ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL DUFLO

Représentations de semi-groupes de mesures sur un groupe localement compact

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 3 (1978), p. 225-249
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_225_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 225-249

REPRÉSENTATIONS DE SEMI-GROUPES DE MESURES SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

par Michel DUFLO

Introduction.

Soit G un groupe de Lie. Une distribution T sur G est dite dissipative si elle satisfait au principe du maximum du module : pour toute fonction test f telle que $f(1) = \sup |f|$ on a $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$. C'est le cas en particulier des laplaciens généralisés. Une distribution dissipative engendre un unique semi-groupe (pour la convolution) de mesures de Radon μ_t $(t \geqslant 0)$ de variation totale $\leqslant 1$, vaguement continu, et tel que $\mu_0 = \delta$. Par définition, on a donc $T = \lim_{t \to 0} t^{-1}(\mu_t - \delta)$.

Soit π une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach $\mathcal{H}$. Soit T une distribution à support compact sur G. On note dom $\pi_1(T)$ l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels qu'il existe $k \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait $\pi(f * T)h = \pi(f)k$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$, et si $h \in \operatorname{dom} \pi_1(T)$ on pose $\pi_1(T)h = k$. L'opérateur $\pi_1(T)$ est fermé, de domaine dense contenant l'espace $\mathcal{H}^\infty$ des vecteurs différentiables de $\mathcal{H}$. On note $\pi_2(T)$ la clôture de la restriction de $\pi_1(T)$ à $\mathcal{H}^\infty$. On a $\pi_2(T) \subset \pi_1(T)$, mais en général ces opérateurs ne sont pas égaux. Lorsque par exemple π est la représentation régulière droite dans un espace $L^p(G)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, ou $C_0(G)$, $\pi_2(T)$ est la clôture de l'opérateur $f \longrightarrow f * \check{T}$, défini sur $\mathcal{D}(G)$, et dom $\pi_1(T)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{H}$ tels que $f * \check{T}$ (calculé dans $\mathcal{D}'(G)$) appartienne à $\mathcal{H}$ (on a posé $d\check{T}(x) = dT(x^{-1})$). Si $\mathcal{H}$ est un Hilbert et si π est unitaire, on a $\pi_1(T)^* = \pi_2(T^*)$ et $\pi_2(T)^* = \pi_1(T^*)$ (on a posé $dT^*(x) = \overline{dT}(x^{-1})$).

Soient T une distribution dissipative à support compact, $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures qu'elle engendre, et π une représentation fortement continue de G dans un banach $\mathcal{H}$. Nous montrons que $\pi_1(T) = \pi_2(T)$; d'autre part pour tout $t \geqslant 0$, l'intégrale forte $\int \pi(g)\, d\mu_t(g)$ existe et définit dans $\mathcal{H}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dont le générateur infinitésimal est $\pi_1(T)$.

Ces résultats se généralisent sans difficultés. On peut remplacer G par un groupe localement compact quelconque. On peut remplacer T par une distribution somme d'une distribution dissipative à support compact et d'une mesure ν telle que l'intégrale forte $\int \pi(g)\, d\nu(g)$ existe. On peut remplacer π par une représentation d'un sous-semi-groupe fermé convenable contenant le support des μ_t ; par exemple pour $G = \mathbf{R}$, du semi-groupe $[0, \infty[$, ou plus généralement, pour $G = \mathbf{R}^n$ de semi-groupes fermés contenant un cône d'intérieur non vide. On peut remplacer G par un espace homogène G/K avec K compact.

Ainsi généralisés ces résultats contiennent, unifient et précisent plusieurs cas particuliers déjà connus. Par exemple le cas où π est une représentation de norme $\leqslant 1$ de $[0, \infty[$ est traité dans R.S. Phillips [14] et J. Faraut [5]. G.A. Hunt dans l'article fondamental [11] a essentiellement traité le cas de la représentation régulière d'un groupe de Lie dans l'espace $C_0(G)$ et dans l'espace des fonctions uniformément continues bornées. E. Nelson et W.F. Stinespring [13] et Jorgensen [12] considèrent le cas où T est une distribution de support $\{1\}$ sur un groupe de Lie. Dans ce cas T définit sur G un opérateur différentiel hypo-elliptique (en un certain sens). Nos résultats permettent de déterminer ce qui dans [13] et [12] repose sur le principe du maximum, ou sur l'hypoellipticité.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [4]. Dans [4], prop. 5, est annoncée une majoration de μ_1 lorsque T est un laplacien généralisé à support compact. Je démontre ici une majoration plus faible, car elle suffit pour établir le théorème principal, et car sa démonstration (une simple adaptation d'un argument dû à A. Hulanicki pour les laplaciens) est beaucoup plus courte et élémentaire. Je n'écris pas ici ma démonstration de la prop. 2 de [4] (sur les opérateurs dissipatifs invariants dans $C_0(G)$) car il en existe une (complètement différente d'ailleurs) dans J.P. Roth, [15] théorème II.3.1.

1. Notations.

Dans toute la suite G est un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar à droite dg, K est un sous-groupe compact de G et dk sa mesure de Haar normalisée, χ un homomorphisme continu de K dans $\mathbf{T}$ (le groupe des nombres complexes de module 1). On note $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des fonctions régulières à valeurs complexes à support compact sur G (au sens de F. Bruhat [3]), $\mathcal{D}'(G)$ l'espace des distributions, $*$ le produit de convolution des distributions. La mesure dg est utilisée pour identifier les fonctions localement sommables sur G à des distributions. On notera encore χ la distribution $f \longmapsto \int_K f(k)\chi(k)\,dk$. Si $f \in \mathcal{D}(G)$, on pose $\tilde{f}(g) = f(g^{-1})$ et si $T \in \mathcal{D}'(G)$, on définit $\check{T}$ et T^* par les formules $\check{T}(f) = T(\tilde{f})$ et $T^*(f) = T(\tilde{\bar{f}})$.

Avec ces conventions, on a la formule suivante :

$$\int f(xy)\,dT(y) = f * \check{T}(x) \qquad \text{(pour presque tout } x) \tag{1}$$

si par exemple f est une fonction régulière et T une distribution à support compact, ou si f est mesurable bornée et T une mesure de Radon bornée.

On note $\mathcal{D}(G, \check{\chi})$ le sous-espace de $\mathcal{D}(G)$ formé des fonctions vérifiant $f * \check{\chi} = f$, c'est-à-dire telles que $f(gk) = \chi(k^{-1})f(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $k \in K$. On note $\mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ le sous-espace de $\mathcal{D}(G)$ formé des fonctions f vérifiant $\check{\chi} * f * \check{\chi} = f$. On définit de même les espaces $\mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$, $C_0(G, \check{\chi})$ etc.

2. Distributions dissipatives.

DEFINITIONS. – *Une distribution* T *sur* G *est* χ*-dissipative si* $T \in \mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$ *et si pour tout* $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ *telle que* $f(1) = \sup_{g \in G} |f(g)|$ *on a* $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$. *Si* $K = \{1\}$, *on dit que* T *est dissipative.*

Si χ *est le caractère unité de* K, *on dit qu'une distribution* T *sur* G *est un* χ*-laplacien généralisé si* $T \in \mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$, *si* T *est réelle, et si pour toute fonction* f *réelle de* $\mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ *telle que* $f(1) \geqslant 0$ *et* $f(1) = \sup_{g \in G} f(g)$, *on a* $T(f) \leqslant 0$. *Si* $K = \{1\}$, *on parle simplement de laplacien généralisé.*

Lorsque χ est le caractère unité, il est clair qu'un χ-laplacien généralisé est une distribution χ-dissipative. La structure des laplaciens généralisés est bien connue, elle est donnée par la formule de Levy-Khinchine (dans le sens de Hunt [11], Hazod [7] ou Roth [15] théorème II.2.2). Nous verrons que celle des distributions dissipatives s'y ramène. Pour le moment, donnons juste un exemple.

Exemple. – Supposons que G soit un groupe de Lie et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Chaque élément X de $\mathfrak{g}$ définit une distribution (notée par la même lettre) de support $\{1\}$. On notera XY la distribution $X * Y$. Soient $X_1, \ldots, X_n, X$ et Y des éléments de $\mathfrak{g}$, et $c, d \in \mathbf{R}$. Alors la distribution $X_1^2 + \ldots + X_n^2 + X + c$ est un laplacien généralisé si $c \leqslant 0$. Si Y appartient à l'espace vectoriel engendré par $X_1, \ldots, X_n$, la distribution $X_1^2 + \ldots + X_n^2 + X + iY + c + id$ est dissipative si $X_1^2 + \ldots + X_n^2 + Y - c$ est $\geqslant 0$, considérée comme fonction sur le dual de $\mathfrak{g}$, comme il résulte facilement de la formule de Taylor. Les éléments $X_1, \ldots, X_n$, et $Y \in \mathbf{R}X_1 + \ldots + \mathbf{R}X_n$ étant fixés, c'est le cas dès que c est assez petit.

