ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAKLOUF DERRIDJ

Estimations pour $\bar{\partial}$ dans des domaines non pseudo-convexes

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 4 (1978), p. 239-254

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_4_239_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 4 (1978), 239-254.

ESTIMATIONS POUR $\bar{\partial}$ DANS DES DOMAINES NON PSEUDO-CONVEXES

par Maklouf DERRIDJ

1. Introduction.

Le problème de l'estimation sous-elliptique pour $\bar{\partial}$ dans des domaines pseudo-convexes a été l'objet, ces dernières années, d'une étude systématique et d'importants résultats ont été obtenus par J. J. Kohn, en particulier dans le cas de domaines à frontière analytique réelle ([8], [9]). Une interprétation géométrique des hypothèses de J. J. Kohn est donnée dans ([1], [4]).

Hormis les cas d'une estimation sous-elliptique avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ étudié par L. Hörmander [6], le cas de domaines non pseudo-convexes reste à étudier. Pour obtenir une estimation sous-elliptique l'estimation suivante intervient fortement

$$* \quad \sum_{i,k} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial \bar{z}_k} \right\| \leqslant C(\|\bar{\partial} u\| + \|\bar{\partial}^* u\| + \|u\|) \ \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(\mathrm{V} \cap \overline{\Omega})$$

(voir les notations et définitions dans la suite). Cette estimation qui est satisfaite dans tout domaine pseudo-convexe, ne l'est pas toujours dans un domaine non pseudo-convexe. Aussi avons-nous cherché à trouver une condition nécessaire et des conditions suffisantes pour obtenir cette estimation. Dans la recherche de conditions suffisantes nous avons évidemment été guidé par la première condition nécessaire. Ces conditions suffisantes paraîtront sensiblement plus fortes que cette condition nécessaire; mais elles permettent d'avoir une estimation plus forte que l'estimation $*$, estimation qui permet d'avoir une estimation sous-elliptique, moyennant une hypothèse supplémentaire naturelle.

Cependant une de nos conditions suffisantes, à savoir la condition (7.1) nous paraît être la bonne condition liée à l'estimation $*$. En effet, nous montrons que cette condition (7.1) est nécessaire pour avoir l'estimation $*$. En particulier on obtient une classe de domaines (théorème 7.1.) pour laquelle la condition (7.1.) est nécessaire et suffisante pour l'estimation $*$.

Nous remercions le Professeur J. J. Kohn pour ses remarques et commentaires.

2. Notations et définitions.

Donnons quelques notations et définitions; pour plus ample information nous renvoyons à [5].

Soit un ouvert de $\mathbf{C}^n$, défini par une fonction r de classe C^∞, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Omega = \{r < 0\} \ r \in C^\infty(\mathbf{C}^n) \\ dr = 1 \text{ sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

Notre travail étant purement local, on sélectionne un point $z_0 \in \partial\Omega$ et l'on peut toujours supposer $\frac{\partial r}{\partial z_n}(z_0) \neq 0$.

Soit $(L_1, \ldots, L_{n-1}, L_n)$ un système de champs de vecteurs holomorphes tel que :

i) Les champs L_i sont indépendants.

ii) Les champs $L_1, \ldots, L_{n-1}$ sont tangents à $\partial\Omega$ et L_n est transverse. On peut prendre, par exemple, les champs définis par :

$$L_i = \frac{\partial r}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_n} - \frac{\partial r}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_i}\ i = 1, \ldots, n-1 .$$

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_j} ;$$

ce système est le système standard.

Alors le système $(L_1, \ldots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_{n-1}, L_n - \bar{L}_n)$ est une base du complexifié de l'espace tangent à $\partial\Omega$. Par suite on peut écrire :

$[L_i, \bar{L}_j] = c_{ij}(L_n - \bar{L}_n)$ modulo $(L_1, \ldots, L_{n-1}, \bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_{n-1})$
pour $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

La matrice (c_{ij}) est la matrice de la forme de Levi dans la base $(L_1, \ldots, L_{n-1})$. Soit, maintenant $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ le système de $(1, 0)$ formes, dual du système $(L_1, \ldots L_n)$. Alors toute $(0, 1)$ forme u s'exprime par :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i, \quad u_i \text{ étant des fonctions.}$$

