

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-FRANÇOIS MATTEI

ROBERT MOUSSU

Intégrales premières d'une forme de Pfaff analytique

Annales de l'institut Fourier, tome 28, n° 4 (1978), p. 229-237

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_4_229_0

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTÉGRALES PREMIÈRES D'UNE FORME DE PFAFF ANALYTIQUE

par J. F. MATTEI et R. MOUSSU

Introduction.

Soit $\omega = \sum a_i dx_i$ un germe en $0 \in \mathbf{C}^m$ de 1-forme différentielle holomorphe et soit $S(\omega)$ le germe d'ensemble défini par les équations $a_i(x) = 0$. Nous dirons que ω possède une intégrale première holomorphe (resp. formelle) s'il existe $f, g \in \mathcal{O}_m$ (resp. $\hat{\mathcal{O}}_m$) tels que $\omega = g df$; \mathcal{O}_m (resp. $\hat{\mathcal{O}}_m$) désigne l'anneau des séries convergentes (resp. formelles) à m indéterminées.

THÉORÈME. — *Supposons que ω soit intégrable (i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$) et qu'il existe un germe d'application holomorphe h de $(\mathbf{C}^r, 0)$ dans $(\mathbf{C}^m, 0)$ tel que $\text{codim } S(h^*\omega) \geq 2$, alors ω possède une intégrale première holomorphe dès que $h^*(\omega)$ possède une intégrale première formelle.*

Ce résultat précise le théorème 2 démontré par B. Malgrange dans [4] et, puisque ω possède une intégrale première formelle si $\text{codim } S(\omega) \geq 3$ [4], [5], on en déduit le théorème 1 de [4]:

COROLLAIRE. — *Supposons que ω soit intégrable et que $\text{codim } S(\omega) \geq 3$; alors ω possède une intégrale première holomorphe.*

Pour montrer les théorèmes 1 et 2 de [4], B. Malgrange construit une 1-forme holomorphe, non singulière, intégrable sur $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}$ qui induit ω sur $\mathbf{C}^m \times \{0\}$ et lui applique

le théorème de Frobenius classique. Notre raisonnement est différent, il repose sur les trois propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbf{C}^2$ de 1-forme holomorphe tel que $S(\omega) = \{0\}$; alors ω possède une intégrale première holomorphe dès que ω possède une intégrale première formelle.*

La proposition suivante précise un résultat de [5].

PROPOSITION 2. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbf{C}^m$ de 1-forme holomorphe, intégrable. Supposons qu'il existe un plongement i de $(\mathbf{C}^r, 0)$ dans $(\mathbf{C}^m, 0)$ tel que $\text{codim } S(i^*(\omega)) \geq 2$; alors ω possède une intégrale première holomorphe (resp. formelle) dès que $i^*(\omega)$ possède une intégrale première holomorphe (resp. formelle).*

La proposition 3 est un « résultat de transversalité » ne faisant pas intervenir l'intégrabilité de ω .

PROPOSITION 3. — *Soit ω un germe en $0 \in \mathbf{C}^m$ de 1-forme holomorphe. Quel que soit l'entier $p < m$ il existe un plongement i de $(\mathbf{C}^p, 0)$ dans $(\mathbf{C}^m, 0)$ tel que*

$$(*) \quad S(i^*(\omega)) = i^{-1}(S(\omega))$$

et

$$\text{codim } S(i^*(\omega)) = \inf (\text{codim } S(\omega), p).$$

Montrons comment ces propositions impliquent le théorème. Soit i un plongement de $(\mathbf{C}^2, 0)$ dans $(\mathbf{C}^r, 0)$ tel que $S(i^*(h^*(\omega))) = \{0\}$ (proposition 3). $i^*(h^*(\omega))$ possède une intégrale première formelle. D'après les propositions 1, puis 2, $h^*(\omega)$ possède une intégrale première holomorphe.

Soit $H: (\mathbf{C}^r \times \mathbf{C}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{C}^m, 0)$ une déformation de h (i.e $H(x, 0) = h(x)$ et $H(0, t) = H_t(0) = 0$) telle que H_t soit de rang maximum pour $t \neq 0$. D'après la proposition 2, $H^*(\omega)$ admet une intégrale première et, par conséquent, pour $t \neq 0$ voisin de 0, $H_t^*(\omega)$ possède une intégrale première. Le résultat est obtenu en appliquant à H_t le théorème du rang si $r \geq m$ (il existe j holomorphe tel que $j \circ H_t$ soit un isomorphisme de $(\mathbf{C}^m, 0)$) et, si $r < m$, la proposi-