LEMME 1. – *Soit* V *un voisinage de* K *et soit* T *une distribution* χ*-dissipative. Il existe une distribution* $T_1 \in \mathcal{D}'(\chi, G, \chi)$ *à support dans* V *telle que* $T - T_1$ *soit une mesure bornée. Si* $f \in \mathcal{D}(G)$ *et si* μ *est une mesure de Radon bornée sur* G, *on a*

$$\langle f * \check{T}, \mu \rangle = \langle \check{T}, \tilde{f} * \mu \rangle . \tag{2}$$

Démonstration. – La première assertion du lemme est due à Faraut [5] prop. II.2 (pour $G = \mathbf{R}^n$, mais la démonstration s'applique au cas général). Le reste du lemme est trivial.

3. Semi-groupes de mesures.

Si μ est une mesure de Radon sur G nous notons $|\mu|$ sa valeur absolue et $\|\mu\|$ sa variation totale.

Nous noterons M(G) l'ensemble des mesures de radon μ telles que $\|\mu\| < \infty$. C'est le dual de $C_0(G)$. On le munit de la topologie faible. Un semi-groupe de mesures est une application faiblement continue $t \longmapsto \mu_t$ de $]0, \infty[$ dans M(G) telle que $\mu_{t+t'} = \mu_t * \mu_{t'}$ pour tout t et t'. Il est facile de voir que si $\|\mu_t\|$ est borné au voisinage de 0, le semi-groupe se prolonge de manière continue à $[0, \infty[$. Lorsque de plus $\|\mu_t\| \leqslant 1$ pour tout $t > 0$ (c'est le cas qui nous intéressera ci-dessous) μ_0 est une mesure vérifiant $\|\mu_0\| \leqslant 1$ et $\mu_0 * \mu_0 = \mu_0$. D'après [6] th. 2.1.4 ou bien $\mu_0 = 0$ (et dans ce cas $\mu_t \equiv 0$) ou bien μ_t est égale à la mesure de Haar normalisée d'un sous-groupe compact, multipliée par un homomorphisme continu de ce sous-groupe à valeurs dans T. Nous introduisons les notations suivantes :

$\mathfrak{M}(G, \chi)$ est l'ensemble des applications faiblement continues $t \longmapsto \mu_t$ de $[0, \infty[$ dans M(G) telles que $\|\mu_t\| \leqslant 1$ pour tout t, $\mu_0 = \chi$, et $\mu_{t+t'} = \mu_t * \mu_{t'}$ pour tout t et $t' \geqslant 0$;

lorsque χ est la mesure de Haar de K, $\mathfrak{P}(G, \chi)$ est le sous-ensemble des éléments de $\mathfrak{M}(G, \chi)$ à valeurs positives.

Si f est une fonction sur G on note Zf la fonction sur $\mathbf{T} \times G$ telle que $Zf(z, g) = zf(g)$ pour $(z, g) \in \mathbf{T} \times G$.

LEMME 2. – *Soit* $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$. *Soit* K' *le sous-groupe de* $\mathbf{T} \times G$ *formé des éléments* $(\chi(k), k)$ $(k \in K)$ *et* χ' *le caractère unité de* K'. *Il existe* $\{\nu_t\} \in \mathfrak{P}(\mathbf{T} \times G, K')$ *tel que l'on ait* $\mu_t(f) = \nu_t(zf)$ *pour tout* $f \in C_0(G)$.

Ce phénomène a été découvert par Faraut [5] pour $G = \mathbf{R}^n$, et par Roth [15] II.2.5 dans le cas général. En fait Roth ne considère que le cas où χ est le caractère trivial, mais la démonstration donne les résultats énoncés ici.

4. Générateur d'un semi-groupe de mesures.

PROPOSITION 3. – *Soit* $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$. *Lorsque* $t \longrightarrow 0$, $t^{-1}(\mu_t - \chi)$ *tend dans* $\mathcal{D}'(G)$ *vers un élément* χ*-dissipatif. Si* χ *est la mesure de Haar de* K *et si* $\{\mu_t\} \in \mathfrak{P}(G, \chi)$, *la limite est un* χ*-laplacien généralisé.*

Démonstration. – Lorsque G est un groupe de Lie et $\{\mu_t\} \in \mathcal{R}(G, \chi)$ ce résultat est dû à G.A. Hunt [11], et il a été étendu aux groupes localement compacts par Hazod [7]. Il résulte du lemme 2 que ceci reste vrai pour $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$. Remarquons qu'il est possible de démontrer la proposition 1 directement (i.e. sans utiliser le lemme 2), cf. [5] pour $G = \mathbf{R}^n$ et [4] pour le cas général.

PROPOSITION 4. – *Soit* T *une distribution* χ*-dissipative. Il existe un et un seul* $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$ *tel que* $\lim_{t \to 0} t^{-1}(\mu_t - \chi) = T$ *dans* $\mathcal{D}'(G)$. *Si* χ *est la mesure de Haar de* K, *on a* $\{\mu_t\} \in \mathcal{R}(G, \chi)$ *si et seulement si* T *est un* χ*-laplacien généralisé.*

Démonstration. – Si T est un χ-laplacien généralisé, la proposition 2 est due à Hunt [11] si G est un groupe de Lie, et à Hazod [7] dans le cas général. Pour une distribution χ-dissipative, la proposition 4 a été démontrée par Faraut pour $G = \mathbf{R}^n$ et Roth [15] II.3.1 dans le cas général. Je rédige ici une autre démonstration, car elle est plus simple que toutes celles mentionnées ci-dessus.

Démontrons l'existence.

Comme dans Hunt, nous allons construire un semi-groupe de contractions dans l'espace de Banach $C_0(G, \check{\chi})$. Soit T une distribution χ-dissipative. On note A l'opérateur dans $C_0(G, \check{\chi})$ de domaine $\mathcal{D}(G, \check{\chi})$ définit par la formule $A(f) = f * \check{T}$. Ceci est possible à cause du lemme 1. Notons $|\cdot|_\infty$ la norme dans $C_0(G, \check{\chi})$. Comme T est χ-dissipative, on a $|\lambda f|_\infty \leqslant |\lambda f - A(f)|_\infty$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$. Il en résulte que A est fermable et que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{P_t\}$ $(t \geqslant 0)$ fortement continu de contractions dans $C_0(G, \check{\chi})$ tel que $P_0 = \mathrm{Id}$ si et seulement si $\lambda - A$ est d'image dense pour tout $\lambda > 0$ (cf. [9] ch. II). Montrons que tel est le cas. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer qu'étant donné $\lambda > 0$, toute mesure μ de Radon bornée sur G telle que $\mu * \chi = \mu$ et telle que $\langle \mu, \lambda f - f * \check{T} \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ est nulle. Il résulte du lemme 1 que l'on a $\langle \tilde{f} * \mu, \lambda\delta - T \rangle = 0$. Comme la distribution T est χ-dissipative, en remplaçant f par une translatée convenable à gauche on voit que l'on a $\tilde{f} * \mu = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$. Il en résulte que $\mu = 0$. On note μ_t la mesure définie par la formule $\mu_t(f) = P_t(f * \check{\chi})$ (1) pour tout $f \in C_0(G)$. On a $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$ et $\lim_{t \to 0} t^{-1}(\mu_t - \chi) = T$.

Démontrons l'unicité. Soit $\{\nu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$ tel que $\lim t^{-1}(\nu_t - \chi) = T$. Si $f \in C_0(G, \check{\chi})$, on pose $Q_t(f) = f * \nu_t$. Il est facile de voir que $\{Q_t\}$ est un semi-groupe faiblement continu de contractions dans $C_0(G, \check{\chi})$. Il est donc fortement continu. Pour démontrer que $\mu_t \equiv \nu_t$, il suffit de montrer que $Q_t \equiv P_t$, et donc que ces deux semi-groupes ont même générateur. Pour cela il suffit de montrer que pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ et toute mesure de Radon bornée μ sur G, on a $\lim t^{-1} \langle f * \check{\nu}_t - f, \mu \rangle = \langle f * \check{T}, \mu \rangle$. (En effet les limites $\lim t^{-1}(Q_t - Id)$ au sens fort et au sens faible sont égales. Le générateur de $\{Q_t\}$ prolonge celui de $\{P_t\}$, et lui est donc égal). Par hypothèse $t^{-1}(f * \check{\nu}_t - f)$ converge vers $f * T$ simplement. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre qu'il suffit de démontrer que $|t^{-1}(f * \check{\nu}_t - f)|_\infty$ est borné pour $t \leqslant 1$. Ceci est vrai car $f * \nu_t(g) - f(g) = \int_0^t f * T * \nu_s(g)\, ds$ pour tout $g \in G$, et donc $t^{-1} |f * \nu_t - f|_\infty \leqslant |f * T|_\infty$.

La dernière assertion de la proposition se démontre comme dans Hunt [11].

Dans les conditions de la proposition 4, nous dirons que T est le générateur infinitésimal de $\{\mu_t\}$.

5. Structure des distributions dissipatives.

PROPOSITION 5. – *Soit* T *une distribution* χ*-dissipative sur* G. *Il existe un* χ'*-laplacien généralisé* U *sur* $\mathbf{T} \times G$ *tel que* $T(f) = U(Zf)$ *pour tout* $f \in \mathcal{D}(G)$ *(avec les notations du lemme 2). Si* T *est à support compact, on peut choisir* U *à support compact.*

Démonstration. – Soit $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré par T. On peut choisir U égal au générateur du semi-groupe $\{\gamma_t\}$ du lemme 2. On peut remplacer U par αU, où α est n'importe quelle fonction régulière sur G, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, invariante à droite et à gauche par K, égale à 1 dans un voisinage du support de T, ce qui démontre la seconde assertion.