On considérera des fonctions de classes C^∞. Dans la base $(\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n)$ les expressions de $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}^*$ sont données par :

$$\bar{\partial} u = \sum_{i=1}^{n} (\bar{L}_i u)\bar{\omega}_i \qquad u \in C^\infty$$

$$(2.1) \quad \bar{\partial} u = \sum_{j<i} (\bar{L}_j u_i - \bar{L}_i u_j)\bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_i + R, \text{ si } u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i$$

où R est un reste ne contenant pas de dérivées des u_i. Si V est un voisinage de z_0, définissons $\mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega})$, comme l'ensemble des $(0, 1)$ formes $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i$, avec $u_i \in C_0^\infty(V \cap \bar{\Omega})$ et $u_n = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors on a, au sens L^2

$$(\bar{\partial}^* u, \varphi) = (u, \bar{\partial}\varphi) \ \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}), \ \forall \varphi \in C^\infty(V \cap \bar{\Omega}).$$

Alors

$$(2.2) \qquad \bar{\partial}^* u = -\sum_{i=1}^{n} L_i u_i + R \quad \text{si} \quad u = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{\omega}_i$$

où R est un reste ne contenant pas de dérivées des u_i.

Notons aussi $Q(u, \varphi) = (\bar{\partial} u, \bar{\partial}\varphi) + (\bar{\partial}^* u, \bar{\partial}^*\varphi) + (u, \varphi)$ pour

$$u, \varphi \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}).$$

3. Calcul de $Q(u, \varphi)$, pour $u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega})$.

Ce calcul se trouve dans [2], [3]. Nous le reproduisons succinctement pour rendre le texte « self-contained ». D'après l'expression (2.1) on a

$$\|\bar{\partial} u\|^2 = \Big\| \sum_{j<i} \bar{L}_j u_i - \bar{L}_i u_j \Big\|^2 + 0(\|u\|^2 + \|u\| \|\bar{L} u\|).$$

D'autre part :

$$\Big\|\sum_{j<i} \bar{L}_j u_i - \bar{L}_i u_j\Big\|^2 = \sum_{i\neq j} \|\bar{L}_i u_j\|^2 - \sum_{i\neq j} (\bar{L}_j u_i , \bar{L}_i u_j) .$$

Par intégration par partie, on obtient, en notant

$$\|\bar{L}u\|^2 = \sum_{i,j} \|\bar{L}_i u_j\|^2$$

$$\begin{aligned}
-\,(\bar{L}_j u_i , \bar{L}_i u_j) &= (L_i \bar{L}_j u_i , u_j) + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) \\
&= ([L_i , \bar{L}_j] u_i , u_j) + (\bar{L}_j L_i u_i , u_j) + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) \\
&= \int_{\partial\Omega} c_{i,j} u_i \bar{u}_j - (L_i u_i , L_j u_j) + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|Lu\|)
\end{aligned}$$

en posant $c_{ij} = 0$ si i ou j vaut n.

D'autre part, d'après l'expression (2.2), on tire

$$\begin{aligned}
\|\bar{\delta}^* u\|^2 &= \Big(\sum_{i=1}^{n} L_i u_i , \sum_{j=1}^{n} L_j u_j\Big) + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) \\
&= \sum_i \|L_i u_i\|^2 + \sum_{i\neq j} (L_i u_i , L_j u_j) + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) \\
&= \sum_i \|\bar{L}_i u_i\|^2 + \sum_i \int_{\partial\Omega} c_{ii} |u_i|^2 \\
&\qquad + \sum_{i\neq j} (L_i u_i , L_j u_j) + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) .
\end{aligned}$$

En regroupant les expressions de $\|\bar{\delta} u\|^2$ et $\|\bar{\delta}^* u\|^2$, on obtient

$$\text{(3.1)} \quad \|\bar{\delta} u\|^2 + \|\bar{\delta}^* u\|^2 = \|\bar{L}u\|^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} c_{ij} u_i \bar{u}_j + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) .$$

Corollaire. — *Si* Ω *est pseudo-convexe au voisinage de* z_0, *l'estimation* $*$ *est satisfaite.*

Cela découle de (3.1) et de $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} c_{ij} u_i \bar{u}_j \geqslant 0$.

4. Une première condition nécessaire pour l'estimation * .

Nous notons $\lambda_1 , \dots , \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de la forme de Levi dans V, que nous choisissons continues dans V.

THÉORÈME 4.1. — *Supposons l'estimation* $*$ *satisfaite au voisinage de* $z_0 \in \partial\Omega$. *Cela implique l'assertion suivante :*

a) *Soit* $\lambda_1(z_0) \geqslant 0 , \ldots , \lambda_{n-1}(z_0) \geqslant 0$.

b) *Soit il existe au moins deux valeurs propres, notées* λ_1 , λ_2 , *telles que* $\lambda_1(z_0) < 0 , \lambda_2(z_0) < 0$.

