

MARCEL BERGER

**Une borne inférieure pour le volume d'une variété riemannienne en fonction du rayon d'injectivité**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 30, n° 3 (1980), p. 259-265

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1980\\_\\_30\\_3\\_259\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_259_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE BORNE INFÉRIEURE POUR LE VOLUME D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE EN FONCTION DU RAYON D'INJECTIVITÉ

par Marcel BERGER

**THEOREME.** — *Pour toute dimension  $n$  et pour toute variété riemannienne compacte  $(M, g)$  de dimension  $n$  dont le rayon d'injectivité est supérieur ou égal à  $i$ , on a toujours  $V \geq \frac{\alpha(n)}{\pi^n} i^n$ , où  $V$  désigne le volume total de  $(M, g)$  et  $\alpha(n)$  le volume de la sphère canonique  $(S^n, \text{can})$  (c'est-à-dire la sphère de dimension  $n$  et de courbure sectionnelle constante égale à 1). Si en outre on a l'égalité  $V = \frac{\alpha(n)}{\pi^n} i^n$ , alors  $(M, g)$  est nécessairement isométrique à la sphère  $S^n$  muni de la métrique à courbure sectionnelle constante égale à  $\pi^2 i^{-2}$ .*

Pour  $n = 2$  le résultat figure dans [1], p. 35. Pour  $n \geq 3$  on trouvera dans [4] (D. 24, p. 242) l'inégalité plus faible  $V > \frac{1}{2} \frac{\alpha(n)}{\pi^n} i^n$ . La méthode utilisée ici est toujours celle des pages 236-242 de [4]. Par rapport à cette dernière la suppression du facteur  $\frac{1}{2}$  s'obtient par deux ingrédients nouveaux : le premier est une remarque *géométrique* (lemme 2 ci-dessous) et le second consiste à utiliser de façon systématique l'inégalité de Kazdan ([6], E. 2, p. 243) pour certaines fonctions paires autour de  $\frac{\pi}{2}$ .

Je remercie Arthur Lancelot Besse pour plusieurs conversations sur le sujet.

Nous employons systématiquement les notations de [3], texte qui reprend entre autres les appendices D et E de [4]. En particulier :  $dx$  désigne la mesure canonique de  $(M, g)$ ,  $d\mu$  celle de son fibré unitaire  $UM$  et  $d\sigma_x$  celle de la fibre au-dessus de  $X$ ,  $UM_x$  (c'est donc à dire la sphère des vecteurs de norme 1 tangents en  $x$  à  $M$ ). En sorte que  $d\mu = d\sigma_x \otimes dx$ . La boule ouverte géodésique de centre  $x$  de  $M$  et de rayon  $r$  est désignée par  $B_r(x)$  et la sphère correspondante par  $S_r(x)$ . Puis  $f(u, r)$  désigne la fonction définie sur  $UM \times \mathbf{R}_+$  par l'égalité de coordonnées polaires  $dx = d\sigma_x \otimes dr$  (cf. formule (3) de [3]). La projection  $UM \rightarrow M$  est notée  $p$  et le flot géodésique sur  $UM$  est désigné par  $\xi$ .

Finalement nous *normalisons*  $(M, g)$  en sorte que son rayon d'injectivité soit supérieur ou égal à  $\pi$ . Nous devons donc démontrer maintenant que  $V \geq \alpha(n)$ , puis que l'égalité est caractéristique de la sphère canonique.

LEMME 1. — Pour tout  $r$  dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et pour tout  $u$  dans  $UM$ , on a toujours  $V \geq \text{Vol}(B_r(p(u))) + \text{Vol}(B_{\pi-r}(p(\xi^\pi(u))))$ .

Puisque le rayon d'injectivité est supérieur ou égal à  $\pi$ , les deux points  $p(u)$  et  $p(\xi^\pi(u))$  de  $M$  sont à distance  $\pi$  l'un de l'autre et donc les boules  $B_r(p(u))$  et  $B_{\pi-r}(p(\xi^\pi(u)))$  ne se rencontrent pas. D'où le lemme 1.