tion 2; on a en effet :

$$2 \leq \text{codim } S(h^*(\omega)) \leq \text{codim } S(H_t^*(\omega)).$$

Remarque. — Le théorème est encore vrai dans le cas analytique réel en remplaçant dans l'hypothèse $\text{codim } S(h^*(\omega))$ par $ht \ I(h^*(\omega))$, $I(h^*(\omega))$ désignant l'idéal de \mathcal{O}_m engendré par les coefficients b_j de $h^*(\omega) = \sum b_j dy_j$. En effet, la 1-forme complexifiée $\tilde{\omega}$ de ω vérifie les hypothèses du théorème. Elle possède une intégrale première holomorphe \tilde{f} . Un calcul élémentaire montre que, soit la partie réelle, soit la partie imaginaire de $\tilde{f}|_{\mathbf{R}^m \times \{0\}}$ est une intégrale première de ω .

1. Démonstration de la proposition 1.

Elle repose sur un résultat de Brjuno [1] (p. 140 et p. 147) que l'on peut énoncer :

Soit η un germe en $0 \in \mathbf{C}^2$ de 1-forme holomorphe dont le 1-jet s'écrit, $j^1 \eta = \alpha y \, dx + \beta x \, dy$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ premiers entre eux; alors, il existe $A, B \in \hat{\mathcal{O}}_1$ et $X, Y \in \hat{\mathcal{O}}_2$ tels que :

$$X = x + \sum_{i,j>1} a_{i,j} x^i y^j, \quad Y = y + \sum_{i,j>1} b_{i,j} x^i y^j$$

avec

$$a_{i,j} = b_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha j = \beta i.$$

tels que

(i) $\eta = (A(X^\alpha Y^\beta) Y dX + B(X^\alpha Y^\beta) X dY) \frac{D(x,y)}{D(X,Y)}$

(ii) si $\beta A = \alpha B$, alors $X, Y \in \mathcal{O}_2$ et a fortiori $A, B \in \mathcal{O}_1$.

Nous appellerons éclatement tout germe d'application π de $(\mathbf{C}^2, 0)$ dans $(\mathbf{C}^2, 0)$ obtenu par compositions successives d'automorphismes algébriques de $(\mathbf{C}^2, 0)$ et d'applications du type $(x, y) \rightarrow (xy, y)$. Par des majorations élémentaires on montre que si $F \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et $F \circ \pi \in \mathcal{O}_2$, alors $F \in \mathcal{O}_2$.

Soit ω , comme dans l'énoncé de la proposition : il existe $f, g \in \hat{\mathcal{O}}_2$ tel que $\omega = g \, df$. Nous allons montrer l'existence de $l \in \hat{\mathcal{O}}_1$, tel que $l \circ f \in \mathcal{O}_2$. Puisque ω est à singularité isolée, $g(0) \neq 0$ et f n'a pas de facteurs multiples, i.e. $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k$ avec $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$ et $f_i \in \hat{\mathcal{O}}_2$ irréduc-

tibles. Il est bien connu (désingularisation des courbes, cf. par exemple [3]) qu'il existe un éclatement π tel que :

$$f(\pi(x,y)) = (y - g_1(x)) x^\alpha h(x,y) = F(x,y)$$

avec $h \in \hat{\mathcal{O}}_2$, $h(0) \neq 0$ et $g_1 \in (x^2)\hat{\mathcal{O}}_1$. Il suffit de montrer l'existence de $l \in \hat{\mathcal{O}}_1$ tel que $l \circ F \in \mathcal{O}_2$ pour montrer la proposition 1. On a

$$\pi^*(\omega) = g \circ \pi dF = g(0) \cdot h(0) x^{\alpha-1} \omega_1$$

où ω_1 est un germe de 1-forme de 1-jet $j^1\omega_1 = \alpha y dx + x dy$. En appliquant le théorème de Brjuno à ω_1 , on obtient $X, Y \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et $A, B \in \hat{\mathcal{O}}_1$ vérifiant i) et ii).