Démonstration. — Supposons donc qu'il existe $\sigma > 0$ tel que, $\sigma \leqslant 1$

$$\sigma\|\bar{L}u\|^2 \leqslant Q(u, u) \qquad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}) .$$

D'après (3.1), il découle :

$$\sigma\|\bar{L}u\|^2 \leqslant \|\bar{L}u\|^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} c_{ij}u_i\bar{u}_j + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) .$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$(4.1) \qquad - \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} c_{ij}u_i\bar{u}_j \leqslant (1 - \sigma + \varepsilon)\|\bar{L}u\|^2 + C_\varepsilon\|u\|^2 .$$

Si l'on choisit $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$, (4.1) devient, avec $C_0 = C_{\sigma/2}$:

$$(4.2) \qquad - \sum_{i,j=1}^{n-1} \int_{\partial\Omega} c_{ij}u_i\bar{u}_j \leqslant \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \|\bar{L}u\|^2 + C_0\|u\|^2 , \qquad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}) .$$

Si l'on suppose que *a*) n'a pas lieu, alors il existe une valeur propre, notée λ_1 telle que $\lambda_1(z_0) < 0$. Choisissons la forme u par $u = u_1\bar{\omega}_1$, $u_1 \in \mathscr{D}(V \cap \bar{\Omega})$. Alors (4.2) devient :

$$(4.3) \qquad - \int_{\partial\Omega} c_{11}|u_1|^2 \leqslant \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \|\bar{L}u_1\|^2 + C_0\|u_1\|^2; \qquad \forall u_1 \in \mathscr{D}\,(V \cap \bar{\Omega}) .$$

Maintenant, on peut supposer que $c_{11} = \lambda_1(z_0) + o(1)$ (en diagonalisant *au point* z_0 la matrice de Levi).

Par suite (4.3) devient :

$$(4.4) \qquad - \lambda_1(z_0) \int_{\partial\Omega} |u_1|^2 + o\left(\int_{\partial\Omega} |u_1|^2\right) \leqslant \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \|\bar{L}u_1\|^2 + C\|u_1\|^2 .$$

Comme $\lambda_1(z_0) < 0$, on a l'assertion suivante :

Lemme. — *Il existe une constante* $\sigma_0 > 0$ *et un petit voisinage* V *de* z_0 *tels que*

$$- \lambda_1(z_0) \geqslant \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\sigma_0 - \lambda_1(z_0)\right)$$

$$o\left(\int_{\partial\Omega} |u_1|^2 \leqslant \left(\frac{\sigma_0}{2} \int_{\partial\Omega} |u_1|^2 \qquad \forall u_1 \in \mathcal{D}(\mathrm{V} \cap \overline{\Omega}) .\right.\right.$$

Démontration du lemme. — Elle est élémentaire; cela revient à montrer qu'il existe σ_0 , assez petit tel que

$$- \lambda_1(z_0)\left[1 - \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)\right] \geqslant \frac{3}{2}\sigma_0\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)$$

ou encore

$$- \lambda_1(z_0) \geqslant \frac{3}{2}\sigma_0 \frac{2 - \sigma}{\sigma},$$

ce qui est possible car $- \lambda_1(z_0) > 0$. σ_0 étant ainsi choisi, il suffit de choisir V assez petit pour obtenir la deuxième inégalité du lemme.

Par suite (4.5) entraîne

$$\text{(4.6)} \quad \sigma_0 \int_{\partial\Omega} |u_1|^2 \leqslant \|\overline{\mathrm{L}}u_1\|^2 + \int_{\partial\Omega} \lambda_1(z_0)|u_1|^2 + \mathrm{C}\|u_1\|^2; \qquad \forall u_1 \in \mathcal{D}(\mathrm{V} \cap \overline{\Omega}) .$$

Cette inégalité entraîne d'après [6] (voir aussi [5]) que

$$\sigma_0 - \lambda_1(z_0) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \overline{\lambda}_j(z_0) \qquad \text{ou} \qquad \overline{\lambda}_j = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda_j \geqslant 0 \\ - \lambda_j \text{ si } \lambda_j < 0 . \end{cases}$$

On voit alors aisément qu'il doit exister une deuxième valeur propre, notée λ_2 telle que $\lambda_2(z_0) < 0$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarques.

1) Nous savons, d'après la caractérisation de L. Hörmander de l'estimation sous-elliptique $\frac{1}{2}$, que le cas *b*) donne justement non seulement l'estimation $*$, mais aussi l'estimation

$\frac{1}{2}$. Donc dans la recherche de conditions suffisantes pour avoir *, qui soient nouvelles, on doit avoir

$$\lambda_i(z_0) \geqslant 0 \; i = 1, \ldots, n-1 .$$

2) D'autre part, si l'on veut de plus écarter le cas des domaines pseudo-convexes au voisinage de z_0, on doit avoir une condition sur certaines valeurs propres. Pour préciser, nous allons diviser en deux parties l'ensemble des valeurs propres.

1) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres qui ne sont $\geqslant 0$ dans aucun voisinage de z_0.

2) Soient $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$ celles qui sont $\geqslant 0$ dans un voisinage de z_0, V. *Alors nécessairement* $k \geqslant 2$: en effet, si l'on suppose $k = 1$, alors il existerait un point $z_1 \in V$ tel que

$$\begin{aligned} &\lambda_1(z_1) < 0 \\ &\lambda_2(z_1) \geqslant 0, \ldots, \lambda_{n-1}(z_1) \geqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit l'estimation * dans V.

3) Soit Ω non pseudo-convexe au voisinage de z_0, ne vérifiant pas la condition *b*) du théorème. Alors

$$\lambda_1(z_0) = 0, \ldots, \lambda_k(z_0) = 0 .$$

En effet dans le cas contraire il existerait une seule valeur propre λ_i telle que $\lambda_i(z_0) < 0$, ce qui contredirait l'estimation *.

Par suite les cas intéressants à étudier sont ceux qui sont tels que $\lambda_1(z_0) = \ldots = \lambda_k(z_0) = 0$.

On peut résumer par la :

PROPOSITION 4.2. — *Soit* Ω *non pseudo-convexe au voisinage de* z_0, *vérifiant l'estimation* *, *mais non la condition b) du théorème* 4.1. *Alors les valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *s'annulent toutes en* z_0, *et* $k \geqslant 2$.

COROLLAIRE. — *Les seuls domaines de* $\mathbf{C}^2$ *qui vérifient l'estimation* * *sont les domaines pseudo-convexes.*

5. Étude du cas de $\mathbf{C}^3$.

Nous étudions d'abord ce cas, car il y a deux valeurs propres et on a vu que $k \geqslant 2$, donc ici $k = 2$.

Pour introduire notre condition suffisante, remarquons qu'il est naturel de supposer plus, à savoir la manière dont λ_1 et λ_2 vont s'annuler en z_0 ; car l'estimation * fait intervenir tout un voisinage de z_0.

Notons $T = \lambda_1 + \lambda_2 =$ trace de la forme de Levi.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *de classe* $\mathbf{C}^\infty$. *Supposons qu'il existe un voisinage* V *de* z_0 *et une fonction réelle* σ *de classe* C^1 *sur* V, *à valeurs dans* $]0, 1[$ *telle que*

$$\lambda_i \geqslant \sigma^2 T \qquad \text{dans V} \qquad i = 1, 2 .$$

Alors on a l'estimation suivante (plus forte que (*))

$$(5.1) \qquad \|\bar{L}u\|^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1,2}}^{3} \|L_j u_i\|^2 \leqslant CQ(u, u) \qquad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V_0 \cap \bar{\Omega})$$

où V_0 *est tel que* $\bar{V}_0 \subset V_1$.

Démonstration. — Partons de (3.1), que nous réécrivons

$$Q(u, u) = \|\bar{L}u\|^2 + \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial\Omega} c_{ij} u_i \bar{u}_j + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) \quad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \bar{\Omega}) .$$

Mais

$$\|\bar{L}_i u_j\|^2 \geqslant \|\sigma \bar{L}_i u_j\|^2 + \|(1 - \sigma)\bar{L}_i u_j\|^2 .$$

D'autre part comme $\bar{V}_0 \subset V$, il existe deux constantes positives a et b telles que

$$\sigma \geqslant a , \qquad 1 - \sigma \geqslant b \quad \text{sur} \quad V_0 .$$

Donc

$$\|\bar{L}_i u_j\|^2 \geqslant b\|\bar{L}_i u_j\|^2 + \|(\sigma)\bar{L}_i u_j\|^2 .$$

Mais on a, par intégration par parties

$$\begin{aligned} \|\sigma \bar{L}_i u_j\|^2 &= \|\bar{L}_i(\sigma u_j)\|^2 + 0(\|u\|^2) \\ &= \|L_i(\sigma u_j)\|^2 - \int_{\partial\Omega} c_{ii} |\sigma u_j|^2 + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|) . \end{aligned}$$

On applique cela avec $i, j = 1, 2$, et compte tenu de (3.1) on a :

$$Q(u, u) \geqslant b\|\bar{L}u\|^2 + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} u_i \bar{u}_j - \int_{\partial\Omega} \sigma^2 T(|u_1|^2 + |u_2|^2)$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \|L_i(\sigma u_j)\|^2 + 0(\|u\|^2 + \|u\|\,\|\bar{L}u\|)$$

l'hypothèse que $\lambda_i \geqslant \sigma^2 T$ entraîne que l'on a

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} u_i \bar{u}_j - \sigma^2 T(|u_1|^2 + |u_2|^2) \right\} \geqslant 0 .$$

D'autre part

$$\|L_i(\sigma u_j)\|^2 \geqslant \|\sigma L_i(u_j)\|^2 + 0(\|u\|^2) \geqslant a\|L_i u_j\|^2 + 0(\|u\|^2) .$$

De cela, l'inégalité (5.1) découle aisément.

