ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES CHATELET

Sur les feuilletages induits par l'action de groupes de Lie nilpotents

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 2 (1977), p. 161-189
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_2_161_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 2 (1977), 161-189.

SUR LES FEUILLETAGES INDUITS PAR L'ACTION DE GROUPES DE LIE NILPOTENTS

par Gilles CHATELET

Soit G un groupe de Lie et $\mathscr{G}$ son algèbre de Lie.

Soit V une variété C^∞ et $\Phi : G \times V \to V$ une opération de classe C^2 d'un groupe de Lie G. On suppose que Φ est de rang maximum et que $\dim V = \dim G + 1$. Les orbites de G constituent alors un feuilletage $\mathscr{F}(\Phi)$ de classe C^2 de V et de codimension 1. Les feuilles de $\mathscr{F}(\Phi)$ sont des immersions injectives de G/Γ où Γ est un sous-groupe discret de G.

Rappelons que, si V est compacte connexe et orientable et si $G = \mathbf{R}^n$, V est fibrée sur S_1 ([3], [12]). Les fibres sont des tores à n dimensions si Φ admet au moins une orbite compacte. Nous nous proposons d'étudier ici le cas où G est nilpotent et simplement connexe (*). Les feuilles de $\mathscr{F}(\Phi)$ sont alors à croissance polynomiale (cf. terminologie de Plante [9]). Il n'existe donc pas d'ensemble minimal exceptionnel et, si Φ est sans orbites compactes, $\mathscr{F}(\Phi)$ est sans holonomie. Appliquant le théorème de Tischler ([14]) sur les formes fermées, on déduit que V est fibrée sur S_1 (la fibre étant inconnue *a priori*). Dans le cas de l'existence d'orbite compacte, les résultats de Plante ([9]) et Moussu-Pelletier ([7]) précisent les contraintes sur l'homotopie de V.

Nous nous proposons, dans une première partie, de mettre en évidence un idéal de $\mathscr{G}$, de codimension un, qui décrit

(*) L'hypothèse de simple connexité ne diminue pas la généralité du problème puisque une action de groupe de Lie induit une action sur le groupe revêtement universel.

complètement, au voisinage d'une feuille compacte isolée d'un côté (*), les champs induits par Φ sur V. La seconde partie généralise les théorèmes de [12] et [3] pour un type classique de groupes de Lie nilpotents : les groupes de Heisenberg.

Dans toute la suite, V est compacte, connexe et orientable. V est de classe C^∞ et Φ est de classe C^2. G est nilpotent, de dimension $n-1$ et simplement connexe. Si $\mathscr{G}$ est l'algèbre des champs invariants à droite sur G, et si W est dans $\mathscr{G}$, $\Phi(W)$ désigne le champ défini sur V par la relation :

$$(\Phi(W))_x = \frac{d}{dt}_{t=0} \Phi\,(\exp tW.x).$$

R est le groupe des germes de difféomorphismes de classe C^2 de $\mathbf{R}^+$ et conservant l'origine.

L'objet de la première partie est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si* M *est une feuille compacte isolée d'un côté, alors :*

A) *Si* $x_0 \in M$, *la représentation d'holonomie*

$$\lambda_0 = \pi_1(M, x_0) \to R$$

a une image abélienne libre isomorphe à Z^s
$(1 \leqslant s \leqslant \dim H^1(M, Q))$.
Le germe de feuilletage au voisinage de M *est presque sans holonomie* [8], *du côté où* M *est isolée.*

M *est fibrée sur le tore* T^s *à* s *dimensions.*

B) *Il existe dans* $\mathscr{G}$ *un idéal* $\mathscr{G}_M$ *de codimension* s *tel que*

i) $\mathscr{G}/\mathscr{G}_M$ *est abélienne.*

ii) *Si* G_M *est le sous-groupe connexe de* G *dont* $\mathscr{G}_M$ *est l'algèbre de Lie,* G_M *contient tous les noyaux des représentations d'holonomie associées aux points de* M ($\pi_1(M, x)$ *étant identifié au stabilisateur* Γ_x *de* x). *Les orbites de* G_M (*comme sous-*

