ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL HILSUM

Sur les sous-espaces spectraux d'un opérateur compact relativement à une algèbre de von Neumann

Annales de l'institut Fourier, tome 28, n° 3 (1978), p. 107-111

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_3_107_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 3 (1978), 107-111

SUR LES SOUS-ESPACES SPECTRAUX D'UN OPÉRATEUR COMPACT RELATIVEMENT A UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN

par Michel HILSUM

Introduction.

Soit A une algèbre de von Neumann. On définit les opérateurs compacts de A en prenant l'adhérence normique des opérateurs de rang fini de A.

Soit T un opérateur compact de A. Dans [1], M. Breuer montre que $\ker(1-T)$, et par suite $\ker(1-T)^n$, est fini. Nous nous proposons ici d'étendre cette propriété, en généralisant un résultat classique bien connu :

THEOREME. — $\sup \ker(1-T)^n$ *est fini.*

Ceci répond à une question de M. Breuer dans [1].

Soit (Q_n) une suite orthogonale de projecteurs de A de somme infinie. Nous montrons que T ne peut pas être bornée inférieurement uniformément sur chaque Q_n.

Cette propriété est appliquée ensuite à la famille de sous-espaces $\operatorname{Im} Q_n = \ker(1-T)^n \ominus \ker(1-T)^{n-1}$ pour laquelle $Q_n T Q_n = Q_n$.

*

* *

Soit A une algèbre de von Neumann opérant dans l'espace H.

DEFINITION. — *Un élément* T *de* A *est dit de rang fini si le projecteur sur* Im T *est relativement fini dans* A. T *est dit compact s'il est limite en norme d'opérateurs de rang fini.*

L'ensemble des opérateurs compacts forme un idéal bilatère autoadjoint fermé de A (cf. [1]). Il est noté K(A).

Soit E un projecteur de A. L'algèbre réduite EAE est notée A_E, l'application canonique de A dans A_E qui à $x \in A$ associe ExE est notée ϕ_E.

PROPOSITION 1. – *Soit* T *un élément de* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $T \in K(A)$

ii) *Si* E *est un projecteur de* A *tel que* $\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} T$, *alors* E *est fini.*

Démonstration – Montrons que $1) \Longrightarrow 2)$. Soit E un projecteur tel que $\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Im} T$. Alors ET est inversible sur son image : il existe $S \in A$ tel que $ETS = E$.

LEMME 1. – *On a l'inclusion :*

$$\phi_E(K(A)) \subset K(A_E) .$$

Soit $R \in K(A)$; il existe une suite R_n d'opérateurs de rang fini telle que $\lim\limits_n R_n = R$. Comme $\phi_E(R_n)$ est de rang fini dans A_E et $\lim \phi_E(R_n) = \phi_E(R)$ on voit que $\phi_E(R)$ est compact dans A_E.

Donc si $T \in K(A)$, alors $\phi_E(TS) \in K(A_E)$.

D'autre part nous savons que $\phi_E(TS) = 1$. Ceci implique que E est fini, d'après le lemme suivant :

LEMME 2. – *Si* F *est un projecteur infini de* A, *alors* $1 \notin K(A_F)$.

En effet, considérons la boule de centre 1 et de rayon 1/2 dans A_F : elle est formée d'opérateurs inversibles, donc d'opérateurs de rang infini. Par conséquent 1 ne peut pas être limite d'opérateurs de rang fini, d'où le résultat.

Réciproquement, soit T vérifiant la propriété ii) et $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Alors $|T|$ vérifie la propriété ii) car $U \operatorname{Image} |T| = \operatorname{Image} T$. Soit $a > 0$ et soit E_a le projecteur spectral de T correspondant à l'intervalle $[0, a]$, $1 - E_a$ est fini car son image est contenue dans celle de T. Comme la norme de $|T| E_a$ est $\leqslant a$, on voit que $|T|$ est limite en norme des $|T|(1 - E_a)$ qd $a \longrightarrow 0+$, qui sont de rang fini. Ainsi $|T|$ et T sont compacts. q.e.d.