La proposition 5, dans le cas de $\mathbf{R}^n$, est due à Faraut [5].

6. Support d'un semi-groupe de mesures.

Soit C un sous-semi-groupe fermé de G. Nous dirons que $\{\mu_t\} \in \mathfrak{M}(G, \chi)$ a son support contenu dans C si $\sup \mu_t \subset C$ pour tout $t \geqslant 0$.

PROPOSITION 6. – *Soit* T *une distribution* χ*-dissipative et soit* $\{\mu_t\}$ *le semi-groupe de mesures qu'elle engendre. Soit* C *un sous-semi-groupe fermé de* G *tel que* $KCK = C$. *Alors* C *contient le support de* $\{\mu_t\}$ *si et seulement si pour toute fonction* $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ *telle que* $f(1) = \sup_{g \in C} |f(g)|$, *on a* $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$.

Démonstration. – La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons que l'on ait $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ telle que $f(1) = \sup_{g \in C} |f(g)|$. On a encore $\operatorname{Re} T(f) \leqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ telle que $f(1) = \sup_{g \in C} |f(g)|$. Il en résulte que si $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ s'annule sur C, on a $T(f) = 0$, et donc $f * \check{T}$ s'annule dans C. On peut donc définir un opérateur A dans $C_0(C, \check{\chi})$ de la manière suivante : le domaine de A est l'ensemble des restrictions à C des éléments de $\mathcal{D}(G, \check{\chi})$, et si $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$ on pose $A(f|C) = f * T|C$. Comme dans la démonstration de la proposition 2 on voit que A admet une fermeture qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{P_t\}$ $(t \geqslant 0)$ de contractions dans $C_0(C, \check{\chi})$. On note γ_t la mesure sur G définie par $\nu_t(f) = P_t(f * \check{\chi}|C)(0)$. On obtient ainsi un élément de $\mathfrak{M}(G, \chi)$ à support dans C. Par construction, on a $\lim t^{-1}(\nu_t - \chi) = T$, et donc $\{\nu_t\}$ est le semi-groupe engendré par T.

Lorsque C est un cône dans $\mathbf{R}^n$, la proposition 6 est due à Faraut [5].

7. Généralités sur les représentations des sous-semi-groupes de G.

Le contenu de ce paragraphe est soit bien connu, soit à peu près évident. Il est cependant nécessaire pour la suite.

Dans ce paragraphe, C est un sous-semi-groupe fermé de G tel que 1 appartienne à l'adhérence de l'intérieur $\mathring{C}$ de C, et π est une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ telle que $\pi(1) = 1$. Pour toute mesure μ sur G dont le support est contenu dans C et telle que

$$\int \|\pi(g)\| \, d|\mu|(g) < \infty \tag{3}$$

on pose $\pi(\mu) = \int \pi(g) \, d\mu(g)$. C'est un opérateur borné dans $\mathcal{H}$

et l'on a $\|\pi(\mu)\| \leqslant \int \|\pi(g)\| \, d|\mu|(g)$. Rappelons que la mesure de Haar à droite nous permet d'identifier les fonctions localement sommables avec des mesures, de sorte que, par exemple, $\pi(f)$ est défini pour toutes les fonctions continues sur G à support compact contenu dans C.

Comme 1 est dans l'adhérence de $\mathring{C}$, on peut choisir une approximation de la mesure de Dirac par des éléments de $\mathcal{D}(G)$ à support dans $\mathring{C}$, de sorte que l'espace engendré par les $\pi(f)\,h$, où $f \in \mathcal{D}(G)$ est à support dans $\mathring{C}$ et $h \in \mathcal{H}$, est dense dans $\mathcal{H}$. Nous noterons $\mathcal{D}(\mathring{C})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{D}(G)$ à support dans C, et $\mathcal{H}^g$ (g pour Garding) le sous-espace de $\mathcal{H}$ juste décrit.

Soit U une distribution à support compact sur G dont le support est contenu dans C. On définit un opérateur $\pi_2(U)$ dans $\mathcal{H}$: le domaine de définition $\operatorname{dom} \pi_2(U)$ est l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels qu'il existe $k \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait $\pi(f)\,k = \pi(f * U)\,h$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$. En faisant tendre f vers la mesure de Dirac, on voit que k est uniquement déterminé, et l'on pose $\pi_2(U)\,h = k$. Par définition, on a donc la formule

$$\pi(f)\,\pi_2(U)\,h = \pi(f * U)\,h \tag{4}$$

pour tout $h \in \operatorname{dom} \pi_2(U)$ et $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$. Il est évident que $\pi_2(U)$ est un opérateur fermé. D'autre part $\operatorname{dom} \pi_2(U)$ contient $\mathcal{H}^g$. En effet, si $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$ et $h \in \mathcal{H}$, pour tout $f' \in \mathcal{D}(\mathring{C})$ on a $\pi(f' * U)\,\pi(f)\,h = \pi(f' * U * f)\,h = \pi(f')\,\pi(U * f)\,h$. On note $\pi_1(U)$ la clôture de la restriction de $\pi_2(U)$ à $\mathcal{H}^g$. On a en particulier

$$\pi_1(U)\,\pi(f)\,h = \pi_1(U * f)\,h \tag{5}$$

pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$.

Lorsque $U * f = f * U$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$, il est facile de voir que $\pi_1(U) = \pi_2(U)$, en utilisant une approximation de la mesure de Dirac. C'est le cas par exemple si G est commutatif. Cependant, si G n'est pas commutatif, en général $\pi_2(U)$ prolonge strictement $\pi_1(U)$.

Exemple. – On suppose que $C = G$, que G est un groupe de Lie (pour simplifier), et que π est la représentation régulière droite de G dans une des espaces $\mathcal{H} = L^p(G)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ ou

$\mathcal{H} = C_0(G)$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, la distribution $h * \check{U}$ est définie. Nous allons montrer que $\operatorname{dom} \pi_2(U)$ est l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels que $h * \check{U} \in \mathcal{H}$, et que si $h \in \operatorname{dom} \pi_2(U)$, on a $\pi_2(U)\, h = h * \check{U}$. En effet, soit $h \in \operatorname{dom} \pi_2(U)$. Posons $k = \pi_2(U)\, h$. Il résulte de (4) que pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$ on a $k * \check{f} = h * (\check{U} * \check{f})$. Il en résulte que $k = h * \check{U}$ et donc que $h * \check{U}$ appartient à $\mathcal{H}$. La réciproque se démontre de manière analogue.

L'espace $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{H}$, et contenu dans $\operatorname{dom} \pi_2(U)$. Nous allons montrer que $\pi_1(U)$ est la clôture de l'opérateur $f \longrightarrow f * \check{U}$, défini dans $\mathcal{D}(G)$. Notons A la clôture de cet opérateur. Le domaine de A contient en particulier les éléments de la forme $\pi(f)\, f' = f' * \check{f}$, où $f, f' \in \mathcal{D}(D)$. Comme A est fermé, il contient $\operatorname{dom} \pi_1(U)$. L'inclusion opposée résulte du lemme suivant.

LEMME 7. – *On suppose que* G *est un groupe de Lie. Soit* π *une représentation fortement continue de* G. *Le domaine de* $\pi_1(U)$ *contient le sous-espace* $\mathcal{H}^\infty$ *des vecteurs différentiables de* π. *(Donc* $\pi_1(U)$ *est la clôture de la restriction de* $\pi_2(U)$ *à* $\mathcal{H}^\infty$.*)*

Démonstration. – Si $q \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{D}^q(G)$ l'espace des fonctions de classe C^q à support compact sur G. Il existe un entier q tel que $U * f$ soit continue pour tout $f \in \mathcal{D}^q(G)$. Soit $f \in \mathcal{D}^q(G)$ et soit $h \in \mathcal{H}$. On a $\pi(f)\, h \in \operatorname{dom} \pi_1(U)$. En effet, soit $f_i \in \mathcal{D}(G)$ tendant vers la mesure de Dirac. Les vecteurs $\pi(f * f_i)\, h = \pi(f)\, \pi(f_i)\, h$ tendent vers $\pi(f)\, h$, et les vecteurs

$$\pi_1(U)\, \pi(f * f_i)\, h = \pi(U * f * f_i)\, h = \pi(U * f)\, \pi(f_i)\, h$$

tendent vers $\pi(U * f)\, h$. Il suffit pour prouver le lemme de démontrer que tout élément $k \in \mathcal{H}^\infty$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $\pi(f)\, h$ avec $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}^q(G)$. On sait ([2] p. 250) qu'il existe $f \in \mathcal{D}^q(G)$, et une distribution D de support $\{1\}$ telles que $f * D = \delta + f'$, avec $f' \in \mathcal{D}(G)$. On a donc

$$k = \pi(\delta)\, k = \pi(f * D)\, h - \pi(f')\, h = \pi(f)\, \pi_2(D)\, h - \pi(f')\, h.$$

LEMME 8. – *Soit* π *une représentation unitaire de* G, *fortement continue, dans un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. *On a* $\pi_1(U)^* = \pi_2(U^*)$ *et* $\pi_2(U)^* = \pi_1(U^*)$.

