = \eta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right). \quad (24)$$

D'après (21) le produit  $g(\omega)\tilde{g}(\omega)$  est  $2\pi$ -périodique et uniforme. On écrira précisément

$$g(\omega)\tilde{g}(\omega) \equiv C(\omega)R(\omega) \quad (25)$$

où  $C(\omega)$  est méromorphe et de période  $\frac{\pi}{2}$ , la fonction  $R$  se calculant directement à partir de (20)

$$R(\omega) \sim x_1 x_2 x_3 - x_1 - x_3 = 2\lambda \frac{\cos \omega}{\sin^2 2\omega}, \quad x_n = x\left(\omega + n \frac{\pi}{2}\right). \quad (26)$$

On prendra  $R \equiv \cos \omega$ , du fait de la remarque  $C(\omega) = C\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Si l'on définit maintenant le quotient

$$E(\omega) = g(\omega)/\tilde{g}(\omega), \quad (27)$$

méromorphe sur  $\mathfrak{S}$ , nos relations de récurrence sont équivalentes à

$$E(\omega)\tilde{E}(\omega) = 1, \quad (28)$$

$$E(\omega)E\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = h(\omega) \equiv \eta(\omega) \frac{\sqrt{\Delta} - (\sin 2\omega + \lambda^2)}{\sqrt{\Delta} + (\sin 2\omega + \lambda^2)}. \quad (29)$$

Aidé par l'analyse des zéros et des pôles sur  $\mathfrak{S}$ , on montre les relations algébriques

$$h^2(\omega) = \eta(\omega)\eta_0(\omega) \quad \eta_0(\omega) \equiv \frac{\sqrt{\Delta} - \sin 2\omega}{\sqrt{\Delta} + \sin 2\omega} \quad (30)$$

avec les propriétés

$$\eta_0\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \eta_0^{-1}(\omega) = \tilde{\eta}_0(\omega). \quad (31)$$

La fonction  $\eta_0$  est sans zéros ni pôles. On définit la fonction  $\log \eta_0$  sur  $\mathfrak{S}$  avec  $\text{Arg } \eta_0 = 0$  sur l'axe réel. On introduit le paramètre  $\alpha$  relié à  $\lambda$  en posant

$$\lambda^2 = sh 2\alpha. \quad (32)$$

On aura à utiliser  $\text{Arg } \eta_0(i\alpha) = -\pi$ . (33)

Pour résoudre les relations (28) et (29) on pose

$$\begin{cases} E(\omega) = \eta_0^{1/4} e^{-\frac{\omega}{\pi} \log \eta - F(\omega)} E_0(\omega), \\ \tilde{E}(\omega) = \eta_0^{-1/4} e^{\frac{\omega}{\pi} \log \eta + F(\omega)} \tilde{E}_0(\omega) \end{cases} \quad (34)$$

avec les conditions sur la fonction indéterminée  $E_0(\omega)$  sur  $\mathfrak{S}$  :

$$E_0(\omega) \tilde{E}_0(\omega) = E_0(\omega) E_0\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (35)$$

Le fait que  $\tilde{E}$  soit le prolongement de  $E$  sur  $\mathfrak{S}$  équivaut à la relation suivante sur les coupures

$$F(ix + 0) + F(ix - 0) + \frac{ix}{\pi} (\log \eta(ix + 0) + \log \eta(ix - 0)) = 0, \quad (36)$$

$$-\alpha < x < +\alpha.$$

Compte tenu de la valeur de  $\eta(ix \pm 0)$ , il suffit de prendre pour  $F(\omega)$  ce qui s'appellerait l'intégrale abélienne de troisième espèce si la surface  $\mathfrak{S}$  était la surface de Riemann d'une courbe algébrique :

$$F(\omega) = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\pi} \int_0^{i\alpha+0} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} \cdot \frac{\sin 4\omega}{\cos 4\omega' - \cos 4\omega}. \quad (37)$$

La fonction  $\Psi(\omega) = e^{-\frac{\omega}{\pi} \log \eta - F(\omega)} \equiv \Psi(-\omega)$  vérifie bien les relations

$$\Psi(\omega) \Psi\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\eta}, \quad \Psi(\omega) \tilde{\Psi}(\omega) = 1. \quad (38)$$