(*) Une feuille compacte est isolée d'un côté si il existe un arc de normale (difféomorphe à $]0,1[$) d'un point de M et ne rencontrant aucune autre feuille compacte que M.

groupe de G) *sur* M *sont les fibres du fibré annoncé plus haut.*

C) *Il existe un couple* (ω_M, f_M) *tel que*

i) ω_M *est une forme biinvariante sur* G. *L'hyperplan* $\omega_M^{-1}(0)$ *est un idéal* $\mathcal{J}_M$ *de* $\mathcal{G}$ *contenant* $\mathcal{G}_M$. ω_M *est simplement calculable à partir de la représentation d'holonomie.*

ii) f_M *est une fonction continue définie sur un voisinage* U_M *de* M *et à valeurs dans* $\mathbf{R}^+$. $f^{-1}(0) = M$ *et* f *est* C^1 *dans* $U_M - M$. *Si* u *est dans* $\mathcal{G}$ *et tel que* $\langle \omega_M, u \rangle > 0$, f_M *est une fonction de Liapounov pour* $\Phi(u)$. *En particulier* M *est un attracteur* (*) *pour les orbites de* $\Phi(u)$ *dans* U_M *et les surfaces de niveau de* f_M *sont transverses à* $\Phi(u)$.

iii) *Le cobordisme entre* M *et une surface de niveau de* f_M *est* C^1*-trivial.*

iv) *Si* L *est une orbite de* Φ, *non compacte, dont l'adhérence contient* M *et si* J_M *est le sous-groupe connexe de* G *dont* $\mathcal{J}_M$ *est l'algèbre, les stabilisateurs des points de* L *sont des sous-groupes discrets de* J_M.

Remarque. — Le théorème 1 associe à chaque feuille compacte isolée d'un côté, un couple $(\mathcal{G}_M, \omega_M)$ qui décrit complètement $\mathcal{F}(\Phi)$ au voisinage de M. Nous verrons à la fin de la première partie que la classe de conjugaison des feuilletages induits sur les surfaces de niveau de f_M par $\mathcal{F}(\Phi)$ est immédiatement donnée par ω_M. D'autre part, une des grandes difficultés du cas non abélien est le caractère mobile des stabilisateurs. Le paragraphe C iv) localise *a priori* ceux-ci.

Les théorèmes de cobordisme prouvés dans la deuxième partie nécessitent des hypothèses techniques supplémentaires sur Φ ou sur G.

Soit M une feuille isolée d'un côté de $\mathcal{F}(\Phi)$, nous dirons que M satisfait la condition C_1 si codim $\mathcal{G}_M = 1$ ($\mathcal{G}_M$ est naturellement l'idéal associé aux noyaux d'holonomie dans l'énoncé du théorème 1). Nous dirons que M satisfait la

(*) Si X est défini sur V et ψ le flot induit et si γ est dans V, l'ensemble asymptotique positif $\omega^+(x)$ est défini par $\omega^+(x) = \bigcap_{t_0} \bigcup_{t \geqslant t_0} \psi(t, X)$. Dans ce cas si x est dans U_M, $\omega^+(x) \subset M$.

condition C_2, si, G_M désignant toujours le sous-groupe de B ii) du théorème 1, l'orbite $(W_M)_x$ de G_M au point x de M se plonge dans M en induisant un monomorphisme du groupe $H_1((W_M)_x, Q)$ dans $H_1(M, Q)$. (Nous verrons que si $G = \mathbf{R}^n$ cette condition est automatiquement satisfaite.)

Rappelons que les groupes de Heisenberg sont les groupes de Lie nilpotents simplement connexes, de dimension $2k + 1$ dont l'algèbre de Lie admet des générateurs $\{(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}, (Y_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}, I\}$ satisfaisant les relations

$$[X_i, Y_j] = \delta_j^i I \quad \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k \end{array}$$

Les autres commutateurs sont nuls.