Démonstration. – Il suffit de démontrer la première égalité. Soit $h \in \operatorname{dom} \pi_2(\mathrm{U}^*)$ et soit $k = \pi_2(\mathrm{U}^*)h$. Pour tout $y \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, on a $(\pi_1(\mathrm{U})\,\pi(f)y, h) = (\pi(\mathrm{U} * f)y, h) = (y, \pi(\mathrm{U} * f)^* h)$ $= (y, \pi(f^* * \mathrm{U}^*)h) = (y, \pi(f^*)k) = (y, \pi(f)^* k) = (\pi(f)y, k)$. Il en résulte que si $x \in \operatorname{dom} \pi_1(\mathrm{U})$, on a $(\pi_1(\mathrm{U})x, h) = (x, k)$, et donc que $h \in \operatorname{dom} \pi_1(\mathrm{U})^*$ et $\pi_1(\mathrm{U})^* h = k$.

Soit $h \in \operatorname{dom} \pi_1(\mathrm{U})^*$ et $k = \pi_1(\mathrm{U})^* h$. Pour tout $y \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, on a $(\pi_1(\mathrm{U})\,\pi(f)y, h) = (\pi(f)y, k)$. Comme plus haut, on en déduit $(y, \pi(f^* * \mathrm{U}^*)h) = (y, \pi(f^*)k)$, et donc $\pi(f^* * \mathrm{U}^*)h = \pi(f^*)k$, ce qui prouve que $h \in \operatorname{dom} \pi_2(\mathrm{U}^*)$ et que $\pi_2(\mathrm{U}^*)h = k$.

8. Un lemme.

Dans ce paragraphe T est une distribution χ-dissipative *à support compact*, C est un sous-semi-groupe fermé de G tel que 1 soit adhérent à $\mathring{\mathrm{C}}$, et qui contient le support du semi-groupe de mesures $\{\mu_t\}$ engendré par T, π est une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ telle que $\pi(1) = 1$.

LEMME 9. – *On suppose que l'on a*

$$\sup_{t \in [0,1]} \int \|\pi(g)\|\, d|\mu_t|(g) < \infty .$$

Pour tout $t \geqslant 0$, *on a* $\int \|\pi(g)\|\, d|\mu_t|\,(g) < \infty$. *L'application* $t \longmapsto \pi(\mu_t)$ $(t \geqslant 0)$ *est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans* $\mathcal{H}$. *On note* A *son générateur infinitésimal, i.e. la limite forte pour* $t \longrightarrow 0$ *de* $t^{-1}(\pi(\mu_t) - \pi(\chi))$. *On a* $\pi_1(\mathrm{T}) \subset \mathrm{A} \subset \pi_2(\mathrm{T})$.

Démonstration. – Les raisonnements qui suivent sont classiques. Tout d'abord, on a $|\mu_t| * |\mu_{t'}| \geqslant |\mu_{t+t'}|$ pour tout $t, t' \geqslant 0$, de sorte que, si l'on pose $c_t = \int \|\pi(g)\|\, d|\mu_t|\,(g)$, on a $c_{t+t'} \leqslant c_t\, c_{t'}$. Il résulte de l'hypothèse que c_t est localement bornée sur $[0, \infty[$. Il est clair que $\pi(\mu_t)$ est un semi-groupe d'opérateurs bornés.

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$. Nous avons vu dans la dernière partie de la démonstration de la proposition 4 que $t^{-1}(\check{f} * \check{\mu}_t - \check{f} * \check{\chi})$

tend uniformément vers 0 quant $t \longrightarrow 0$. Il en est de même de $t^{-1}(\check{f} * \check{\mu}_{t+s} - \check{f} * \check{\mu}_s)$ pour tout $s \geqslant 0$. Pour toute fonction continue à support compact f' sur G on a donc

$$\langle \mu_s * f - \chi * f, f' \rangle = \int_0^s \frac{d}{dt} \langle \mu_t * f, f' \rangle \, dt = \int_0^s \langle \mu_t * \mathrm{T} * f, f' \rangle \, dt.$$

Notons γ_s la mesure définie par l'intégrale faible $\nu_s = \int_0^s \mu_t \, dt$.

Il est facile de voir que si φ est une fonction borélienne sur C majorée par un multiple de $\|\pi(g)\|$, alors φ est intégrable pour ν_s et $\langle \nu_s, \varphi \rangle = \int_0^s \langle \mu_t, \varphi \rangle \, dt$. Il résulte de tout ceci que l'on a

$$\pi(\mu_s)\, \pi(f) - \pi(\chi)\, \pi(f) = \pi(\nu_s)\, \pi(\mathrm{T} * f) \quad \text{pour tout } s \geqslant 0. \quad (6)$$

Il résulte de l'hypothèse que $\|\pi(\nu_s)\| = 0(s)$ quand $s \longrightarrow 0$, et donc que $\|\pi(\mu_s)\, \pi(f) h - \pi(\chi)\, \pi(f) h\| = 0(s)$ quand $s \longrightarrow 0$. Comme les vecteurs de la forme $\pi(f) h$ sont denses dans $\mathcal{H}$, et comme $\|\pi(\mu_s)\|$ est localement bornée dans $[0, \infty[$, le semi-groupe $\{\pi(\mu_s)\}$ est fortement continu.

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$. Calculons

$$\epsilon(s) = \pi(\mu_s)\, \pi(f) h - \pi(\chi)\, \pi(f) h - s\, \pi(\mathrm{T} * f) h.$$

On a $$\epsilon(s) = \int_0^s (\pi(\mu_t)\, (\mathrm{T} * f) h - \pi(\chi)\, \pi(\mathrm{T} * f) h)\, dt$$

et donc $$\|\epsilon(s)\| \leqslant \int_0^s \|\pi(\mu_t) k - \pi(\chi) k\| \, dt,$$

où l'on a posé $k = \pi(\mathrm{T} * f) h$. Comme on a $\|\pi(\mu_t) k - \pi(\chi) k\| = \mathrm{o}(1)$ d'après ce qui précède, on a $\epsilon(s) = \mathrm{o}(s)$. Ceci démontre que l'on a $\pi_1(\mathrm{T}) \subset \mathrm{A}$.

Soit $\mathcal{H}'$ l'espace de Banach dual de $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{H}^*$ le sous-espace fermé de $\mathcal{H}'$ engendré par les éléments de la forme ${}^t\pi(f) u$ où $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$, $u \in \mathcal{H}'$, et ${}^t.$ désigne le transposé d'un opérateur. L'application $c \longrightarrow {}^t\pi(c)$ induit dans $\mathcal{H}^*$ une représentation fortement continue du semi-groupe C_0 opposé à C. Si $h \in \mathcal{H}$ vérifie $\langle {}^t\pi(f) u, h \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$ et tout $u \in \mathcal{H}'$, on a $\langle u, \pi(f) h \rangle = 0$, et donc $\pi(f) h = 0$, d'après le théorème d'Hahn-Banach. Il en résulte que $h = 0$.

Soit $h \in \operatorname{dom} \mathrm{A}$ et soit $k = \mathrm{A}h$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$. Pour démontrer que $\mathrm{A} \subset \pi_2(\mathrm{T})$, nous devons montrer que $\pi(f) k = \pi(f * \mathrm{T}) h$.

Il suffit pour cela de montrer que pour tout $u \in \mathcal{H}^*$ on a $\langle u, \pi(f)k\rangle = \langle u, \pi(f * \mathrm{T})h\rangle$. On a

$$\langle u, \pi(f)k\rangle = \lim_{t\to 0} t^{-1}\langle u, \pi(f)\,(\pi(\mu_t) - \pi(\chi))h\rangle$$
$$= \lim_{t\to 0} t^{-1}\langle ({}^t\pi(\mu_t) - {}^t\pi(\chi))\,{}^t\pi(f)u, h\rangle.$$

Appliquons à la représentation $c \longrightarrow {}^t\pi(c)$ de C_0 dans $\mathcal{H}^*$ l'inclusion $\mathrm{A} \supset \pi_1(\mathrm{T})$. On trouve

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}({}^t\pi(\mu_t) - {}^t\pi(\chi))\,{}^t\pi(f)u = {}^t\pi(f * \mathrm{T})u.$$

On obtient donc $\langle u, \pi(f)k\rangle = \langle u, \pi(f * \mathrm{T})h\rangle$.

9. Majoration du semi-groupe de mesures engendré par un laplacien généralisé à support compact.

Dans ce paragraphe, χ est la fonction caractéristique de K, T un χ-laplacien généralisé à support compact, φ un poids sur G, c'est-à-dire une fonction borélienne, telle que $\varphi(gg') \leqslant \varphi(g)\,\varphi(g')$ pour tout $g, g' \in \mathrm{G}$. Pour tout entier $m \geqslant 1$, on pose $\varphi_m = \inf(\varphi, m)$. Il est facile de voir que φ_m est un poids. On note $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures positives engendré par T.