Elle est méromorphe sur  $\mathfrak{S}$ ; holomorphe à l'origine. On a  $\text{Arg } \varphi(i\alpha) = 0$ . D'après (33), nous obtenons

$$E(i\alpha) = e^{-\frac{i\pi}{4}} E_0(i\alpha). \quad (39)$$

Il existe évidemment dans la définition de  $F$  un arbitraire qui est celui du contour joignant l'origine au point  $i\alpha$  et qui peut être répercuté sur la fonction indéterminée  $E_0$ . Pour des raisons d'uniformité à l'infini dans la variable  $\omega$  on prendra

$$E_0(\omega) = e^{-sG(\omega)} \equiv e^{-s\sqrt{\Delta} \int_0^{\pi/4} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta'}} \frac{\sin 4\omega}{\cos 4\omega' - \cos 4\omega}} \quad (40)$$

où  $s$  est un nombre indéterminé. La fonction  $E_0$  ainsi choisie vérifie les relations (35); elle est sans zéros ni pôles et uniforme sur  $\mathfrak{S}$  étant exclu comme plus haut le voisinage de l'infini.

On calcule aisément la valeur de  $G$  au points de branchement :

$$G(i\alpha) = i \frac{\pi}{4}, \quad (41)$$

et par conséquent, d'après (39) et (40)

$$E(i\alpha) = e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)}, \quad (42)$$

qui nous sera utile dans la section suivante.

Notons qu'à ce stade, nous avons tous les éléments pour construire une solution de notre équation aux différences qui soit méromorphe à distance finie. A un facteur trigonométrique près de période  $\pi/2$  on a

$$f(\omega) = \sqrt{R(\omega)} (\sqrt{E(\omega)} + \overline{\sqrt{E(\omega)}}). \quad (43)$$

La méromorphie n'est pas évidente sur l'expression (43), étant données les définitions de  $R \equiv \cos \omega$ , de  $E$ , et de ses composants :  $E_0$  donné par (40),  $F$  donné par (37),  $\eta$  et  $\eta_0$  donnés en (22) et (30). Cependant, avec les propriétés de méromorphie sur  $\mathfrak{S}$  de  $\Psi$  et de  $\eta_0$ , le fait que  $\eta_0$  soit sans zéros ni pôles et que ceux de  $\Psi$  soient aisément déduits de (38), on montre facilement que la multiplicité des pôles et des zéros du produit  $ER$  est paire, ce qui suffit. Il faut bien noter que la solution (43) correspond au choix très particulier  $C(\omega) \equiv 1$ .

### 3. Les fonctions propres.

Seules les conditions conjointes de croissance et d'holomorphie dans les domaines voulus peuvent achever de déterminer les fonctions  $f$  cherchées. Pour connaître ces conditions, il faut revenir aux propriétés de  $\varphi$  et de  $\tilde{\varphi}$ . Puisque  $K$  est un noyau de Hilbert-Schmidt,  $\varphi$  est de carré sommable sur  $\mathbf{R}$ . D'après (1), les fonctions  $\varphi(x)$  et  $\varphi(x)(x^2 + 1)^{-1/2}$  sont simultanément sommables ou non. Or la seconde l'est en vertu de l'inégalité de Schwartz, donc la première. La fonction  $\varphi(x)$  est donc holomorphe en  $x$  dans la bande  $|\Im x| < 1$ . La transformée de Fourier  $\tilde{\varphi}$  existe, et  $\varphi$  décroît comme  $\lambda(2\pi)^{-1} \tilde{\varphi}(0) x^{-2}$  à l'infini.  $\tilde{\varphi}(\rho)$  tend vers zéro à l'infini réel au moins comme  $\exp -|\rho|$ .  $\phi(\omega)$  et  $f(\omega)$  sont donc holomorphes à l'intérieur de la bande  $[-\pi, +\pi]$  tout-entière. L'examen des zéros et des pôles (voir fig. 2) de la solution (43) avec le choix  $C(\omega) \equiv 1$  montre que cette solution est en fait holomorphe dans la bande voulue. On peut remplacer le contour (C) pour l'intégrale



de Sommerfeld par deux droites parallèles de sorte que l'on ait

$$\int_{(C)} d\omega \dots = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} - \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} d\omega \dots \quad -\pi < a < -\frac{\pi}{2}, \\ + \frac{\pi}{2} < b < +\pi.$$