Proposition 5.2. — *Supposons que les valeurs* λ_1 *et* λ_2 *sont* $\leqslant 0$ *dans* V *et qu'il existe deux constantes positives* A *et* B *telles que*

$$A\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant B\lambda_1 \quad \textit{dans} \quad V$$

alors on peut trouver une constante $\sigma \in]0, 1[$ *telle que*

$$\lambda_i \geqslant \sigma T \quad \textit{dans} \quad V .$$

Donc Ω *satisfait à l'estimation* (5.1) *au voisinage de* z_0 .

Démonstration. — On cherche σ tel que

$$\lambda_1 \geqslant \sigma(\lambda_1 + \lambda_2) \Longleftrightarrow \lambda_1 \geqslant \frac{\sigma}{1-\sigma} \lambda_2$$

$$\lambda_2 \geqslant \sigma(\lambda_1 + \lambda_2) \Longleftrightarrow \lambda_2 \geqslant \frac{\sigma}{1-\sigma} \lambda_1$$

il suffit que : $\dfrac{\sigma}{1-\sigma} \geqslant \dfrac{1}{B}$ et $\dfrac{\sigma}{1-\sigma} \geqslant A$. Un tel σ existe dans $]0, 1[$.

Remarques.

1) Si l'on veut que σ soit une constante dans $]0, 1[$, on doit avoir : soit $\lambda_1 \equiv \lambda_2$ dans V , soit λ_1 et λ_2 gardent le même signe dans V; En effet, comme

$$\frac{1-\sigma}{\sigma} \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \frac{\sigma}{1-\sigma} \lambda_1 ,$$

si on suppose que λ_1 prend en un point une valeur positive et en un autre point une valeur négative, on devrait avoir $\frac{1-\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma}{1-\sigma}$, c'est-à-dire $\sigma = \frac{1}{2}$, ou encore que $\lambda_1 \equiv \lambda_2$ dans V.

2) L'estimation (5.1) est dite « maximale »; elle permet d'étudier des questions de régularité analytique globale et Gevrey (voir [2], [3]). Elle permet aussi d'avoir le :

COROLLAIRE 5.3. — *Soit* Ω *satisfaisant les hypothèses du théorème* 5.1. *Supposons de plus qu'il existe un crochet* L, *formé à partir de* $(L_1, L_2, \overline{L}_1, \overline{L}_2)$ *tel que* $\langle L, \partial r\rangle(z_0) \neq 0$. *Alors* Ω *satisfait à une estimation sous-elliptique en* z_0.

Démonstration. — Cela vient de l'inégalité (5.1) et des travaux de L. Hörmander [7] et J. J. Kohn [10] sur l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_\varepsilon^2 \leqslant CQ(u, u) \quad \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V \cap \overline{\Omega})$.

COROLLAIRE 5.4. — *Soit* Ω *borné, à frontière analytique réelle, satisfaisant aux hypothèses du théorème* 5.1. *Alors* Ω *satisfait en* z_0 *à une estimation sous-elliptique.*

Démonstration. — D'après le corollaire 5.3, il s'agit de montrer qu'il existe $L \in \text{Lie}\ (L_1, L_2, \overline{L}_1, \overline{L}_2)$ tel que L a une composante sur $T = L_3 - \overline{L}_3$ non nulle. Sinon, d'après le théorème de Nagano, il existerait une variété analytique réelle $S \subset \partial\Omega$ telle que les champs $L_1, L_2, \overline{L}_1, \overline{L}_2$ soient tangents à S (S de dimension 4). Alors S serait une variété analytique complexe, ce qui est absurde car Ω est borné, à frontière analytique réelle.