LEMME 10. – *Soit* $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, $f \geqslant 0, f \neq 0$. *Il existe une constante* $a > 0$ *telle que* $\varphi_m \leqslant a\,\varphi_m * f$ *pour tout* $m \geqslant 1$.

Démonstration. – On a $\varphi_m * f(x) = \int \varphi_m(xy^{-1})\,f(y)\,dy$. On a $\varphi_m(x) = \varphi_m(xy^{-1}y) \leqslant \varphi_m(xy^{-1})\,\varphi_m(y)$ et donc

$$\varphi_m(xy^{-1}) \geqslant \varphi_m(x)\,\varphi_m(y)^{-1} \geqslant \varphi_m(x)\,\varphi(y)^{-1}.$$

On a $\varphi_m * f(x) \geqslant \varphi_m(x) \int \varphi(y)^{-1} f(y)\,dy$, ce qui prouve l'inégalité.

LEMME 11. – *Pour toute fonction* ψ *uniformément continue à gauche bornée sur* G *et tout* $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, *la fonction* $t \longrightarrow \langle \psi * f, \mu_t\rangle$ *est dérivable, et l'on a* $\dfrac{d}{dt}\langle \psi * f, \mu_t\rangle = \langle \psi * f * \check{\mathrm{T}}, \mu_t\rangle$ *pour tout* $t \geqslant 0$.

Démonstration. – On note π la représentation régulière droite de G dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions uniformément continues à gauche, bornées sur G, muni de la norme uniforme. Elle est fortement continue. L'inclusion $\pi_1(\mathrm{T}) \subset \mathrm{A}$ du lemme 9 entraîne que dans $\mathcal{H}$ on a $\frac{d}{dt}\, \psi * f * \check{\mu}_t = \psi * f * \check{\mathrm{T}} * \check{\mu}_t$, ce qui entraîne le lemme.

LEMME 12. – *On a* $\sup_{t \in [0,1]} \int \varphi(g)\, d\mu_t(g) < \infty$.

Démonstration. – On fixe $f \neq 0$, $f \geqslant 0$, $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$. Pour $t \geqslant 0$, on pose $h_m(t) = \langle \varphi_m * f, \mu_t \rangle$. On a d'après le lemme 11, en posant $k = f * \check{\mathrm{T}}$, $h'_m(t) = \langle \varphi_m * k, \mu_t \rangle$, et donc

$$h'_m(t) \leqslant |h'_m(t)| \leqslant \iint \varphi_m(xy^{-1})\, |k(y)|\, d\mu_t(x)\, dy \leqslant b \langle \varphi_m, \mu_t \rangle,$$

où l'on a posé $b = \int \varphi(y^{-1})\, |k(y)|\, dy$. Il résulte du lemme 10 que l'on a $h'_m(t) \leqslant ab\, h_m(t)$. On a donc $h_m(t) \leqslant e^{\mathrm{tab}}\, h_m(0)$. Posons $h(t) = \langle \varphi * f, \mu_t \rangle$. On a $h(t) = \lim_{m \to \infty} h_m(t)$ et donc $h(t) \leqslant e^{\mathrm{tab}}\, h(0)$. On déduit du lemme 10 que l'on a $\langle \varphi, \mu_t \rangle \leqslant c\, e^{\mathrm{tab}}$ pour tout $t \geqslant 0$, où $c = a\, h(0) = a \int \varphi(ky^{-1})\, f(y)\, dy$.

Remarque. – La démonstration du lemme est adaptée de [10], paragraphe 4.

LEMME 13. – *Soit* V *un voisinage de* K. *On a*

$$\int_{\mathrm{G}-\mathrm{V}} \varphi(g)\, d\mu_t(g) = \mathrm{o}(1) \quad \textit{quand} \quad t \longrightarrow 0.$$

Démonstration. – Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions continues ψ sur G telles que $\sup_{x \in \mathrm{G}} |\psi(x)|\, \varphi(x)^{-1} < \infty$, et

$$\lim_{y \to 1} \sup_{x \in \mathrm{G}} |\psi(xy) - \psi(x)|\, \varphi(x)^{-1} = 0.$$

Muni de la norme $\|\psi\| = \sup |\psi(x)|\, \varphi(x)^{-1}$ c'est un espace de Banach. Les translations à droite y induisent une représentation fortement continue π de G, et on a $\|\pi(x)\| \leqslant \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathrm{G})$, $f \neq 0$, $f \geqslant 0$. Posons $\psi = (\varphi\theta) * f$, où θ est la fonction caractéristique de $\mathrm{G} - \mathrm{V}$. On a $\psi \in \mathcal{H}$. On choisit

le support de f assez petit, pour que le support de ψ soit contenu dans le complémentaire de K. D'autre part, un raisonnement analogue à celui du lemme 10 montre qu'il suffit de démontrer que l'on a $\langle \psi, \mu_t \rangle = o(1)$. Le lemme 12 montre que les hypothèses du lemme 9 sont vérifiées. Lorsque $t \longrightarrow 0$, $\pi(\mu_t)\psi$ tend dans $\mathcal{H}$ vers $\pi(\chi)\psi$. En particulier, en considérant les valeurs à l'origine, $\langle \psi, \mu_t \rangle$ tend vers $\langle \psi, \chi \rangle = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

La proposition ci-dessous donne notre majoration de μ_t. On remarquera d'autre part qu'en utilisant des processus de Markov on peut obtenir de meilleurs résultats (cf. [4] proposition 5 et [1]).

PROPOSITION 14. – *Soit* T *un* χ*-laplacien généralisé sur* G *à support compact, et soit* $\{\mu_t\}$ *le semi-groupe de mesures positives qu'il engendre. Soit* V *un voisinage du support de* T *tel que* $1 \in V$ et $V^{-1} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$. *Pour tout entier* $n \geqslant 1$ *et tout* $k \geqslant 1$, *il existe une constante* $d > 0$ *telle que* $\mu_t(G - V^p) \leqslant d t^{n+1} k^{-p}$ *pour tout* $p \geqslant n$ *et tout* $1 \geqslant t \geqslant 0$.

Démonstration. – Soit φ un poids sur G. Nous allons montrer pour commencer que, étant donné $n \geqslant 1$, on a

$$\int_{G-V^n} \varphi(g)\, d\mu_t(g) = O(t^{n+1}). \tag{7}$$

Nous employons les notations $\mathcal{H}$ et π de la démonstration du lemme 9. Nous choisissons un voisinage W du support de T et un voisinage U de 1 tels que $WU \subset V$. Soit θ la fonction caractéristique de W^n. Soit $f \in \mathcal{D}(G)$, $f \geqslant 0$, $f \neq 0$, à support dans U. Soit $x \in G - V$. On a $x \in G - WU$, et donc

$$(\varphi\theta) * f(x) = \int \varphi(xy^{-1})\, \theta(xy^{-1})\, f(y)\, dy \geqslant \varphi(x) \int \varphi(y)^{-1} f(y)\, dy$$

(cf. la démonstration du lemme 10). Il suffit donc de démontrer $\langle (\varphi\theta) * f, \mu_t \rangle = O(t^{n+1})$. Soit U' un voisinage de 0 tel que $U'^2 \subset U$, et soit $f' \in \mathcal{D}(G)$, $f' \neq 0$, $f' \geqslant 0$. Ce qui précède s'applique à $f = f' * f'$. On pose $\psi = (\varphi\theta) * f'$. C'est un élément de $\mathcal{H}$. On a $\psi * f' = \pi(\check{f}')\psi$. Le lemme 12 permet d'utiliser le lemme 9. Il résulte de l'inclusion $\pi_1(T) \subset A$ du lemme 9 que la fonction $t \longrightarrow \pi(\mu_t)\pi(\check{f}')\psi$ (à valeurs dans $\mathcal{H}$) est dérivable de dérivée $t \longrightarrow \pi(\mu_t)\pi(T * \check{f}')\psi$. Le même raisonnement montre qu'elle

est q fois dérivable, de dérivée $q^{\text{ième}}$ $t \longmapsto \pi(\mu_t)\,\pi(\mathrm{T}^q * \check{f}')\,\psi$ pour tout entier $q \geqslant 1$. Evaluons les éléments de $\mathcal{H}$ en 1. La fonction $t \longmapsto \langle \psi * f', \mu_t \rangle$ est q fois dérivable, et sa dérivée $q^{\text{ième}}$ est $t \longmapsto \langle \psi * f' * \check{\mathrm{T}}^q, \mu_t \rangle$. En particulier, la dérivée $q^{\text{ième}}$ à l'origine est $\langle \psi * f' * \check{\mathrm{T}}^q, \chi \rangle = \langle \psi * f', \mathrm{T}^q \rangle$. Si le support de f' est assez petit, ce que nous supposons, ces dérivées sont nulles pour $q = 0, 1, \ldots, n$. La formule de Taylor montre que l'on a $\langle \psi * f', \mu_t \rangle = \mathrm{O}(t^{n+1})$, ce qui prouve (7).