Or l'existence de  $\tilde{\varphi}(0)$  dans cette représentation entraîne que  $f(\omega)$  décroisse plus vite que  $e^{i\omega}$  pour  $\Im \omega = +\infty$ . La croissance de la solution (43) est au contraire extrêmement rapide en général. En effet, d'après (37) et (40), on a, au voisinage de l'infini,

$$F(\omega) + s G(\omega) \simeq \Lambda \sqrt{\Delta} \simeq \Lambda \sin 2\omega \quad (45)$$

où la valeur de la quantité  $\Lambda$ , dépendant de  $s$  et de  $\lambda$ , est

$$\Lambda = \frac{4}{\pi} \int_0^{i\alpha+0} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} + s \int_0^{\pi/4} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}}. \quad (46)$$

Par conséquent, si  $\Lambda$  n'est pas nul, la fonction  $\sqrt{E}$ , ou son inverse, croît comme  $\exp\left(\frac{\Lambda}{4} e^{2\Im \omega}\right)$ , croissance qui ne peut être compensée par aucune fonction  $C(\omega)$  méromorphe dans tout le plan, donc rationnelle en  $e^{4i\omega}$ . Il est donc nécessaire pour l'existence d'une fonction  $f$  bornée à l'infini d'avoir

$$\Lambda = 0, \quad (47)$$

ce qui constitue une première relation entre  $s$  et  $\lambda$ .

Si la condition  $\Lambda = 0$  est réalisée, on voit que  $\sqrt{E}$  se comporte à l'infini comme  $\eta_0^{1/8}$ , c'est-à-dire que  $f$  se comporte comme  $\sqrt{R} e^{-\frac{i\omega}{2}}$ , abstraction faite du facteur  $C(\omega)$ . Compte tenu de  $R = \cos \omega$ , on aurait dans le demi-plan supérieur  $f(\omega) \simeq e^{-i\omega}$  ce qui est une croissance trop forte d'un facteur  $e^{-2i\omega}$ . Il nous faut donc trouver un facteur  $\sqrt{C(\omega)}$  dont la décroissance dans le demi-plan supérieur sera au moins  $e^{2i\omega}$ , mais qui ne crée pas de pôle à  $f$  dans la bande  $[-\pi, +\pi]$ . La seule possibilité est que  $\sqrt{C}$  soit un diviseur de la fonction  $\sqrt{E} \pm \overline{\sqrt{E}}$  sur  $\mathfrak{S}$  (d'après (28),  $\sqrt{E} \overline{\sqrt{E}} = \pm 1$ ). Peut-on choisir le nombre  $s$  encore indéterminé de sorte que  $(E \pm 1)$  s'annule en une suite infini de points congruents mod.  $\frac{\pi}{2}$  ?

D'après (42) nous avons cette possibilité en  $\pm i\alpha \pmod{\frac{\pi}{2}}$ .  
Par exemple avec le signe  $+$  :

$$E(\pm i\alpha) + 1 \equiv e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)} + 1 = 0 \implies s = 8n - 5, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (48)$$

Pour ces valeurs de  $s$ , on doit donc prendre  $C = \Delta^{-1}$  ce qui donne pour  $f$ , à un facteur constant près,

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{\cos \omega}{\Delta(\omega)}} \left( \sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{E}} \right), \quad (49)$$

définissant la fonction cherchée qui est uniforme et holomorphe dans l'intérieur de la bande  $[-\pi, +\pi]$ ; elle décroît à l'infini en  $e^{-|\operatorname{Im} \omega|}$ . C'est aussi une fonction paire. En effet  $\sqrt{\Delta(\omega)}$ , avec les coupures choisies (voir fig. 1), est impaire. Pour connaître la parité de  $\sqrt{E}$ , il suffit de calculer  $\sqrt{E(\pm i\alpha)}$ . D'après (42) et (48), on a  $\sqrt{E(\pm i\alpha)} = \pm i(-)^n$ ,  $\sqrt{E}$  est donc impaire.