6. Cas général $n \geqslant 4$.

THÉORÈME 6.1. — *Supposons que la matrice de Levi peut prendre la forme* $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, *dans un voisinage* V *de* z_0, *où* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *sont les valeurs propres de* A *et* $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$ *celles de* B. *Supposons qu'il existe une fonction* $\sigma \in C^1(V)$, *à valeurs dans* $]0\,,1[$ *telle que :*

$$\lambda_i \geqslant \sigma^2 T' = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) \quad \textit{dans } V\,; \quad i = 1\,, \ldots, k\,.$$
$$\lambda_j \geqslant \sigma^2 T' \quad \textit{dans } V\,; \quad j = k+1\,, \ldots, n-1\,.$$

Alors Ω *satisfait au voisinage de* z_0 *à l'estimation suivante :*

$$(6.1) \qquad \|\bar{L}u\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i=1,\ldots,n}}^{k} \|L_j u_i\|^2 \leqslant CQ(u, u)\ \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V_0 \cap \bar{\Omega})\,; \quad \overline{V_0} \subset V\,.$$

Démonstration. — La démonstration est analogue au cas de $\mathbf{C}^3$, aux différences suivantes : si l'on note $u' = (u_1, \ldots, u_k)$, $u'' = (u_{k+1}, \ldots, u_n)$ il viendra dans la manipulation de l'expression (3.1)

$$\sum_{i,j=1}^{k} \int c_{ij} u_i \bar{u}_j - \sigma^2 T' |u'|^2 + \sum_{i,j=k+1}^{n-1} \int c_{ij} u_i \bar{u}_j - \sigma^2 T' |u''|^2$$

et cette quantité sera positive, d'après les hypothèses faites. Le reste est analogue au cas de $\mathbf{C}^3$.

Proposition 6.2. — *Supposons que la matrice de Levi peut prendre la forme* $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ (*) *où* $\lambda_1\,, \ldots, \lambda_k$ *sont les valeurs propres de* A *et* $\lambda_{k+1}\,, \ldots, \lambda_{n-1}$ *celles de* B. *Supposons de plus que :*

1) $\lambda_1 \leqslant 0\,, \ldots, \lambda_k \leqslant 0$ *dans* V ;
2) $\exists A > 0\,, B > 0$ *telles que*

$$A\lambda_i \leqslant \lambda_j \leqslant B\lambda_i \qquad \forall (i, j) \in \{1, \ldots, k\}\,.$$

Alors on a l'estimation (6.1).

Démontration. — Ici comme $T' \leqslant 0$ dans V et que $\lambda_j \geqslant 0$, $j = k+1\,, \ldots n$, l'hypothèse $\lambda_j \geqslant \sigma^2 T'$ est triviale. Donc il suffit de montrer qu'il existe $\sigma \in]0, 1[$ (constante) telle que

$$\lambda_i \geqslant \sigma^2 T' \qquad i = 1\,, \ldots k\,.$$

Ceci se fait comme dans la proposition 5.2.

(*) Cela veut dire qu'il existe une base $L_1, \ldots, L_{n-1}$ telle que la matrice de Levi (c_{ij}) dans cette base est telle que $c_{ij} = 0$ si $j \geqslant k+1$ *et* $i \leqslant k$.

Corollaire 6.3. — *Supposons que* Ω *satisfait les hypothèses du théorème* 6.1 *et qu'il existe un crochet* L *formé à partir des champs* $L_1, \ldots, L_k$, $\bar{L}_1, \ldots, \bar{L}_k$ *tel que* $\langle L, \partial r\rangle(z_0) \neq 0$. *Alors* Ω *satisfait en* z_0 *à une estimation sous-elliptique.*

Démonstration. — Elle est la même que celle du corollaire 5.3.

Corollaire 6.4. — *Supposons que* Ω *satisfait aux hypothèses du théorème* 6.1. *avec* $k = n - 1$ *et que* Ω *soit borné à frontière analytique réelle. Alors* Ω *satisfait en* z_0 *à une estimation sous-elliptique.*

Démonstration. — Elle est la même que celle du corollaire 5.4. Revenons maintenant sur l'hypothèse que la matrice de Levi peut se mettre sous la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de A et $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$ celles de B. On peut donner une condition suffisante, à savoir :

Proposition 6.5. — *Supposons que les valeurs propres* $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$ *sont strictement positives en* z_0 *et* $\lambda_1, \ldots \lambda_k \leqslant 0$ *dans* V. *Alors la matrice de Levi peut prendre la forme* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *où* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *sont les valeurs propres de* A *et* $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$ *celles de* B.

Démonstration. — On part de la base $(L_1, \ldots L_{n-1})$. D'autre part, on peut supposer, en diagonalisant au point z_0, que $c_{ij}(z_0) = \delta_{ij}a_{ij}$. Cherchons alors une nouvelle base $(L'_1, \ldots, L'_{n-1})$ dans laquelle la matrice de Levi aura la forme voulue, en posant

$$L'_i = L_i \qquad i \geqslant k+1$$
$$L'_i = L_i + \sum_{l=k+1}^{n-1} \alpha_{il} L_l \qquad i \leqslant k.$$

On a $c'_{ij} = c_{ij} + \sum_{l=k+1}^{n-1} \alpha_{jl} c_{il}$, si $i \geqslant k+1$, $j \leqslant k$. On veut que $c'_{ij} \equiv 0$ pour $i \geqslant k+1$, $j \leqslant k$.