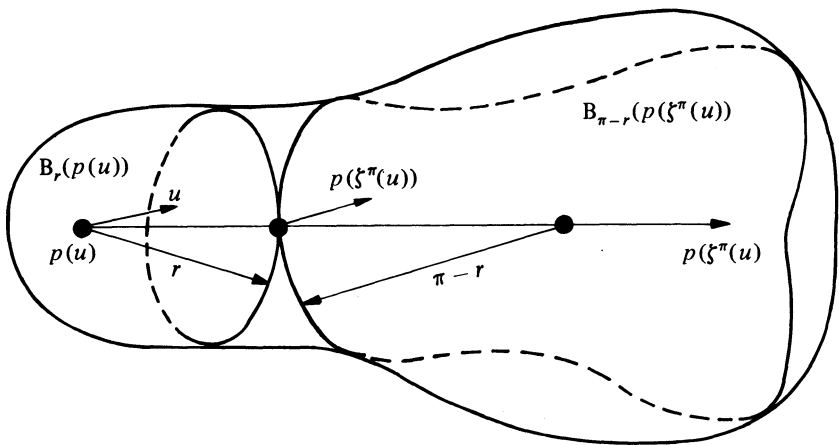


Fig. 1.

LEMME 2. — Pour tout  $r$  dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  on a  $V^2 \geq I(r)$ , où

$$I(r) = \int_M \text{Vol}(B_r(x)) dx + \int_M \text{Vol}(B_{\pi-r}(x)) dx.$$

Il suffit d'intégrer l'inégalité du lemme 1 pour  $u$  parcourant tout UM :

$$\text{Vol}(\text{UM}) \times V \geq \int_{\text{UM}} \text{Vol}(B_r(p(u))) d\mu + \int_{\text{UM}} \text{Vol}(B_{\pi-r}(p(\xi^\pi(u)))) d\mu.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_{\text{UM}} \text{Vol}(B_r(p(u))) d\mu &= \int_M \left( \int_{\text{UM}_x} d\sigma_x \right) \text{Vol}(B_r(x)) dx \\ &= \alpha(n-1) \int_M \text{Vol}(B_r(x)) dx. \end{aligned}$$

Puis, en utilisant le théorème de Liouville (cf. [4], 1.125) pour  $u \mapsto \xi^\pi(u)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\text{UM}} \text{Vol}(B_{\pi-r}(p(\xi^\pi(u)))) d\mu &= \int_{\text{UM}} \text{Vol}(B_{\pi-r}(p(u))) d\mu \\ &= \alpha(n-1) \int_M \text{Vol}(B_{\pi-r}(x)) dx. \end{aligned}$$

D'où le lemme 2 en divisant tout par  $\alpha(n-1)$ .

*Démonstration du théorème.* — Pour tout  $u$  dans UM remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{r=\pi/2} \int_{t=0}^{t=r} f(u, t) dt dr + \int_{r=0}^{r=\pi/2} \int_{t=0}^{t=\pi-r} f(u, t) dt dr \\ = \int_{t=0}^{t=\pi/2} [(\pi-t)f(u, t) + tf(u, \pi-t)] dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Rappelons aussi que (cf. [3], formule (3)) :

$$\begin{aligned} \int_M \text{Vol}(B_r(x)) dx &= \int_0^r \int_{\text{UM}} f(u, t) du dt, \\ \int_M \text{Vol}(B_{\pi-r}(x)) dx &= \int_0^{\pi-r} \int_{\text{UM}} f(u, t) du dt. \end{aligned}$$