En choisissant le signe  $-$ , on aurait

$$E(\pm i\alpha) - 1 \equiv e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)} - 1 = 0 \implies s = 8n - 1. \quad (50)$$

Mais la solution uniforme

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{\cos \omega}{\Delta}} \left( \sqrt{E} - \frac{1}{\sqrt{E}} \right) \quad (51)$$

est impaire, car  $\sqrt{E}$  est alors paire :  $\sqrt{E(\pm i\alpha)} = (-)^n$ . Cette solution impaire de (17) donne identiquement  $\varphi \equiv 0$  et ne répond pas à notre problème.

Montrons maintenant que  $f$  et  $\varphi$  sont en fait la même fonction. En effet, d'après (13) et la propriété d'holomorphie dans la bande  $[-\pi, +\pi]$  on peut déformer le contour (C) de sorte que

$$\int_{(C)} d\omega \dots = \int_{\frac{\pi}{2} - i\infty}^{\frac{\pi}{2} + i\infty} - \int_{-\frac{\pi}{2} - i\infty}^{-\frac{\pi}{2} + i\infty} d\omega \dots \quad (52)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\rho) &= 2\lambda \int_{(C)} d\omega \phi(\omega) e^{\rho \cos \omega} \\ &= 2\lambda \left\{ \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) e^{-\rho \sin \omega} - \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \phi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) e^{\rho \sin \omega} \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Compte tenu de la parité de  $\phi(\omega) = \sin \omega f$ , impaire par le choix (48), (49), on obtient

$$\tilde{\varphi}(\rho) = 4i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt \phi\left(\frac{\pi}{2} + it\right) e^{i\rho sht}. \quad (53)$$

La comparaison entre (53) et (3) donne l'identité

$$\varphi(x) = 8i\pi\lambda \phi\left(\frac{\pi}{2} + it\right), \quad x = sht;$$

ou encore, d'après (16)

$$\varphi(x) = \frac{1}{cht} f\left(\frac{\pi}{2} + it\right) \quad (54)$$

où  $f$  a l'expression suivante

$$f(\omega) = \left(\frac{\cos \omega}{\sin^2 2\omega + \lambda^4}\right)^{1/2} \\ ch \left\{ -\frac{1}{4} \log \eta_0 + \frac{\omega}{\pi} \log \eta + F + (8n - 5)G \right\}, \quad (55)$$

les éléments constituants ayant été explicités section 2. Il reste à montrer cependant qu'il existe une racine  $\lambda_n$  à l'équation (47) pour certains entiers  $n$ . La présentation de la fonction propre (55) pourrait sans doute être améliorée en effectuant la translation  $\omega = \frac{\pi}{2} + it$  de façon à rendre manifeste le caractère réel. On pourrait aussi utiliser l'uniformisation elliptique de la section suivante pour calculer  $G$  et faciliter la question de la définition des branches des fonctions algébriques figurant dans  $f(\omega)$ . On aimerait encore donner une forme explicitement méromorphe sous forme de produit infini de facteurs rationnels dans une variable uniformisante, tout au moins pour la fonction  $E$  ou  $\Psi$  qui ne sont que des généralisations de la fonction  $\Gamma$  d'Euler sur une surface de Riemann algébrique. Il y aurait en outre le problème de la norme de  $\varphi$ . Nous laisserons là toutes ces questions concernant les fonctions propres pour aborder dans la section qui suit le calcul des valeurs propres de  $K(x, y)$ .

#### 4. Détermination du spectre.

Il s'agit de résoudre l'équation (46) pour la valeur caractéristique  $\lambda$  en fonction de  $s = 8n - 5$ . Pour calculer les intégrales, on introduit l'uniformisation elliptique (1)

$$e^{2i\omega} = e^{-2\alpha} \operatorname{sn}\left(K + i \frac{K'}{2} - u; k\right), \quad \sqrt{k} = e^{-2\alpha}, \quad (56)$$

de la courbe  $(\sqrt{\Delta}, e^{2i\omega})$ . Dans les notations de Jacobi, le module est  $k$  et le rapport des périodes  $\tau = \pi K'/K$ , avec  $q = e^{-\tau}$ . On a les formules utiles

$$\sin 2\omega = (1 - k) \frac{\operatorname{sn} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u}, \quad \cos 2\omega = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 u}, \quad (57)$$

$$d\omega/\sqrt{\Delta} = \sqrt{k} du, \quad (58)$$

et, par conséquent

$$\int_0^{\pi/4} \frac{d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} = \sqrt{k} K. \quad (59)$$