On obtient ainsi un système $k(n-1-k)$ équations à $k(n-1-k)$ inconnues qu'on peut résoudre de façon unique car le déterminant est non nul au voisinage de z_0, car

$c_{ij}(z_0) = \delta_{ij} a_{ij}$. D'autre part on a que $c'_{ij}(z_0) = c_{ij}(z_0)$, et $a_{ij} \neq 0$ si $i > k$.

Donc les valeurs propres positives sont celles de la matrice B et les autres celles de A.

Nous pouvons donner un exemple d'ouvert Ω tel que la matrice de Levi vérifie les hypothèses du théorème 6.1, sans que $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}$ soient strictement positives.

Soit $\Omega = \{r < 0\}$ avec $r = \sum_{k+1}^{n} |z_i|^{2l_i} - |z'|^{2l} - 1$, $l_i, l \in \mathbf{N}^*$ $z' = (z_1, \ldots, z_k)$ $k \geqslant 2$. Prenons $z_0 = (0, \ldots, 0, z_n = 1)$.

Si l'on prend la base standard de champs holomorphes, à savoir

$$L_i = \frac{\partial r}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_n} - \frac{\partial r}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_i} \qquad i = 1, \ldots, n-1$$

$$L_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial \bar z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}$$

il est aisé de voir que la matrice de Levi a la forme $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ où B contient les valeurs propres $\geqslant 0$. Vérifions que les valeurs propres λ_1, λ_2 (en prenant $k = 2$) de A vérifient l'hypothèse du théorème 6.1. Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned}
c_{11} &= l|z'|^{2(l-2)}\{l|z_1|^2|z'|^2 - (|z'|^2 + (l-1)|z_1|^2)\}\\
c_{22} &= l|z'|^{2(l-2)}\{l|z_2|^2|z'|^2 - (|z'|^2 + (l-1)\, z_2|^2)\}\\
c_{12} &= l|z'|^{2(l-2)}\bar z_1 z_2\{l|z'|^2 - (l-1)\}.
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que $T' = |z'|^2\{l|z'|^2 - (l+1)\} \leqslant 0$ et qu'il existe $\sigma \in]0, 1[$ tel que $(Au, u) \geqslant \sigma T'|u|^2$.

Exemple où on a en plus une estimation sous-elliptique :

$$\Omega = \left\{(|z_n|^2 + |z'|^6 - 1)\left(|z_n|^2 + |z'|^4 - \frac{1}{2}\right) < 0\right\}; \qquad z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}),\ n \geqslant 3.$$

C'est une couronne aplatie. Alors, d'après le corollaire (6.4), on a une estimation sous-elliptique, en un point tel que $z' = 0$.

7. Cas où la condition $\lambda_i \geqslant \sigma T'$, $0 \in]0, 1[$ est nécessaire et suffisante pour avoir l'estimation *.

On va montrer que pour une large classe de domaines, au voisinage de 0, on a l'estimation * si et seulement si il existe $\sigma \in \,]0, 1]$ tel que $\lambda_i \geqslant \sigma T'$. De manière plus précise on a le

Théorème 7.1. — *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ *les valeurs propres (continues) de la forme de Levi au voisinage de* 0. *Pour tout point* $z \in V$ *notons*

$$- T'(z) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^-(z)$$

où

$$\lambda_j^-(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda_j(z) \geqslant 0 \\ -\lambda_j(z) & \text{si} \quad \lambda_j(z) < 0 . \end{cases}$$

Alors l'estimation $*$ *dans* V *entraîne qu'il existe* $\sigma \in \,]0, 1[$ *tel que*

$$(7.1) \qquad \lambda_j \geqslant \sigma T' \quad \textit{sur} \quad V .$$

Si de plus, il existe une base $(L_1, \ldots, L_{n-1})$ *telle que les hypothèses du théorème* 6.1. *soient vérifiées, cette condition* (7.1) *est nécessaire et suffisante.*

Démonstration. — Nous allons utiliser un lemme, que nous avons démontré dans [2]. Notons A la matrice de Levi.

Lemme 7.2. — *Soit* λ_i *une des valeurs propres. Pour tout ouvert* $V_1 \subset V$, *il existe un ouvert non vide* ω, $\omega \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, *tel que* $\omega \subset V$ *et il existe un* $(n-1)$ uple $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ *de fonctions* C^∞ *dans* ω *tel que*

$$\begin{cases} Au = \lambda_i u \quad \textit{sur} \quad \omega, \quad u = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \\ |u|^2 = 1 . \end{cases}$$

Démonstration du théorème 7.1. — Soit $z_0 \in V$. D'après le lemme 7.2, il existe un ouvert ω non vide, aussi proche que l'on veut de z_0 et $u = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ tel que $u \in C^\infty(\omega)$ $Au = \lambda_i u$.

Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$(7.2) \qquad c\|\overline{L}u\|^2 < Q(u, u) \quad \forall u \in \mathscr{D}^{0,1}(V \cap \overline{\Omega}) .$$

Alors en prenant $w = v_\varphi = (u_1\varphi, \ldots, u_{n-1}\varphi, 0)$ où $\varphi \in \mathscr{D}(\omega)$ et en utilisant (4.2) on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} -\lambda_i |v_\varphi|^2 \leqslant \left(1 - \frac{c}{2}\right) \|\overline{L}v_\varphi\|^2 + C_0\|v_\varphi\|^2 \; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\omega)$$

ce qui donne puisque $\bar{L}v_\varphi = \varphi \bar{L}u + u\bar{L}_\varphi$ et $|u|^2 = 1$

$$(7.3) \quad \int_{\partial\Omega} - \lambda_i |\varphi|^2 \leqslant \left(1 - \frac{c}{2}\right) \|\bar{L}\varphi\|^2 + C_1 \|\varphi\|^2 \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega) .$$

Soit alors z_1 un point quelconque de ω. En utilisant les lemmes 3.2.14 et 3.2.20 de [5], (7.3) va entraîner que

$$(7.4) \qquad - \frac{1}{1 - \frac{c}{2}} \lambda_i(z_1) \leqslant - T'(z_1) .$$

Avant de continuer la démonstration faisons ces quelques remarques :

1) Pour montrer (7.4), le lemme 3.2.20 de [5] n'est pas suffisant, il faut le modifier en remplaçant la constante c par la fonction λ_i. Mais en raisonnant au voisinage de z_1 et en transcrivant la démonstration du lemme 3.2.20, on arrive à l'inégalité :

$$- \frac{2}{1 - \frac{c}{2}} \lambda_i(z_1) \int_{C^{n-1}} |\psi_1|^2 e^{-2L} \leqslant \sum_1^{n-1} \int_{C^{n-1}} \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}_k} \right|^2 e^{-2L}$$

ce qui entraîne (7.4), par le lemme 3.2.14 de [5].

2) Il est important de noter que c ne dépend pas de ω. Il provient de (7.2).

Maintenant comme T' est continue, et comme

$$- \frac{1}{1 - \frac{c}{2}} \lambda_i(z) \leqslant - T'(z) \quad \forall z \in \omega ,$$

ω très proche de z_0, on obtient $- \dfrac{1}{1 - \frac{c}{2}} \lambda_i(z_0) \leqslant - T'z_0)$.

D'où le résultat, $\forall z_0 \in V$ en prenant $\sigma = 1 - \dfrac{c}{2}$.

Si, de plus la matrice de Levi, dans une base convenable, vérifie les hypothèses du théorème 6.1, le résultat de ce même théorème entraîne que la condition (7.1) est aussi suffisante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Th. Bloom and I. Graham, A geometric characterization of points of type *m* on real hypersurfaces, *J. Diff. Geom.*, in Press.

[2] M. Derridj, Régularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines faiblement pseudo-convexes, *J. Diff. Geom.*, in Press.

[3] M. Derridj and D. Tartakoff, Séminaire d'Analyse (P. Lelong), Année 1976, Springer Verlag, n° 578.

[4] K. K. Diederich and J. E. Fornaess, Pseudo-convex domains with real analytic boundary, A paraître.

[5] G. B. Folland and J. J. Kohn, The Neumann problem for the Cauchy Riemann complex, *Ann. of Math. Studies*, Princ. Univ. Press.

[6] L. Hormander, L^2-estimates and existence theorems of the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Math.*, 113 (1965).

[7] L. Hormander, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.*, 119 (1967).

[8] J. J. Kohn, Subellipticity on pseudo-convex domains with isolated degeneracies, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Vol. 71, n° 67.

[9] J. J. Kohn, Sufficient conditions for subellipticity on weakly pseudo-convex domains, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 74, n° 6.

[10] J. J. Kohn, Pseudo-differential operators and non elliptic problems, *C.I.M.E.*, Stresa (1968).

Manuscrit reçu le 20 janvier 1978
Révisé le 19 avril 1978
Proposé par B. Malgrange.

Maklouf Derridj,
Université de Rouen
Mathématiques
76, Mont-Saint-Aignan
et
E.R.A. 296,
Université Paris-Sud
Centre d'Orsay.