Le théorème 2 s'énonce alors comme suit

THÉORÈME 2. — *On suppose que* (V, G, Φ) *satisfont les conditions du début de l'introduction. On suppose de plus que l'une des hypothèses suivantes sur* Φ *et* G *est satisfaite.*

H_1) *Si* M *est une orbite isolée d'un côté de* $\mathscr{F}(\Phi)$, M *satisfait la condition* C_1 *ou la condition* C_2.

H_2) G *est l'un des groupes de Heisenberg définis ci-dessus.*

Alors, deux cas sont possibles

a) *Si* $\partial V \neq \emptyset$, V *est difféomorphe à* $G/\Gamma \times [0, 1]$ *où* Γ *est un sous-groupe uniforme convenable de* G.

b) *Si* $\partial V = \emptyset$, V *est fibré sur* S_1, *les fibres étant des « nilvariétés »* (i.e. *quotient de* G *par un sous-groupe uniforme convenable*).

0. Notations et rappels utilisés dans les deux parties.

*NO*1

$\mathscr{G}$ est l'algèbre de Lie des champs invariants à droite sur G. Nous conviendrons toujours que $\Phi(g, x) = g.x$. Γ_x est le stabilisateur de Φ au point x de V. L'action de G sur une orbite $L(x)$ issue de x est équivariante à l'action à gauche de G sur G/Γ_x donnée par $(g', g\Gamma_x) \to g'g\Gamma_x$. Cette action de G est en fait induite par les champs définis sur G/Γ_x et issus des champs invariants à droite par passage au quotient. Si Φ_x est l'application $G \to L_x$ définie par

$\Phi_x(g) = g.x$, Φ_x induit une application $\tilde{\Phi}_x : G/\Gamma_x \to L_x$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} & G/\Gamma_x \arrow[dr, "\tilde{\Phi}_x"] & \\ G \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "\Phi_x"'] & & L_x \end{tikzcd}$$

Si V est munie de la topologie des feuilles, Φ_x est un revêtement et $\tilde{\Phi}_x$ un difféomorphisme.

Gardant les notations de l'introduction, si W est un élément de $\mathscr{G}$ et $\overline{W}$ le champ induit sur G/Γ_x, on peut écrire, sur L_x,

$$\tilde{\Phi}_x \overline{W} = \Phi(W).$$

Φ_x étant un revêtement, Φ_x induit une application biunivoque de $\pi_1(L(x), x)$ sur Γ_x que nous conviendrons d'appeler dans toute la suite « relèvement des lacets dans L_x via Φ_x ». Cette dernière associe à un élément de $\pi_1(L(x), x)$ un élément dans $\Gamma_x \subset G$ défini comme l'extrémité du relèvement au point e d'un lacet représentant l'élément choisi dans $\pi_1(L_x, x)$.

Il existe sur G une métrique invariante à droite δ qui passe donc au quotient dans G/Γ_x (pour x dans V). Un argument classique de partition de l'unité, montre alors que, sur V, il y a une métrique telle que la métrique induite sur les feuilles par δ est telle que $\tilde{\Phi}_x$ soit une isométrie et Φ_x une isométrie locale.

Nous désignerons par N un champ unitaire normal aux feuilles de $\mathscr{F}(\Phi)$.

*NO*2.

Résultats classiques sur les groupes de Lie nilpotents simplement connexes de dimension $n - 1$ ([10], pp. 31, 32, 33).

a) L'exponentielle est un difféomorphisme de $\mathscr{G}(\approx \mathbf{R}^{n-1})$ sur G.

b) Les sous-groupes uniformes de G ont $n - 1$ générateurs.

c) Si G et G′ sont deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes, et, si Γ est un sous-groupe uniforme de G, tout homomorphisme λ de Γ dans G′ s'étend de façon

unique en un homomorphisme Λ de G dans G'. Si $\lambda(\Gamma)$ est un sous-groupe uniforme, Λ est une submersion et un épimorphisme de groupes.