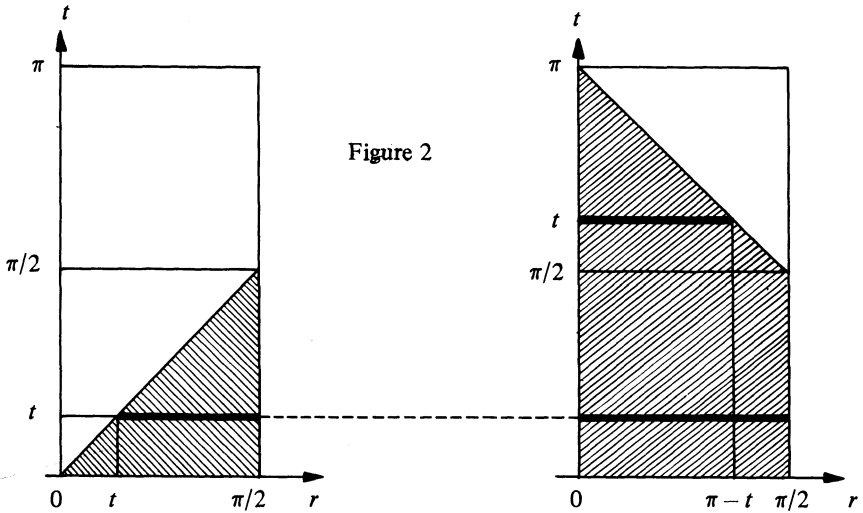


Figure 2

Fig. 2.

Intégrons maintenant l'inégalité du lemme 2 en  $r$ , pour  $r$  parcourant  $[0, \pi/2]$  muni de la mesure de Lebesgue  $dr$ . En utilisant la formule (1) ci-dessus on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} V^2 &= \left[ \int_0^{\pi/2} dr \right] V^2 \geq \int_0^{\pi/2} I(r) dr \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{\text{UM}} [(\pi - t) f(u, t) + t f(u, \pi - t)] du dt. \end{aligned}$$

Pour  $t$  fixé, appliquons le théorème de Liouville aux  $\zeta^r$  où  $r$  parcourt  $[0, \pi - t]$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\pi - t) \int_{\text{UM}} f(u, t) du &= \int_0^{\pi-t} \int_{\text{UM}} f(u, t) dr du \\ &= \int_{\text{UM}} \int_0^{\pi-t} f(\zeta^r(u), t) dr du. \end{aligned}$$

Et de même :

$$t \int_{\text{UM}} f(u, \pi - t) du = \int_{\text{UM}} \int_0^t f(\zeta^r(u), \pi - t) dr du.$$

D'où finalement l'inégalité :

$$\frac{\pi}{2} V^2 \geq \int_{t=0}^{t=\pi/2} \int_{UM} \left[ \int_0^{\pi-t} f(\xi^r(u), t) dr + \int_0^t f(\xi^r(u), \pi - t) dr \right] du dt.$$

Mais,  $u$  étant maintenant fixé, avec la notation  $A(t, r)$  figurant dans la formule (8) de [3], on a :

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^{\pi-t} f(\xi^r(u), t) dr + \int_0^t f(\xi^r(u), \pi - t) dr \\ &= \int_0^{\pi-t} \det A(t+r, r) dr + \int_0^t \det A(\pi-t+r, r) dr. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant la «Main Inequality» de [3], p. 370 avec la fonction  $m$  égale à la somme  $m = \delta_t + \delta_{\pi-t}$  de la distribution de Dirac en  $t$  et de la distribution de Dirac en  $\pi - t$  (c'est valide car la «Main Inequality» est valable pour toute fonction continue positive), avec le poids  $g(r) = \sin r$ . Comme, pour cette  $m$ , on a :

$$\int_0^\pi \int_r^\pi \det A(s, r) (\delta_t + \delta_{\pi-t}) (s-r) ds dr = J(t),$$

c'est que  $J(t) \geq J_0(t)$  (pour tout  $t$  dans  $[0, \pi/2]$  et tout  $u$  dans  $UM$ ), où  $J_0$  est la valeur de  $J$  lorsque  $A(t, r) = \sin(t-r) I$ .