De même

$$S_0 = \int_0^{i\alpha+0} \frac{\omega' d\omega'}{\sqrt{\Delta(\omega')}} = \frac{\sqrt{k}}{2i} \int_0^{iK/2} du \log(\sqrt{k} \operatorname{sn}(K + u)). \quad (60)$$

A l'aide du développement en série de Fourier (3)

$$\begin{aligned} \log(\sqrt{k} \operatorname{sn}(K + u)) &= \log(2q^{1/4} \cos x) \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m} \frac{q^m}{1 + q^m} \cos 2mx, \quad x = \frac{\pi u}{2K}, \end{aligned} \quad (61)$$

l'intégration s'effectue facilement

$$S_0 = -\frac{K\sqrt{k}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{\tau}{4}\right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^{m-1}}{m^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{m\tau}{2}} \right\}. \quad (62)$$

Notre équation (46) s'écrit donc

$$\left(\frac{\tau}{4\pi}\right)^2 - \frac{1}{12} + \sigma = \frac{s}{2} = 4n - \frac{5}{2} \quad (63)$$

avec la définition de la série  $\sigma$  :

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^{m-1}}{m^2} \frac{1}{\operatorname{ch}(m\tau/2)}. \quad (64)$$

Comme on a  $\sigma < \pi^{-2}$ , on voit que les valeurs de  $n$  possibles sont restreintes aux entiers naturels. Puisque  $\sigma(\tau)$  est décroissante dans la région d'intérêt, le rapport  $\tau$  est la solution positive unique de l'équation transcendante

$$\left(\frac{\tau}{4\pi}\right)^2 + \sigma(\tau) + \frac{29}{12} = 4n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (65)$$

dont on calcule numériquement les racines par itérations très rapidement convergentes. On a la formule asymptotique très précise même pour la première valeur

$$\tau \simeq 4\pi \left( 4n - \frac{29}{12} - \frac{2}{\pi^2} e^{-4\pi\sqrt{n}} \right)^{1/2}. \quad (66)$$

Pour le passage de  $\tau$  à  $\lambda$  on utilise le développement

$$q = e^{-\tau} = \epsilon + 2\epsilon^5 + O(\epsilon^9), \quad 2\epsilon = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}. \quad (67)$$

Puisque  $\tau$  est supérieur à 15,  $q$  est inférieur à  $10^{-6}$ . On calcule  $\lambda$  par les formules

$$\lambda^2 = \operatorname{sh} 2\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{k} \right), \quad (68)$$

d'où l'expression asymptotique

$$\lambda_n \sim \frac{1}{2} q^{1/8} \sim \frac{1}{2} e^{\tau/8} \sim \frac{1}{2} e^{\pi\sqrt{n}}. \quad (69)$$

Pour le calcul numérique les deux premiers termes de la série  $\sigma$  suffisent pour obtenir huit chiffres exacts de  $\lambda$ . Donnons le tableau des dix premières valeurs propres du noyau  $K$ , et leurs carrés.

$n$	$\lambda_n^{-1}$	$\lambda_n^{-2}$
1	.2773123771	.0769021545
2	.0488745242	.0023887191
3	.0154590510	.0002389822
4	.0061204917	.0000374604
5	.0027570549	.0000076013
6	.0013543449	.0000018342
7	.0007088009	.0000005023
8	.0003895561	.0000001517
9	.0002226755	.0000000495
10	.0001314796	.0000000172