PARTIE I

Preuve de la partie A du théorème 1.

R désigne toujours le groupe des germes de difféomorphismes de classe C^2 au moins et conservant l'origine. Un élément ρ de R est dit pseudo-hyperbolique si il existe un représentant $\hat{\rho}$ de cet élément tel que 0 soit un point fixe isolé de $\hat{\rho}$. M étant isolée d'un côté, il y a un arc de normale de longueur ε et issu de x_0 qui ne rencontre aucune feuille compacte autre que M. Si $\lambda_0 : \pi_1(M, x_0) \to R$ est la représentation d'holonomie en x_0, l'image de $\pi_1(M, x_0)$ dans R est un sous-groupe noté R_0. L'isolement de M implique que 0 est le seul point fixe commun à tous les représentants de R_0 sur $[0, \varepsilon[$. R_0 est un sous-groupe nilpotent de R (admettant $n - 1$ générateurs) et son centre C_0 n'est pas trivial.

Lemme LI-A_1. — *Si f est dans $C_0 - \{1\}$ (1 est le germe de l'identité), f est pseudo-hyperbolique.*

Nous raisonnons par l'absurde. Soit donc f un élément de $C_0 - \{1\}$ qui n'est pas pseudo-hyperbolique. Il existe un représentant $\hat{f}$ de f, défini sur un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^+$. R_0 est engendré par $n - 1$ éléments dont les représentants $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_{n-1}$ sont définis sur un voisinage V de 0 dans $\mathbf{R}^+$. Soit $U' = U \cap V$. Il existe ε_0 tel que

$$[0, \varepsilon_0[\subset U', \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_{n-1}$$

n'ayant aucun point fixe en commun sur $[0, \varepsilon_0[$. Si f n'est pas pseudo-hyperbolique, il existe un point x_0^- (resp. x_0^+) tel que $0 < x_0^- < \varepsilon_0$ (resp. $0 < x_0^+ < \varepsilon_0$),

$$\hat{f}(x_0^-) = x_0^- \text{ (resp. } \hat{f}(x_0^+) = x_0^+) \quad \text{et} \quad \hat{f}(y) \neq y$$

dès que y est dans l'intervalle $]x_0^-, x_0^+[$.

Montrons que x_0^- est un point fixe commun à $\hat{f}$ et à tous les éléments $\hat{f}_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$, contredisant ainsi l'hypothèse d'isolement de M sur l'arc $[0, \varepsilon_0[$.

Soit donc j tel que $\hat{f}_j(x_0^-) \neq x_0^-$. En prenant éventuellement l'inverse de $\hat{f}_j$, on peut supposer que $\hat{f}_j^n(x_0^-) \to x_1$ si $n \to +\infty$, x_1 étant tel que $0 \leqslant x_1 < x_0^-$ et $\hat{f}_j(x_1) = x_1$. Pour $\delta > 0$, suffisamment petit, $\hat{f}_j$ est un difféomorphisme contractant sur $[x_1, x_0^- + \delta[$, commutant avec $\hat{f}$. De plus, x_1 est un point fixe de f, car on peut écrire :

$$\hat{f}(x_1) = \lim_{n \to +\infty} \hat{f}\, f_j^n(x_0^-) = \hat{f}_j^n f(x_0^-) = \hat{f}_j^n(x_0^-) = x_1$$

Utilisant alors le théorème de N. Koppel ([6]), f est pseudo-hyperbolique sur $[x_1, x_0 + \delta[$ et $\hat{f}(x_0^-) = x_0^-$. Ceci implique $x_1 = x_0^-$, et x_0^- est un point fixe commun à $\hat{f}$ et à $\hat{f}_j$. L'hypothèse du début était absurde, et on doit donc supposer que x_0^- est un point fixe commun à tous les générateurs de R_0 et tel que $0 < x_0^- < \varepsilon_0$. M n'est plus la seule feuille compacte que coupe l'arc de normale. f doit donc être pseudo-hyperbolique.