Posons $\mathrm{G}' = \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathrm{V}^q$. C'est un sous-groupe ouvert, et donc fermé, de G et il résulte de la proposition 4 que le support de $\{\mu_t\}$ est contenu dans G'. On peut donc supposer que $\mathrm{G} = \mathrm{G}'$. Pour tout $x \in \mathrm{G}$, on note $\tau(x)$ le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que $x \in \mathrm{V}^m$. Soit $k \geqslant 1$. La fonction φ définie par $\varphi(x) = k^{\tau(x)}$ est un poids sur G, et l'on a $\varphi(x) = k^{m+1}$ si $x \in \mathrm{V}^{m+1} - \mathrm{V}^m$. Posons $c_q = \mu_t(\mathrm{G} - \mathrm{V}^q)$ de sorte que $\mu_t(\mathrm{V}^{q+1} - \mathrm{V}^q) = c_q - c_{q+1}$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{G}-\mathrm{V}^n} \varphi(x)\, d\mu_t(x) &= k^{n+1}(c_n - c_{n+1}) + k^{n+2}(c_{n+1} - c_{n+2}) + \ldots \\ &= k^{n+1} c_n + c_{n+1}(k^{n+2} - k^{n+1}) + \ldots \\ &= k^{n+1} c_n + (k-1)(c_{n+1} k^{n+1} + c_{n+2} + \ldots).\end{aligned}$$

Il existe d'après (7) une constante $a > 0$ telle que la somme de cette série soit majorée par $a\, t^{n+1}$ pour tout $t \leqslant 1$. Il en est de même de chacun des termes de la série, ce qui donne $c_p \leqslant (k-1)^{-1}\, a\, t^{n+1}\, k^{-p}$ pour tout $p \geqslant n$ si $t \leqslant 1$.

10. L'équation $\psi * \check{\mathrm{T}} = \lambda \psi * \check{\chi}$.

Dans ce paragraphe, T est une distribution χ-dissipative à support compact sur G et φ un poids sur G. On note $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré par T. On pose $c_t = \int \varphi(g)\, d\,|\mu_t|(g)$. On suppose que G est limite projective de groupes de Lie.

LEMME 15. – *On a* $c_t < \infty$ *et* $c_{t+t'} \leqslant c_t\, c_{t'}$ *pour tout* $t, t' \in [0, \infty[$. *Il existe* $\omega \geqslant 0$ *tel que* $\lim_{t \to \infty} t^{-1} \log c_t = \omega$. *De plus* c_t *est borné dans* $[0, 1]$.

Démonstration. – Soit U un χ'-laplacien généralisé sur $\mathbf{T} \times G$, à support compact, tel que $U(Zf) = T(f)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$ (proposition 5). Soit $\{\nu_t\}$ le semi-groupe de mesures qu'il engendre, de sorte que $\gamma_t(Zf) = \mu_t(f)$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in \mathcal{D}(G)$. On a

$$c_t \leqslant \int_{\mathbf{T}\times G} \varphi(g)\, d\nu_t(z, g),$$

et cette intégrale est finie et bornée dans $[0, 1]$ d'après le lemme 12. La seconde assertion du lemme est évidente, et la troisième résulte de [8] th. 7.6.1.

Soit C un sous-semi-groupe fermé de G contenant le support de $\{\mu_t\}$ et tel que 1 soit adhérent à $\mathring{C}$.

LEMME 16. – *Soit ψ une fonction borélienne localement sommable sur* G, *majorée en module par φ. Soit $\lambda > \omega$. On suppose que pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$ on a $\langle \psi, (T - \lambda\chi) * f\rangle = 0$ (resp. $\langle \psi, f * (T - \lambda\chi)\rangle = 0$). Alors $\check{\chi} * \psi = 0$ (resp. $\psi * \check{\chi} = 0$) dans $\mathring{C}$.*

Démonstration. – Nous démontrerons le seconde assertion. (La démonstration de la première est analogue).

Soit $t \geqslant 0$ et soit $f \in \mathcal{D}(G)$. Posons $\theta = \widetilde{f} * \varphi * \check{\mu}_t$. Il existe $c > 0$ tel que $|\theta| \leqslant c\varphi$ et θ est régulière. Soit U la distribution sur $\mathbf{T} \times G$ définie dans la démonstration du lemme 10, et soit V un voisinage de 1 dans G tel que $V = V^{-1}$ et tel que $\mathbf{T} \times V$ soit un voisinage du support de U. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$ une fonction égale à 1 dans un voisinage de V. Posons $\theta_1 = \alpha\theta$ et $\theta_2 = (1 - \alpha)\theta$. Comme $\theta_1 \in \mathcal{D}(G)$, on a $\lim_{u\to 0} u^{-1} \langle \theta_1, \mu_u - \chi\rangle = \langle \theta_1, T\rangle = \langle \theta, T\rangle$. D'autre part, $|\langle \theta_2, \mu_u - \chi\rangle| = |\langle \theta_2, \mu_u\rangle| \leqslant c \int_{G-V} \varphi(g)\, d|\mu_u|(g)$ $\leqslant c \int_{\mathbf{T}\times G - \mathbf{T}\times V} \varphi(g)\, d\nu_u(z, g)$ (où ν_u est défini comme dans la démonstration du lemme 15. Il résulte de (7) que l'on a $\langle \theta_2, \mu_u - \chi\rangle = o(u)$. Nous avons donc démontré que $\lim_{u\to 0} u^{-1} \langle \theta, \mu_u - \chi\rangle = \langle \theta, T\rangle$.

Posons $h(t) = \langle \varphi, f * \mu_t\rangle$ pour tout $t \geqslant 0$. On a

$$h(t + u) - h(t) = \langle \widetilde{f} * \psi, \mu_{t+u} - \mu_t\rangle = \langle \theta, \mu_u - \chi\rangle$$

si $u \geqslant 0$. Il en résulte que h est dérivable à droite, et qu'en notant h' la dérivée à droite, on a $h'(t) = \langle \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_t, T\rangle$. En calculant

formellement, on trouve $h'(t) = \langle \tilde{f} * \psi, \mathrm{T} * \mu_t \rangle = \langle \tilde{f} * \psi, \mu_t * \mathrm{T} \rangle$, ou encore :

$$h'(t) = \langle \tilde{f} * \psi * \check{\mathrm{T}}, \mu_t \rangle. \tag{8}$$

Nous justifierons cette formule plus bas. (A priori, il n'est même pas évident que $\tilde{f} * \varphi * \check{\mathrm{T}}$ soit μ_t-intégrable).

De l'égalité $\langle \psi, f * f'' * (\mathrm{T} - \lambda\chi) \rangle = 0$ pour tout $f, f'' \in \mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$ (qui est vérifiée par hypothèse), on déduit

$$\langle \tilde{f} * \psi * \check{\mathrm{T}}, f'' \rangle = \lambda \langle \tilde{f} * \psi * \check{\chi}, f'' \rangle$$

de sorte que les fonctions $\tilde{f} * \psi * \check{\mathrm{T}}$ et $\lambda \tilde{f} * \psi * \check{\chi}$ (qui sont des fonctions régulières sur G) coïncident dans $\mathring{\mathrm{C}}$, et donc dans C. Donc $\langle \tilde{f} * \psi * \mathrm{T}, \mu_t \rangle = \lambda \langle \tilde{f} * \psi, \mu_t \rangle$. Donc $h'(t) = \lambda h(t)$, ce qui donne $h(t) = e^{t\lambda} \langle \varphi, f * \chi \rangle$. Comme d'autre part on a $|h(t)| \leqslant c\, c_t$, et comme $\lambda > \omega$, en regardant le comportement de $h(t)$ au voisinage de l'infini on obtient $\langle \psi, f * \chi \rangle = 0$. Comme f est arbitraire dans $\mathcal{D}(\mathring{\mathrm{C}})$, on en déduit que $\psi * \check{\chi}$ s'annule dans $\mathring{\mathrm{C}}$.

Il reste à prouver la formule (8). Appliquons l'égalité $h'(t) = \tilde{f} * \psi * \check{\mu}_t$ aux translatées de f. On obtient que pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\frac{d}{dt} \tilde{f} * \psi * \check{\mu}_t(g) = \tilde{f} * \psi * \check{\mu}_t * \check{\mathrm{T}}(g)$. D'autre part,

$$h'(t) = \lim_{u \to 0} u^{-1} \langle \tilde{f} * \psi, \mu_{t+u} - \mu_t \rangle = \lim_{u \to 0} u^{-1} \langle \tilde{f} * \psi * (\check{\mu}_u - \check{\chi}), \mu_t \rangle.$$

Le théorème de convergence dominée montre que pour prouver (8), il suffit de montrer que pour $u \in [0,1]$ la fonction $u^{-1} \tilde{f} * \psi * (\check{\mu}_u - \check{\chi})$ est majorée en valeur absolue par une fonction fixe μ_t-intégrable. D'après ce qui précède, pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\tilde{f} * \psi * (\check{\mu}_u - \check{\chi})(g) = \int_0^u \tilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}(g)\, ds.$$

Il nous suffit donc de montrer que pour $s \in [0,1]$ la fonction $\tilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}$ est majorée par une fonction fixe μ_t-intégrable.