Soient $F_1, F_2 \in \hat{\mathcal{O}}_2$ et le $l_1 \in \hat{\mathcal{O}}_1$ définis par :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= F_1(X,Y) = \sum_{i,j>0} c_{ij} X^i Y^j, \\ l_1(Z) &= \sum_{r>0} c_{r,r} Z^r, \\ F_2(X,Y) &= F_1(X,Y) - l(X^\alpha Y). \end{aligned}$$

Avec ces notations la condition $\omega_1 \wedge dF_1$ s'écrit

$$(A(X^\alpha Y)Y dX + B(X^\alpha Y)X dY) \wedge (dl_1(X^\alpha Y) + dF_2(X,Y)) = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} X^\alpha Y l_1'(X^\alpha Y)(A(X^\alpha Y) - \alpha B(X^\alpha Y)) \\ = A(X^\alpha Y)Y \frac{\partial F_2}{\partial Y}(X,Y) - B(X^\alpha Y)X \frac{\partial F_2}{\partial X}(X,Y) \end{aligned}$$

En identifiant terme à terme les deux membres de cette égalité on obtient :

- a) $A = \alpha B$,
 b) $F_1(X,Y) = l_1(X^\alpha Y)$ et donc $l_1'(0)$ est non nul (puisque $j^{\alpha+1}F_1(X,Y) = h(0)X^\alpha Y$).

2. Démonstration de la proposition 2.

Rappelons les notations de [4]. Si $f = \sum a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}_m$ et $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m) = \rho$, avec $\rho_i > 0$, on pose $|f|_\rho = \sum |a_\alpha| \rho^\alpha$. Si $\omega = \sum a_i dx_i \in \Omega_m^1$, le \mathcal{O}_m -module des germes en $0 \in \mathbf{C}^m$ de 1-forme holomorphe, on pose $|\omega|_\rho = \sum |a_i|_\rho$. Le sous-

espace de \mathcal{O}_m (resp. Ω_m^1) sur lequel $| \cdot |_\rho$ est finie est noté $\mathcal{O}(\rho)$ (resp. $\Omega^1(\rho)$).

LEMME. — Supposons que $\omega \in \Omega_m^1$ et que $\text{codim } S(\omega) \geq 2$; alors, quel que soit $\pi \in \Omega_m^1$ vérifiant $\omega \wedge \pi = 0$, il existe $g \in \mathcal{O}_m$, unique, tel que $g\omega = \pi$. De plus, il existe $K > 0$ et ρ tel que si $\pi \in \Omega(\rho)$ alors $g \in \mathcal{O}(\rho)$ et

$$|g|_{t\rho} \leq K|\pi|_{t\rho} \quad \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right].$$

L'existence de g est un cas particulier d'un théorème sur le complexe de Koszul associé à ω ([4], [6]). La majoration est une conséquence évidente du théorème de division par une fonction holomorphe.

Notons $(x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ les coordonnées d'un point de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$. Soit $\omega \in \Omega_{m+1}^1$, intégrable; notons

$$\omega = \sum_{n \geq 0} t^n (\omega_n + a_n dt)$$

son développement de Taylor suivant les puissances de t et supposons que :

(2.1) $\text{codim } S(\omega_0) \geq 2$ et $\omega_0 = df_0$ avec $f_0 \in \mathcal{O}(\rho)$.

(2.2) $\omega_n \in \Omega^1(\rho)$, $a_n \in \mathcal{O}(\rho)$ pour $n \geq 0$.

(2.3) $\sum_{n \geq 0} (|a_n|_\rho + |\omega_n|_\rho) t^n$ a un rayon de convergence > 0 .

La proposition 2 se déduit par récurrence sur r (compte tenu du lemme) des deux assertions suivantes :

(2.4.) Il existe une suite unique $\{f_n\}_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\rho)$ telle que $\omega \wedge d \left(\sum_{n \geq 0} t^n f_n \right) = 0$.

(2.5) La série $\sum_{n \geq 0} |f_n|_{\rho/2} t^n$ a un rayon de convergence > 0 .

Démonstration de (2.4.). — Remarquons que pour $f_1 \in \mathcal{O}(\rho)$

$$(2.4.1) \quad \omega = d(f_0 + tf_1) \quad (t)$$

est équivalent à $a_0 = f_1$. Supposons qu'il existe $f_1, \dots, f_n, h_1, h_2, \dots, h_{n-1} \in \mathcal{O}(\rho)$ uniques tels que :

$$(2.4.n) \quad \omega' = \left(1 + \sum_{p=1}^{n-1} t^p h_p \right) \omega = d \left(\sum_{p=0}^n t^p f_p \right) \quad (t^n).$$

Montrons l'existence et l'unicité de $f_{n+1}, h_n \in \mathcal{O}(\rho)$ tels que

(2.4.n + 1) soit vrai, ou ce qui est équivalent, tels que :

$$(1 + t^n h_n) \omega' = d \left(\sum_{p=0}^{n+1} t^p f_p \right) \quad (t^{n+1}).$$