$\hat{f}$ est pseudo-hyperbolique et commute avec tous les éléments de R_0. Réappliquant N. Koppel, on voit que tous les éléments de R_0 sont pseudo-hyperboliques excepté le germe de l'identité. Utilisant alors les résultats de Moussu-Roussarie ([8]), R_0 est un sous-groupe de R isomorphe à $\mathbf{Z}^s$ et il y a une application surjective de $H_1(M, \mathbf{Z})$ sur R_0. Le germe de feuilletage défini par $\mathscr{F}(\Phi)$ au voisinage de M est « presque sans holonomie ».

Il existe alors une réduction canonique (1) des éléments de R_0. Dans un article non publié, G. Joubert et R. Moussu ont prouvé le théorème qui suit précisant ainsi la classe de différentiabilité de la conjugaison qui permet la réduction (dans [1], nous utilisons le théorème de Denjoy, obtenant ainsi une conjugaison C^0. Joubert et Moussu utilisent le lemme 1 de [5] et obtiennent la conjugaison comme primitive d'une fonction continue).

THÉORÈME II-A_2. — *Soit* R′ *un sous-groupe abélien de* R. *Si un élément au moins de* R′ *est le germe d'une contrac-*

tion (*) f *de classe* $r \geqslant 2$, *il existe un homéomorphisme* h_f *de* $\mathbf{R}^+$ *dont la restriction à* $[0, +\infty[$ *est un* C^1*-difféomorphisme tel que pour tout élément* g *de* R', $h_j \circ g \circ h_j^{-1}$ *est le germe d'une application linéaire de* $\mathbf{R}^+$.

Corollaire CI-A_3. — *Soit* $\{f_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$ *une base de* R_0 *admettant des représentations* $\{\hat{f}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$ *qui sont des contractions. Alors il existe un homéomorphisme* h, *défini sur un voisinage de* 0 *dans* $\mathbf{R}^+$ *et un système de nombres* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1)$ *tels que,*

$$(\hat{f} \circ h)(x) = h(e^{-\alpha_i} x)$$
$$(f_s \circ h)(x) = h(e^{-1} x)$$

Les nombres $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ *sont positifs et le système* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, 1)$ *est de rang* s *sur* Q.

Montrons que M est fibré sur T^s.

Si $\lambda_0 : \pi_1(M, x_0) \to R_0$ est la représentation d'holonomie en x_0 et si Γ_{x_0} est identifié à $\pi_1(M, x_0)$ via Φ_{x_0}, λ_0 apparaît comme un homomorphisme $\lambda_0 : \Gamma_{x_0} \to R_0 \subset R(R_0 \approx \mathbf{Z}^s)$. Soit $\hat{R}_0$ un groupe de Lie (isomorphe à $\mathbf{R}^s$) connexe admettant R_0 comme sous-groupe uniforme. Utilisant le théorème d'extension, on déduit l'existence d'un épimorphisme régulier $\Lambda_0 : G \to \hat{R}_0$ tel que $\Lambda_0/\Gamma_{x_0} = \lambda_0$. Comme $\lambda_0(\Gamma_{x_0}) = R_0$, la fibration $\operatorname{Ker} \Lambda_0 \to G \to \hat{R}_0$ passe au quotient. La situation est alors décrite par le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} \Lambda_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j'"'] & G \arrow[r, "\Lambda_0"] \arrow[d, "j"] & \hat{R}_0 \approx R^s \arrow[d] \\
\operatorname{Ker} \Lambda_0 / \operatorname{Ker} \lambda_0 & G/\Gamma_{x_0} \arrow[l, "\tilde{i}"'] \arrow[r, "\tilde{\Lambda}_0"] \arrow[dr, "\tilde{\Phi}_{x_0}"'] & T^s \approx \hat{R}_0/R_0 \\
 & M \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(*) i.e. pour x petit et positif non nul $\hat{f}_i(x) < x$. Si f est pseudo-hyperbolique, $\hat{f}$ ou $\hat{f}^{-1}$ est donc une contraction.