Comme G est supposé limite projective de groupes de Lie, il existe, par définition des fonctions régulières, un sous-groupe compact invariant L tel que f soit invariante par L. Notons ξ la mesure de Haar sur L. On identifie les distributions η sur G vérifiant $\eta * \xi = \eta$ et les distributions sur le groupe $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{L}$. Posons $\mathrm{T}' = \mathrm{T} * \xi$. Il existe des mesures ν_i à support compact sur G' et des distributions u_i de support $\{1\}$ sur G' telles que $\check{\mathrm{T}}' = \Sigma\, \nu_i * u_i$. On identifie les distributions de support $\{1\}$ dans G' et l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}$ de la complexifiée de l'algèbre de

Lie de G'. On choisit un entier $m \geqslant 0$ tel que tous les u_i soient de degré $\leqslant m$, et on choisit une base w_j du sous-espace $\mathfrak{U}_m$ des éléments de $\mathfrak{U}$ de degré $\leqslant m$. Le groupe G (ou G') agit dans $\mathfrak{U}_m$ par la représentation adjointe. On pose $g\,u_i = \Sigma\, \alpha_{ij}(g) w_j$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Il existe un poids γ sur G qui majore en valeur absolue toutes les fonctions α_{ij}.

On a $\widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}(g) = \Sigma\, \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i * u_i(g)$
$= \Sigma\, (gu_i) * \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i(g) = \Sigma\, \alpha_{ij}(g)\, w_j * \widetilde{f} * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i(g)$.

Il résulte du lemme 12 que chacune des fonctions $(w_j * \widetilde{f}) * \psi * \check{\mu}_s * \nu_i$ est majorée sur G en valeur absolue par un multiple de φ indépendant de $s \in [0,1]$. La fonction $f * \psi * \check{\mu}_s * \check{\mathrm{T}}$ est majorée en valeur absolue par un multiple du poids $\gamma\varphi$, indépendant de $s \in [0,1]$. Le poids $\gamma\varphi$ est μ_t-intégrable d'après le lemme 15 appliqué au poids $\gamma\varphi$.

Le lemme 16, appliqué à $\mathrm{C} = \mathrm{G}$, donne le résultat suivant.

PROPOSITION 17. – *Soient ψ une fonction borélienne localement sommable sur G majorée en module par un multiple de φ, et $\lambda > \omega$. On suppose que l'on a $\psi * \check{\mathrm{T}} = \lambda\psi * \check{\chi}$. Alors $\psi * \check{\chi} = 0$.*

11. Image d'un semi-groupe de mesure par une représentation.

Dans ce paragraphe, T est une distribution χ-dissipative, $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures qu'elle engendre, C un sous-semi-groupe fermé de G contenant le support de $\{\mu_t\}$, π une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$ telle que $\pi(1) = 1$. On suppose qu'il existe un voisinage compact V de K tel que

$$\int_{\mathrm{C}-\mathrm{V}} \|\pi(c)\|\, d\,|\mathrm{T}|\,(c) < \infty \tag{9}$$

(Rappelons que dans $\mathrm{G} - \mathrm{V}$ la distribution T est une mesure d'après le lemme 1).

PROPOSITION 18. – *La fonction $t \longmapsto \int \|\pi(c)\|\, d\,|\mu_t|\,(c)$ est localement bornée sur $[0, \infty[$. Pour tout $t \geqslant 0$ $\pi(\mu_t)$ est un opérateur borné dans $\mathcal{H}$, et $\{\pi(\mu_t)\}$ est un semi-groupe fortement continu.*

Démonstration. – Supposons pour commencer que T soit à support compact. Soit, comme dans la proposition 5, U un χ'-laplacien généralisé à support compact sur $\mathbf{T} \times G$ tel que $T(f) = U(Zf)$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G, \check{\chi})$. Soit $\{\nu_t\}$ le semi-groupe de mesures positives sur $\mathbf{T} \times G$ engendré par U, de sorte que l'on a $\langle \mu_t, f \rangle = \langle \nu_t, Zf \rangle$ pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$.

Soit W un ouvert relativement compact de G contenant 1, contenant le support de T et tel que $W = W^{-1}$. Posons $G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$. C'est un sous-groupe ouvert, et donc fermé, de G qui, d'après la proposition 4, contient le support de $\{\mu_t\}$. On peut donc, pour démontrer la proposition, supposer que $G = G'$. On définit pour tout $x \in G$ le nombre $\tau(x)$ qui est le plus petit des entiers $n \geqslant 1$ tels que $x \in W^n$. On note d un majorant de $\|\pi(c)\|$ lorsque c parcourt $W \cap C$. On pose $\varphi(x) = d^{\tau(x)}$. Alors φ est un poids sur G, et l'on a $\|\pi(c)\| \leqslant \varphi(c)$ pour tout $c \in C$. Soit V un voisinage de K. L'ensemble $\mathbf{T} \times V$ est un voisinage de K'. Il résulte du lemme 13 que l'on a, en posant $X = \mathbf{T} \times G - \mathbf{T} \times V$, $\int_X \varphi(g)\, d\nu_t(z, g) = o(1)$. On a donc $\int_{G-V} \varphi(g)\, d|\mu_t|(g) = o(1)$, ce qui entraîne en particulier la première assertion. Pour démontrer la seconde, il suffit de démontrer que le semi-groupe est faiblement continu. Soient u un élément du dual de $\mathcal{H}$ et $h \in \mathcal{H}$. Posons $\psi(c) = \langle u, \pi(c)h \rangle$ pour tout $c \in C$. Il faut montrer que lorsque $t \longmapsto 0$, $\langle \psi, \mu_t \rangle \longrightarrow \langle \psi, \chi \rangle$. Soit f une fonction continue à support compact sur C égale à 1 dans un voisinage de K. On a $\langle f\psi, \mu_t \rangle \longrightarrow \langle f\psi, \chi \rangle$, car le semi-groupe est vaguement continu. On a $\langle (1-f)\psi, \mu_t \rangle \longrightarrow 0$, d'après ce qui précède. Comme $\langle f\psi, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle$, notre assertion en résulte.

Considérons maintenant le cas général. On peut écrire $T = T_1 + \nu$, où T_1 est une distribution χ-dissipative à support compact telle que $\operatorname{Re} \langle T_1, f \rangle \leqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\check{\chi}, G, \check{\chi})$ telle que $f(1) = \sup_{c \in C} |f(c)|$, et ν une mesure de Radon bornée sur C telle que $\int \|\pi(c)\|\, d|\nu|(c) < \infty$. En effet, soit α une fonction sur G, régulière à support compact, invariante par K à droite et à gauche, égale à 1 dans un voisinage de 1, et telle que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. On peut prendre $T_1 = \alpha T$, et $\nu = T - T_1$. On note $\{\lambda_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré par T_1. Pour tout $n \geqslant 0$ on définit par récurrence

une mesure λ_t^n. On pose $\lambda_t^0 = \lambda_t$, et $\lambda_t^{n+1} = \int_0^t \lambda_{t-u} * \nu * \lambda_u^n \, du$. On a $\mu_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_t^n$. En effet, pour le voir, il suffit de vérifier que les opérateurs $f \longrightarrow f * \check{\mu}_t$ et $f \longrightarrow f * (\Sigma \check{\lambda}_t^n)$ dans $C_0(G)$ sont égaux. Ceci résulte de la formule de perturbation des semi-groupes d'opérateurs donnée dans [8] (13.2.4).

Posons $P_t = \pi(\lambda_t)$ et $B = \pi(\nu)$. D'après ce qui précède, $\{P_t\}$ est un semi-groupe fortement continu. Nous notons A son générateur infinitésimal. D'après [8] th. 13.2.1, $A + B$ est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $\{Q_t\}$, et l'on a $Q_t = \sum_{n=0}^{\infty} P_t^n$, où les opérateurs P_t^n sont définis par récurrence par les formules $P_t^0 = P_t$ et $P_t^{n+1} = \int_0^t P_{t-u} \, B \, P_u^n \, du$. On a donc $Q_t = \pi(\mu_t)$, ce qui termine la démonstration de la proposition.

12. Image d'une distribution dissipative par une représentation.

Dans ce paragraphe, T est une distribution χ-dissipative sur G, $\{\mu_t\}$ le semi-groupe de mesures engendré, C un sous-semi-groupe fermé de G tel que 1 soit adhérent à $\mathring{C}$ et contenant le support de $\{\mu_t\}$, π une représentation fortement continue de C dans un espace de Banach $\mathcal{H}$, telle que $\pi(1) = 1$. On suppose qu'il existe un voisinage compact V de K tel que $\int_{C-V} \|\pi(c)\| \, d|T|(c) < \infty$.

Nous noterons A le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{\pi(\mu_t)\}$ (voir proposition 18). D'autre part, écrivons $T = T_1 + \nu$, où ν est une mesure bornée sur C telle que $\int \|\pi(c)\| \, d|\nu|(c) < \infty$ et où T_1 est à support compact. On pose $\pi_1(T) = \pi_1(T_1) + \pi(\nu)$ et $\pi_2(T) = \pi_2(T_1) + \pi(\nu)$, où $\pi_1(T_1)$ et $\pi_2(T_1)$ sont définis comme dans le paragraphe 6.

THEOREME. — *On a* $\pi_1(T) = A = \pi_2(T)$.