D'après (2.4.n) il existe $a'_n \in \mathcal{O}(\rho)$ et $\omega'_n \in \Omega^1(\rho)$ tels que :

$$\omega' = d \left(\sum_{p=0}^n t^p f_p \right) + t^n (\omega'_n + a'_n dt) \quad (t^{n+1}).$$

Un calcul élémentaire montre que f_{n+1} et h_n sont déterminés par :

$$h_n \omega_0 + \omega'_n = 0, \quad (n+1)f_{n+1} = h_n a_0 + a'_n.$$

La condition $\omega' \wedge d\omega' = 0$ (t^n) étant équivalente à $\omega_0 \wedge \omega'_n = 0$, du lemme 1 on déduit l'existence et l'unicité de h_n et f_{n+1} .

Démonstration de 2.5. — Nous allons utiliser la même méthode que B. Malgrange dans [4]. Il suffit de montrer (compte tenu de 2.4. et du lemme) que si

$$df \wedge \omega = 0 \quad \text{avec} \quad f = \sum_{n \geq 0} t^n f_n, \quad f_n \in \mathcal{O}(\rho), \quad \omega_0 = df_0,$$

alors $\sum_{n \geq 0} t^n |f_n|_{\rho/2}$ converge. La condition 2.4. implique en particulier pour $n \geq 0$

$$(n+1)f_{n+1}\omega_0 = \sum_{p=0}^n a_{n-p} f_p - \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)f_{p+1}\omega_{n-p}.$$

D'après le lemme 1, pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ on en déduit :

$$|f_{n+1}|_{t\rho} \leq \frac{K}{n+1} \sum_{p=0}^n |a_{n-p}|_{\rho} |df_p|_{t\rho} + K \sum_{p=0}^{n-1} |f_{p+1}|_{t\rho} |\omega_{n-p}|_{\rho}$$

et, en utilisant la majoration du lemme 2.4. de [3] :

$$|df_p|_{t\rho} \leq \frac{C}{s-t} |f_p|_{s\rho} \quad \text{si} \quad t < s \leq 1,$$

on obtient la majoration suivante :

$$(2.5.n) \quad |f_{n+1}|_{t\rho} \leq \frac{K.C}{(n+1)(s-t)} \sum_{p=0}^n |a_{n-p}|_{\rho} |f_p|_{s\rho} + K \sum_{p=0}^{n-1} |f_{p+1}|_{t\rho} |\omega_{n-p}|_{\rho}.$$

Soit $\{u_p\}_{p \geq 0}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = |f_0|_\rho \\ u_{n+1} = \text{K.C.} e \sum_{p=0}^n |a_{n-p}|_\rho u_p + \text{K} \sum_{p=0}^{n-1} u_{p+1} |\omega_{n-p}|_\rho . \end{cases}$$

Il suffit de montrer, comme dans [4], les deux assertions suivantes :

(2.6) On a $|f_p|_{t\rho} \leq \frac{u_p}{(1-t)^p}$ si $t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, $p \in \mathbf{N}$.

(2.7.) La série $F(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n$ est convergente.

Il est clair que pour $p = 0$ et $p = 1$ l'assertion (2.6.) est vraie. Supposons qu'elle le soit jusqu'à l'ordre $n \geq 1$;

on obtient, en majorant $|f_p|_{t\rho}$ dans (2.5.n) par $\frac{u_p}{(1-t)^p}$,

$$(1-t)^{n+1} |f_{n+1}|_{t\rho} \leq \text{K.C.} \mu_n(t,s) \sum_{p=0}^n |a_{n-p}|_\rho u_p + \text{K} \sum_{p=0}^{n-1} |\omega_{n-p}|_\rho u_{p+1} .$$

En choisissant $1-s = \frac{n}{n+1} (1-t)$, comme dans [4], on a :

$$\mu_n(t,s) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(s-t)(1-s)^n(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e$$

d'où (2.6.).

Pour vérifier (2.7.) il suffit de constater que $F(t)$ est « la » solution de l'équation linéaire

$$F(t) = |f_0|_\rho + \text{K.C.e.t} A(t) . F(t) + \text{K.t.B}(t) (F(t) - |f_0|_\rho)$$

où $A(t) = \sum_{n \geq 0} |a_n|_\rho t^n$ et $B(t) = \sum_{n \geq 0} |\omega_{n+1}|_\rho t^n$ sont des séries convergentes d'après (2.3.).