M apparaît ainsi comme fibré de base T^s et dont les fibres sont des nil-variétés (difféomorphes à $\operatorname{Ker} \Lambda_0/\operatorname{Ker} \lambda_0$).

L'épimorphisme Λ_0 permet de construire des formes invariantes à droite et à gauche sur G qui se révèleront importantes dans la suite. $\{f_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$ désignant toujours une base de germes contractants de R_0 et identifiant $\hat{R}_0$ et son algèbre de Lie comme groupes additifs par l'exponentielle, les éléments $\{f_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$ apparaissent alors comme des champs invariants à droite et à gauche dont les formes duales $\{dx^j\}$ vérifient les relations,

$$\langle dx^j, f_i \rangle = \delta_i^j$$

Posant alors $\omega^i = \Lambda_0^*(dx^i)$, on obtient s formes invariantes et fermées sur G. L'espace tangent aux fibres $g \operatorname{Ker} \Lambda_0$ est donné par $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant s} \omega_i^{-1}(0)$.

Preuve de la partie B.

Définissons l'algèbre de Lie $\mathscr{G}_M$ comme la sous-algèbre de $\mathscr{G}$ induite par $\operatorname{Ker} \Lambda_0$. *A priori*, $\operatorname{Ker} \Lambda_0$ dépend du point x_0 choisi sur M. Si $x_1 = \gamma . x_0$ est un autre point de M, $\Gamma_{x_1} = \gamma \Gamma_{x_0} \gamma^{-1}$ et le diagramme ci-dessous (où φ_γ est l'automorphisme $\mu \longmapsto \gamma \mu \gamma^{-1}$ et φ un isomorphisme) est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{x_0} \arrow[r, "\lambda_0"] \arrow[d, "\varphi_\gamma"'] & R_0 \approx Z^s \arrow[d, "\varphi"] \\
\Gamma_{x_1} \arrow[r, "\lambda_1"] & R_1 \approx Z^s
\end{tikzcd}$$

Rappelons que Λ_1 est l'unique extension $G \to \hat{R}_1$ de λ_1. Si $\hat{\varphi} : R_0 \to R_1$ est l'extension de φ, $\hat{\varphi} \circ \Lambda_0 \circ \varphi_\gamma^{-1}$ est une extension de λ_1. On déduit $\Lambda_1 = \hat{\varphi} \circ \Lambda_0 \circ \varphi_\gamma^{-1}$ et

$$\operatorname{Ker} \Lambda_1 = \operatorname{Ker} \Lambda_0.$$

Il est donc licite de poser $\operatorname{Ker} \Lambda_0 = G_M$. G_M est le plus petit sous-groupe fermé connexe de G contenant les noyaux des représentations d'holonomie des points de M.

Remarque. — G/G_M est isomorphe à $\mathbf{R}^s . G_M$, comme sous-groupe de G agit sur M. Ses orbites ne sont autres que les fibres de la fibration $M \xrightarrow{\tilde{\Lambda}_0 \circ \tilde{\Phi}_{x_0}^{-1}} T^s$. L'espace M/G_M des orbites est un tore à s dimensions. Au point x, le stabilisateur de l'action de G_M est $\Gamma_x \cap G_M = \operatorname{Ker} \lambda_x$ (où λ_x est la représentation d'holonomie au point x de M).

Preuve de la partie C.

La démonstration est longue et nécessite plusieurs étapes.

Étape 1 :

La construction d'un modèle standard auquel est conjugué $\mathscr{F}(\Phi)$ au voisinage de M.