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} V^2 &\geq \int_0^{\pi/2} \int_{UM} J(t) du dt \geq \int_0^{\pi/2} \int_{UM} J_0(t) du dt \\ &= \text{Vol}(UM) \int_0^{\pi/2} J_0(t) dt = \alpha(n-1) V \int_0^{\pi/2} J_0(t) dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$V \geq \frac{2}{\pi} \alpha(n-1) \int_0^{\pi/2} J_0(t) dt.$$

Mais si  $(M, g) = (S^n, \text{can})$ , on a l'égalité partout dans les inégalités précédentes ; donc en particulier

$$\alpha(n) = \frac{2}{\pi} \alpha(n-1) \int_0^{\pi/2} J_0(t) dt,$$

et donc

$$V \geq \alpha(n).$$

Réciproquement, si  $V = \alpha(n)$ , on doit avoir l'égalité partout dans les inégalités précédentes, en particulier pour tout  $u$  dans la «Main Inequality» de [3] ; en particulier dans l'inégalité de Jensen utilisée dans la démonstration du lemme 3 de [3] (cf ; aussi [4], E.6., p. 244). Comme la mesure  $\mu$  utilisée là-bas est continue sur le support connexe de  $\delta_t$  (et ceci pour tout  $t$  puis pour tout  $u$  dans UM) c'est donc que  $(M, g)$  est à courbure sectionnelle constante et égale à 1 d'après la démonstration du lemme 1 de [3] (cf. aussi [4], p. 242). Or la sphère elle-même est la seule variété de courbure sectionnelle constante égale à 1 et de rayon d'injectivité égal au moins à  $\pi$ , car pour tout quotient fini de cette sphère le rayon d'injectivité est strictement plus petit que  $\pi$ .

*Remarque.* — Si l'on applique la technique précédente et la «Main Inequality» pour le seul cas  $t = \pi/2$ , c'est-à-dire avec  $m = \delta_{\pi/2}$ , on obtient aisément le :

**COROLLAIRE.** — *Pour toute variété riemannienne compacte  $(M, g)$  de dimension  $n$  et de rayon d'injectivité supérieur ou égal à  $i$ , la valeur moyenne*

$$V^{-1} \int_M \text{Vol}(S_{i/2}(x)) dx$$

*des volumes des sphères géodésiques de rayon  $i/2$  est supérieure ou égale à  $\frac{\alpha(n-1) i^{n-1}}{\pi^{n-1}}$ . En outre il n'y a égalité que pour la sphère de courbure constante  $\pi^2 i^{-2}$ .*

On peut se demander si, en fait, l'hypothèse sur  $(M, g)$  entraîne  $\text{Vol}(S_{i/2}(x)) \geq \frac{\alpha(n-1) i^{n-1}}{\pi^{n-1}}$  pour tout point  $x$  de  $M$ . La question est inconnue à notre connaissance. Pour  $n = 2$ , la réponse est affirmative, d'après le début de la démonstration du lemme 2.2 de [1]. Pour le cas  $n = 3$ , voir [2], p. 192 et pour tout  $n$  voir

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BERGER, Some relations between volume, injectivity radius and convexity radius in Riemannian manifolds, dans *Differential Geometry and Relativity*, D. Reidel, 1976.
- [2] M. BERGER, Volume et rayon d'injectivité dans les variétés riemanniennes de dimension 3, *Osaka Math. J.*, 14 (1977), 191-200.
- [3] M. BERGER et J.L. KAZDAN, A Sturm-Liouville Inequality with Applications to an Isoperimetric Inequality for Volume, Injectivity Radius and to Wiederschen Manifolds, p. 367-377, *General Inequalities 2*, Edited by E.F. Beckenback, Birkhäuser, 1980.
- [4] A. BESSE, Manifolds all of whose Geodesics are Closed, *Ergebnisse der Mathematik*, n° 93, Springer, 1978.
- [5] C. CROKE, Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates, à paraître dans *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*
- [6] J.L. KAZDAN, An Inequality Arising in Geometry, Appendice E de [4].

Manuscrit reçu le 19 février 1980.

Marcel BERGER,  
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212  
U.E.R. de Mathématiques  
Université Paris VII  
2, place Jussieu  
75221 Paris cedex 05.