3. Démonstration de la proposition 3.

Choisissons dans \mathbf{C}^m des coordonnées adaptées à $S(\omega)$, i.e. si j est l'inclusion canonique $x \rightarrow (x,0)$ de \mathbf{C}^p dans $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^{m-p}$ [2]

$$\text{codim } j^{-1}(S(\omega)) = \inf (\text{codim } S(\omega), p) .$$

Nous allons obtenir le plongement i cherché en perturbant

l'inclusion j . Plus précisément soit $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$ l'application de $\mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ dans \mathbf{C}^m définie par

$$I(x, A, B) = j(x) + Ax + Bx^2$$

où $A, B \in \mathbf{C}^{mp}$ sont des matrices $p \times m$ et $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_p^2)$. Pour A, B proche de 0, l'application partielle $I_{A,B}$: $x \rightarrow I(x, A, B)$ vérifie (comme j) la condition

$$(3.1) \quad \text{codim } I_{A,B}^{-1}(S(\omega)) = \inf(\text{codim } S(\omega), p).$$

Pour établir la proposition il suffit de montrer l'assertion suivante: il existe un sous-ensemble analytique propre Z de $(\mathbf{C}^{mp})^2$ tel que

$$(3.2) \quad S(I_{A,B}^*(\omega)) = I_{A,B}^{-1}(S(\omega)) \quad \text{si } A, B \notin Z.$$

Remarquons d'abord que l'application $\tilde{I} = \left(I, \frac{\partial I}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial I}{\partial x_p} \right)$ de $\mathbf{C}^p \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ dans $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^{mp}$ est une submersion en dehors de $0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$. En effet, $(x^0, A^0, B^0) \in \mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ avec $x_i \neq 0$ étant fixé, la restriction \tilde{I}' de \tilde{I} au sous-espace d'équations

$$x = x^0, \quad B = (B_1^0, \dots, B_{i-1}^0, B_i, B_{i+1}^0, \dots, B_p^0) = \hat{B}_i$$

(B_k désignant la $k^{\text{ième}}$ colonne de B) s'écrit

$$(A, B_i) \rightarrow (Ax + \hat{B}_i x^2, A + 2x_i \hat{B}_i) + (\lambda, u)$$

où $(\lambda, u) \in \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^{mp}$ est une constante. \tilde{I}' est un isomorphisme affine.

Soit U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{C}^m$ sur lequel ω est holomorphe, $TU = U \times \mathbf{C}^m$ son espace tangent et soit $\tilde{\omega}$ l'application de $U \times \mathbf{C}^{mp}$ dans U définie par:

$$\tilde{\omega}(x, X_1, X_2, \dots, X_p) = (\omega_x(X_1), \omega_x(X_2), \dots, \omega_x(X_p))$$

π désignant la projection de $U \times \mathbf{C}^{mp}$ sur U . $\tilde{Z} = \tilde{\omega}^{-1}(0)$ contient $\pi^{-1}(S(\omega))$ et $\tilde{Z} - \pi^{-1}(S(\omega))$ est une sous-variété lisse de codimension p .

Des deux égalités,

$$\tilde{I}^{-1}(\tilde{Z}) = \bigcup_{A,B} S(I_{A,B}^*(\omega)) \quad \text{et} \quad \pi \circ \tilde{I} = I$$

on déduit que

$$H = \tilde{I}^{-1}(Z) - I^{-1}(S(\omega)) = \bigcup_{A,B} (S(I_{A,B}^*(\omega)) - I_{A,B}^{-1}(S(\omega)))$$

est une sous-variété analytique (lisse) de codimension p de $\mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ qui ne contient pas $0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$. Son adhérence, \bar{H} , est un sous-ensemble analytique de codimension p et ne peut donc contenir $0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$. ([2]).

Par construction $Z = \bar{H} \cap 0 \times (\mathbf{C}^{mp})^2$ vérifie (3.1.).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. D. BRJUNO, Analytic form of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 25 (1971), 131-282.
- [2] R. C. GUNNING and H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice Hall Inc., London.
- [3] M. LEJEUNE-JALABERT et B. TESSIER, Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Centre Math. École Polytechnique (Nov. 1971).
- [4] B. MALGRANGE, Frobenius avec singularités 1. codimension un, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 46 (1976), 163-173.
- [5] R. MOUSSU, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, *Annales Inst. Fourier*, 26-2 (1971), 171-220.
- [6] K. SAITO, On a generalisation of de Rham lemma, *Annales Inst. Fourier*, 26-2 (1976), 165-170.

Manuscrit reçu le 13 janvier 1978

Proposé par B. Malgrange.

J. F. MATTEI, R. MOUSSU,

Université de Dijon

Département de Mathématiques

21000 Dijon.