Nous gardons les notations du paragraphe précédent. Soit φ_i l'élément de $\mathscr{G}$ défini par $\exp \varphi_i = d_i$ (l'exponentielle est bijective) où d_i est un élément de Γ_0 tel que

$$\Lambda_0(d_i) = f_i.$$

Soient aussi $\{d'_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n-s-1}$ un système de générateurs de $\operatorname{Ker} \lambda_0$. Notons W_j l'élément de $\mathscr{G}$ défini par la relation $\exp W_j = d'_j$.

Remarquons que les champs $\Phi(V_i)$ et $\Phi(W_j)$ définis sur V admettent des orbites fermées en x_0 et que les lacets correspondants à celles de $\Phi(V_i)$ dans $\pi_1(M, x_0)$ s'envoient par $\tilde{\Lambda}_0 \circ \Phi_{x_0}^{-1}$ sur les lacets canoniques de $\pi_1(T^s, 0)$, ceux-ci étant d'ailleurs les orbites des champs invariants $\{f_i\}$.

Les $\Phi(W_j)$ constituent sur M une distribution intégrable dont les variétés intégrales sont les fibres de $M \xrightarrow{\Lambda_0 \circ \tilde{\Phi}_{x_0}^{-1}} T^s$ (ou encore les orbites de G_M sur M). Retournant aux formes ω^k définies à la fin de l'étape A, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \omega^k, V_i \rangle &= \delta_i^k & 1 \leqslant i \leqslant s \\ \langle \omega^k, \omega_j \rangle &= 0 & 1 \leqslant j \leqslant n - s - 1 \end{aligned}$$

V_i (resp W_j) induit un champ $\overline{V}_i$ (resp $\overline{W}_j$) dans G/Γ_{x_0}. Les formes dx^k induisent des formes $d\theta^k$ sur T^s. Si

$$\overline{\omega}^k = \tilde{\Lambda}_0^*(d\theta^k),$$

on peut écrire :

$$\begin{array}{ll} \langle \overline{\omega}^k, \overline{V}_i \rangle = \delta_i^k & 1 \leqslant i \leqslant s \\ & 1 \leqslant k \leqslant s \\ \langle \overline{\omega}^k, \overline{W}_j \rangle = 0 & 1 \leqslant j \leqslant n - s - 1 \end{array}$$

Nous avons répertorié ces notations dans le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}(W_j)\\ G_M = \operatorname{Ker} \Lambda_0\end{array} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j'"] & \begin{array}{c}(W_j, V_i, \omega^k)\\ G\end{array} \arrow[r, "\Lambda_0"] \arrow[d, "j"] & \begin{array}{c}(f_i, dx^k)\\ \hat{R}_0\end{array} \arrow[d, "j_0"] \\
\begin{array}{c}\operatorname{Ker} \Lambda_0 / \operatorname{Ker} \lambda_0\\ (\overline{W}_j)\end{array} \arrow[r, "i"] & \begin{array}{c}G/\Gamma_{x_0}\\ (\overline{V}_i, \overline{W}_j, \overline{\omega}_k)\end{array} \arrow[r, "\tilde{\Lambda}_0"] & \begin{array}{c}\hat{R}_0/R_0\\ (f_i, d\theta^k)\end{array}
\end{tikzcd}$$

Soit maintenant la forme

$$\Omega = dt + t(1 - t)\left(\sum_{k=1}^{k=s} \alpha_i p^*(\overline{\omega}^k)\right)$$

p est la projection $G/\Gamma_{x_0} \times [0, 1] \to G/\Gamma_{x_0}$ et les nombres α_i sont ceux associés à la réduction canonique du corollaire CI-A_3.

Cette forme est intégrable dans $G/\Gamma_{x_0} \times [0, 1]$ et induit un modèle standard de feuilletage auquel sera conjugué $\mathscr{F}(\Phi)$ au voisinage de M.

$\mathscr{F}(\Omega)$ est transverse aux segments $g\Gamma_{x_0} \times [0, 1]$. C'est un fibré de type classique ([4]).