COROLLAIRE. – *Soit* $T \in K(A)$ *et soit la décomposition spectrale de* $|T| = (T * T)^{1/2}$:

$$|T| = \int_0^R x \, dE_x .$$

Alors pour $a > 0$, $1 - E_a$ *est fini.*

PROPOSITION 2. – *Supposons que* A *soit une algèbre semi-finie. Soit* $(Q_n)_{n=1,2,\dots}$ *une suite orthogonale de projecteurs de* A, P *un projecteur fini de* A *et* d *un réel* > 0. *Supposons que* P *soit borné inférieurement par* d *sur* $\operatorname{Im} Q_n$, *quel que soit* $n \geqslant 1$, *c'est-à-dire :*

$$\forall x \in \operatorname{Im} Q_n , \qquad \|Px\| \geqslant d \, \|x\| .$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} Q_n$ *est fini.*

Démonstration. – Nous établissons d'abord quelques lemmes.

LEMME 3. – *On a l'inégalité :* $Q_n P Q_n \geqslant d^2 Q_n$.

Il faut montrer que quel que soit $y \in H$, on a :

$$(Q_n P Q_n y , y) \geqslant d^2 (Q_n y , y) .$$

Mais cette inégalité se récrit :

$$\|PQ_n y\|^2 \geqslant d^2 \, \|Q_n y\|^2 .$$

Cette dernière inégalité est celle qui est supposée dans l'énoncé de la proposition avec $x = Q_n y$. q.e.d.

Posons $\sum_{n=1}^{+\infty} Q_n = Q$.

LEMME 4. – *Soit* φ *une trace normale sur* A *telle que* $\varphi(P) < +\infty$. *On a* $\varphi(P) \geqslant d^2 \varphi(Q)$.

Démonstration. – On a $\varphi(Q_n P Q_n) = \varphi(P Q_n P)$. Donc d'après le lemme 3, on a $\varphi(PQ_n P) \geqslant d^2 \varphi(Q_n)$, d'où il vient l'inégalité $\varphi(PQP) \geqslant d^2 \varphi(Q)$. De cette dernière relation, il résulte que $\varphi(P) \geqslant d^2 \varphi(Q)$. q.e.d.

LEMME 5. – *Soit* E *un projecteur de* A. *Alors* E *est fini si et seulement s'il existe une famille fidèle de traces normales* *semi-finies* (*) $(\varphi_i\,,\, i \in \mathrm{I})$ *telle que, quel que soit* $i \in \mathrm{I}$, *on ait :* $\varphi_i(\mathrm{E}) < +\infty$.

Démonstration. – Voir [2], lemme 2.5.3. page 97.

Fin de la démonstration de la prop. 2. – D'après le lemme 5, il existe une famille fidèle de traces normales semi-finies sur A, $(\varphi_i\,,\, i \in \mathrm{I})$ telle que : $\varphi_i(\mathrm{P}) < +\infty$, pour $i \in \mathrm{I}$. Mais d'après le lemme 4 on a alors : $\varphi_i(\mathrm{Q}) < +\infty$ quel que soit $i \in \mathrm{I}$. Donc, d'après le lemme 5, Q est fini. q.e.d.

PROPOSITION 3. – *Supposons que* A *soit une algèbre semi-finie. Soit* $\mathrm{T} \in \mathrm{K(A)}$, $(\mathrm{Q}_n)_{n=1,2\ldots}$ *une suite orthogonale de projecteurs de* A, *et* d *un réel* > 0, *tels que* T *soit borné inférieurement par* d *sur* $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_n$, *pour tout* n, *c'est-à-dire :*

$$\|\mathrm{T}\,\mathrm{Q}_n\, x\| \geqslant d\, \|\mathrm{Q}_n\, x\| \qquad \textit{pour } x \in \mathrm{H}.$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Q}_n$ *est fini.*

Démonstration. – Considérons la décomposition spectrale de $|\mathrm{T}| = (\mathrm{T} * \mathrm{T})^{1/2}$: $|\mathrm{T}| = \int_0^{\mathrm{R}} x\, d\mathrm{E}_x$.