Démonstration. — Soit G_0 un sous-groupe ouvert de G qui soit limite projective de groupes de Lie. Posons $G_1 = \bigcap_{k \in K} k \, G_0 \, k^{-1}$ et $G_2 = K \, G_1$. L'ensemble G_2 est un sous-groupe ouvert de G

limite projective de groupes de Lie. Soit W un voisinage relativement compact de K dans G_2 tel que $W = W^{-1}$. On pose $G' = \bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$. C'est un sous-groupe ouvert de G limite projective de groupes de Lie. On écrit $T = T_1 + \nu$, où ν est une mesure bornée à support dans C, Et T_1 une distribution χ-dissipative à support dans W (voir la démonstration de la proposition 18). Comme dans la démonstration de la proposition 18, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour T_1. Changeant les notations, nous pouvons supposer que G est limite projective de groupes de Lie, et engendré par un voisinage compact de K, et que T est à support compact.

Notons φ un poids sur G tel que $\|\pi(c)\| \leqslant \varphi(c)$ pour tout $c \in C$. On définit ω comme dans le lemme 15. Posons $\mathcal{H}_0 = \pi(\chi)\mathcal{H}$. Soit $\lambda > \omega$. Dans $\mathcal{H}_0$, l'opérateur $A - \lambda$ est inversible, et son inverse est partout défini et borné (cf. [8]). D'après le lemme 9 on a $\pi_1(T) \subset A$. Pour démontrer que $\pi_1(T) = A$ il suffit de montrer que $\pi_1(T - \lambda\chi)$ et $A - \lambda\pi(\chi)$ ont même image. Pour cela il suffit de prouver que $\pi_1(T - \lambda\chi)(\mathcal{H}^g)$ est dense dans $\mathcal{H}_0$ (cf. paragraphe 7). Notons $\mathcal{H}'$ l'espace dual de $\mathcal{H}$. Soit u un élément de $\mathcal{H}'$ nul sur $\pi_1(T - \lambda\chi)(\mathcal{H}^g)$. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$ et $h \in \mathcal{H}$. On a $\langle u, \pi_1(T - \lambda\chi)\,\pi(f)h\rangle = 0$, et donc $\langle u, \pi_1((T - \lambda\chi) * f)h\rangle = 0$. Notons ψ la fonction sur G nulle en dehors de C telle que $\psi(c) = \langle u, \pi(c)h\rangle$ pour tout $c \in C$. On a $\langle \psi, (T - \lambda\chi) * f\rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$. Il résulte du lemme 16 que l'on a $\check{\chi} * \psi = 0$. En particulier, on a $\langle u, \pi(\chi)h\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $h \in \mathcal{H}$, on voit que u s'annule sur $\mathcal{H}_0$. Le théorème de Hahn-Banach montre que $\pi_1(T - \lambda\gamma)(\mathcal{H}^g)$ est dense dans $\mathcal{H}_0$.

D'après le lemme 9, on a $A \subset \pi_2(T)$. Pour démontrer que $\pi_2(T) = A$, il suffit de montrer que $\pi_2(T) - \lambda$ est injectif dans $\mathcal{H}_0$. Soit $h \in \operatorname{dom} \pi_2(T) \cap \mathcal{H}_0$ tel que $\pi_2(T)h = \lambda h$. Pour tout $u \in \mathcal{H}'$ et tout $f \in \mathcal{D}(\mathring{C})$, on a, avec les notations ci-dessus,

$$0 = \langle u, \pi(f)\,\pi_2(T - \lambda\chi)h\rangle = \langle u, \pi(f * (T - \lambda\chi))h\rangle$$
$$= \langle \psi, f * (T - \lambda\chi)\rangle.$$

Il résulte du lemme 16 que l'on a $\psi * \check{\chi} = 0$ et, comme $h \in \mathcal{H}$, que $\psi = 0$, ce qui entraîne $h = 0$.

Exemples. — Dans les exemples, on suppose que G est un groupe de Lie et que $K = \{1\}$.

1) Supposons $G = \mathbf{R}$ et $C = [0, \infty[$. Dans ce cas $\{\pi(t)\}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ et $\{\pi(\mu_t)\}$ le semi-groupe obtenu par subordination. Lorsque $\{\pi(t)\}$ est un semi-groupe de contractions, ces résultats sont très classiques : cf. Phillips [14] et Faraut [5].

2) Supposons que $\mathcal{H}$ soit un des espaces $L^p(G)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ ou $C_0(G)$, muni de la représentation régulière droite. Alors $\pi(\mu_t)h = h * \check{\mu}_t$ pour $h \in \mathcal{H}$, $t \geqslant 0$. Le générateur infinitésimal de $\{\pi(\mu_t)\}$ est égal à la clôture de l'opérateur $f \longmapsto f * \check{T}$ (défini dans $\mathcal{D}(G)$). Il est aussi égal à l'opérateur $h \longmapsto h * \check{T}$ définit dans l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ tels que $h * \check{T} \in \mathcal{H}$. (voir le paragraphe 7).

3) Supposons que $\mathcal{H}$ soit l'espace des fonctions uniformément continues à gauche et bornées sur G. Alors $\pi(\mu_t)h = h * \check{\mu}_t$ pour $h \in \mathcal{H}$, $t \geqslant 0$. Le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{\pi(\mu_t)\}$ est la clôture de l'opérateur $h \longmapsto h * \check{T}$ défini dans l'espace engendré par les $h' * f$ où $h' \in \mathcal{H}$, $f \in \mathcal{D}(G)$. Il est aussi égal à l'opérateur $h \longmapsto h * \check{T}$ défini dans l'espace des $h \in \mathcal{H}$ tels que $h * \check{T} \in \mathcal{H}$.

Les exemples 2 et 3 précisent des résultats de Hunt [11].

4) Supposons que $\mathcal{H}$ soit un espace de Hilbert et que π soit unitaire. L'adjoint de $\pi_1(T)$ est alors $\pi_1(T^*)$ (lemme 8). En particulier, si $T = T^*$, la restriction à $\mathcal{H}^\infty$ de $\pi_1(T)$ est essentiellement self-adjointe.

Par exemple, soient $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{G}$, $Y \in \mathbf{R}X_1 + \ldots + \mathbf{R}X_n$, $X \in \mathfrak{G}$. Soit $T = X_1^2 + \ldots + X_n^2 + iY + X$ (voir paragraphe 2). Alors l'adjoint de $\pi(T)$ (défini dans $\mathcal{H}^\infty$)) est la clôture de $\pi(T - 2X)$ (défini dans $\mathcal{H}^\infty$). En particulier, si $X = 0$, $\pi(T)$ est essentiellement self-adjoint. On retrouve ainsi des résultats de Nelson et Stinespring [13] et Jorgensen [12] cor. 1.1. Notons que ces auteurs utilisent des propriétés d'hypoellipticité de T, ce qui n'est pas le cas dans notre démonstration.

5) Soient $X_1, \ldots, X_n, Y$ et X comme ci-dessus et $T = X_1^2 + \ldots + X_n^2 + iY + X$. Alors la clôture de $\pi(T)$ (défini dans $\mathcal{H}^\infty$) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe d'opérateurs bornés fortement continu. Ce semi-groupe est de la forme

$\pi(\mu_t)$, où μ_t est un semi-groupe de mesures bornées vérifiant, pour tout voisinage V de 1 dans G les majorations de la proposition 14. Pour $Y = 0$, on retrouve encore des résultats de [13] et de [12] th. 3.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT, Behaviour of diffusion semi-groups at infinity, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 102 (1974), 193-240.

[2] P. BERNAT et coll., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris 1972.

[3] F. BRUHAT, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 89 (1961), 43-75.

[4] M. DUFLO, Semi-groups of complex measures on a locally compact group, *Lecture notes,* 466 (1975), 56-64.

[5] J. FARAUT, Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs, *Ann. Inst. Fourier,* 20 (1970), 235-301.

[6] F.P. GREENLEAF, Norm decreasing homomorphisms of group algebras, *Pacific Journal of Math.*, 15 (1965), 1187-1219.

[7] W. HAZOD, Uber die Lévy-Hincin Formel auf lokalkompacten Gruppen, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 25 (1973), 301-322.

[8] E. HILLE and R.S. PHILLIPS, Functional analysis and semi-groups, *Amer. Math. Soc. Colloquium Pubications,* 1957.

[9] F. HIRSCH, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier,* 22, 1 (1972), 89-210.

[10] A. HULANICKI, Subalgebra of $L_1(G)$ associated with laplacian on a Lie group. A paraître.

[11] G.A. HUNT, Semi groups of measures on Lie groups, *Trans. Amer Math. Soc.*, 81 (1956), 264-293.

[12] P.E.T. JØRGENSEN, Representations of differential operators on a Lie group, *Journal of Funct. Analysis,* 20 (1975), 105-135.

[13] E. NELSON and W. STINESPRING, Representation of ellipic operators in an enveloping algebra, *Amer. Journal of Math.*, 81 (1959), 547-560.

[14] R.S. PHILLIPS, On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific Journal of Math.*, 2 (1952), 343-369.

[15] J.P. ROTH, Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues, *Ann. Inst. Fourier*, 26, 4 (1976), 1-97.

Manuscrit reçu le 15 juilet 1977
Proposé par G. Choquet.

Michel DUFLO,
Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, place Jussieu
75221 Paris Cedex 05.