Un bon test d'exactitude est fourni par le calcul des traces, formules (2). On obtient

$$\sum_{n=1}^9 \frac{1}{\lambda_n} = .35319887.$$

Or, la première trace est exactement

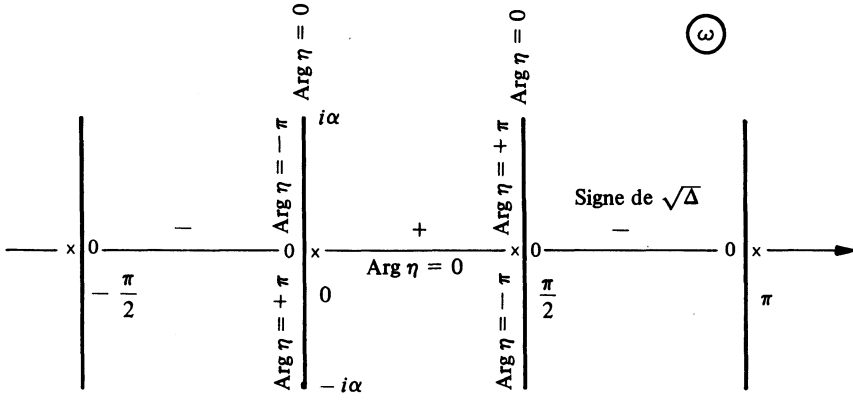


Fig. 1. — Système de coupures pour uniformiser  $\sqrt{\Delta}$ ,  $\eta$  et  $\log \eta$ . Pôles  $x$  et zéros  $0$  de  $\sqrt{\eta}$ .

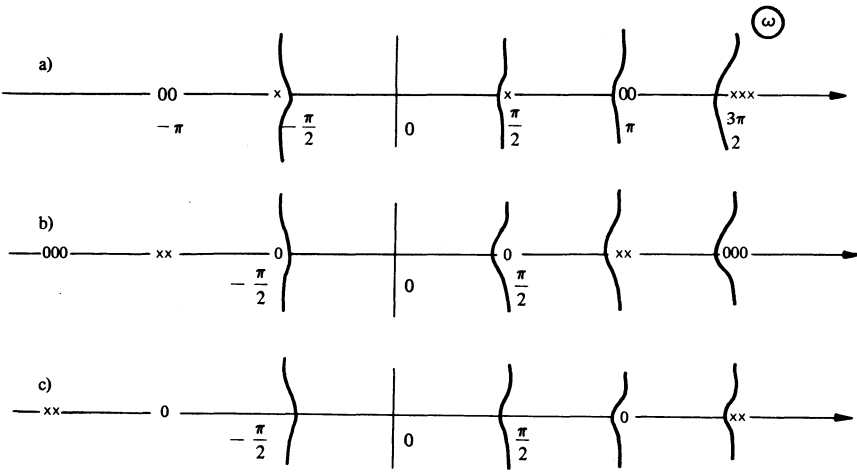


Fig. 2. — Pôles et zéros avec leur multiplicité des fonctions a)  $\Psi$ , b)  $g$ , c)  $\tilde{g}$ , dans «le premier feuillet» et au voisinage.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{8}} = .35355339 \dots$$

Une estimation, à l'aide de (69), de la série restante donne

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \approx 36 \cdot 10^{-5}$$

ce qui donne un accord de la même précision : .35355.

De même

$$\sum_{n=1}^9 \frac{1}{\lambda_n^2} = .0795774552,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{4\pi} = .0795774715.$$

Le reste de la série est estimé à  $16 \cdot 10^{-9}$  ce qui donne un accord de  $10^{-9}$ .

Enfin pour la trace d'ordre quatre :

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{\lambda_n^4} = .005919704,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} = \frac{1}{32} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) = .005919704 \dots$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. GAUDIN et B. DERRIDA, Solution exacte d'un problème modèle à trois corps. Etat lié, *Journal de Physique*, 36 (1975), 1183-1197.
- [2] M. GAUDIN, Sur le problème de deux ou trois électrons en présence d'un moment localisé, *Journal de Physique*, 39 (1978), 1143-1168.
- [3] E. WHITTAKER and G. WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge U.P. 4<sup>e</sup> éd. (1958).

Manuscrit reçu le 8 mai 1980  
révisé le 25 juin 1980.

Michel GAUDIN,  
Service de Physique Théorique  
CEN - Saclay  
B.P. n° 2  
91190 Gif-sur-Yvette.