LEMME. – *Soit* $y \in \mathrm{H}$ *tel que* $\|\mathrm{T}y\| \geqslant d\,\|y\|$. *Alors on a l'inégalité :* $\|(1 - \mathrm{E}_{d'})\, y\| \geqslant (d/2\, \|\mathrm{T}\|)\, \|y\|$, *avec* $d' = d/2$.

En effet on a : $\|\mathrm{T}y\| \leqslant \|\mathrm{T}(1 - \mathrm{E}_{d'})\, y\| + \|\mathrm{T}\mathrm{E}_{d'}y\|$. Mais d'autre part :

$$\|\mathrm{T}(1 - \mathrm{E}_{d'})\, y\| \leqslant \|\mathrm{T}\|\, \|(1 - \mathrm{E}_{d'})\, y\| \quad \text{et} \quad \|\mathrm{T}\mathrm{E}_{d'}y\| \leqslant d'\, \|y\|.$$

On a alors l'inégalité $d\,\|y\| \leqslant \|\mathrm{T}\|\; \|(1 - \mathrm{E}_{d'})\, y\| + d'\, \|y\|$, d'où il vient : $\|(1 - \mathrm{E}_{d'})\, y\| \geqslant ((d - d')/\|\mathrm{T}\|)\, \|y\|$. q.e.d.

D'après ce lemme, il résulte que $1 - \mathrm{E}_{d'}$ est borné inférieurement par $(d/2\, \|\mathrm{T}\|)$ sur $\mathrm{Im}\,\mathrm{Q}_n$ pour tout n.

Or d'après le corollaire à la proposition 1, $1 - \mathrm{E}_{d'}$ est fini. On peut alors appliquer la proposition 2 avec $1 - \mathrm{E}_{d'}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n=1,2\ldots}$, ce qui montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Q}_n$ est fini. q.e.d.

(*) Par famille fidèle il faut entendre : si $\mathrm{R} \in \mathrm{A}^+$, est tel que $\varphi_i(\mathrm{R}) = 0$, $\forall i$, alors $\mathrm{R} = 0$.

Soit A une algèbre de von Neumann *quelconque*.

THEOREME. – *Soit* $T \in K(A)$. *Alors* $\sup_n \ker(1 - T)^n$ *est fini.*

Démonstration. – On peut supposer que A est semi-finie. En effet, soit G le projecteur central de A tel que A_G soit semi-finie et $A_{(1-G)}$ purement infinie. Pour tout projecteur fini E de A on a $(1 - G)E = 0$, et par conséquent $K(A)(1 - G) = 0$, ce qui nous ramène au cas où $G = 1$.

Soit Q_n le projecteur sur $\mathrm{Ker}(1 - T)^n \ominus \mathrm{Ker}(1 - T)^{n-1}$. Il faut montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} Q_n$ est fini.

Cela résulte de la proposition 3 et du lemme suivant :

LEMME. – *On a l'égalité* : $Q_n T Q_n = Q_n$.

En effet on a l'inclusion : $(1 - T)\ker(1 - T)^n \subset \ker(1 - T)^{n-1}$. Il en résulte : $Q_n(1 - T)Q_n = 0$, d'où $Q_n T Q_n = Q_n$. q.e.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Manfred BREUER, Fredholm theories in von Neumann algebras, I & II, *Math. Annal.*, 178 (1968), p. 243-254, et 180 (1969), p. 313-325.

[2] S. SAKAI, C*-algebras and W*-algebras, Springer-Verlag 1971.

Manuscrit reçu le 21 juillet 1977
Proposé par J. Dieudonné.

Michel HILSUM,
Laboratoire de
Mathématiques Fondamentales
Aile 45-46, 3e étage
4, Place Jussieu
75230 – Paris.