Les s champs

$$Y_i = -\alpha_i t(1 - t)\frac{\partial}{\partial t} + (\overline{V}_i, 0) \quad (1 \leqslant i \leqslant s, \alpha_s = 1)$$

sont tangents à $\mathscr{F}(\Omega)$ et vérifient,

$$\langle dt, Y_i \rangle = -\alpha_i t(1 - t).$$

La fonction $(g\Gamma_{x_0}, t) \longmapsto t$ est de Liapounov pour tous ces vecteurs et $G/\Gamma_{x_0} \times \{0\}$ est un attracteur pour les orbites de Y_i. Sur les sous-variétés $G/\Gamma_{x_0} \times \{t\}(0 < t < 1)$,

$\mathscr{F}(\Omega)$ induit un feuilletage conjugué au feuilletage défini par la forme $\sum_{k=1}^{k=s} \alpha_i \overline{\omega}^k$ sur G/Γ_{x_0}.

Étape 2 :

La conjugaison de $\mathscr{F}(\Omega)$ et de $\mathscr{F}(\Phi)$ au voisinage de M.

Il suffit de vérifier que l'holonomie σ au point $\bar{e}$ de $G/\Gamma_{x_0} \times \{0\}$ est conjuguée à l'holonomie λ_0 de $\mathscr{F}(\Phi)$ au point x_0. Ce sera le cas si on établit que σ est conjuguée à la réduction standard $(e^{-\alpha_1}x, \ldots, e^{-\alpha_{s-1}}x, e^{-1}x)$ de $CI\text{-}A_3$. Calculons $\operatorname{Log} \sigma(d_i)'(0)$. Pour évaluer cette quantité, il suffit de calculer la période de la forme dérivée de Lie de Ω sur la classe d'homologie associée à d_i puisque $(\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 1$, cf. [11]). L'image du lacet correspondant à d_i dans

$$\pi_1(G/\Gamma_{x_0}, \bar{e})$$

s'envoie par $\tilde{\Lambda}_0$ sur l'orbite fermée de f_i dans $\hat{R}_0/R_0$ (cf. remarque Étape 1 de C). Il vient alors :

$$\operatorname{Log} \sigma(d_i)'(0) = -\int_{[d_i]} L \frac{\partial}{\partial t} \Omega = -\int_{[d_i]} p^* \left(\sum_{k=1}^{k=s} \alpha_k \overline{\omega}^k \right)$$
$$= -\int_{[f_i]} \sum_{k=1}^{k=s} \alpha_k \, d\theta^k = -\alpha_i$$

Les holonomies σ et λ_0 sont bien C^0-conjuguées et même C^1-conjuguées lorsqu'on exclut l'origine. L'holonomie caractérisant le germe de $\mathscr{F}(\Phi)$ d'un côté de M, la proposition suivante est immédiate ([4]).

Proposition PI-C_1. — *Soit* U_ε *le voisinage tubulaire de* M *défini comme l'ensemble des* x *de* V *dont la distance à* M *est inférieure à* ε, ε *étant choisi de telle sorte que les relèvements d'holonomie soient définis. Alors il existe un voisinage* $U \subset U_\varepsilon$ *de* M *et un homéomorphisme* $H : U \to H(U) \subset G/\Gamma_{x_0} \times [0, 1]$ *tel que :*

a) H *coïncide sur la normale issue de* x_0 *avec la conjugaison de* λ_0 *et* σ.

b) Sur M, H *coïncide avec* $\tilde{\Phi}_{x_0}^{-1}$ *et en particulier, sur* M, H *conjugue* $\Phi(u)$ *et* $\bar{u}$ *(ou* u *est un élément quelconque de* $\mathscr{G}$*).*

c) H *envoie les feuilles de* $\mathscr{F}(\Phi) \cap U$ *sur les feuilles de* $\mathscr{F}(\Omega) \cap U$. H *est* C^2 *le long des feuilles.* H *est* C^0 *dans* U *et* C^1 *dans* $U - M$. *La différentielle de* H *est définie pour les champs* $\Phi(u)$ (u *dans* $\mathscr{G}$) *tangents aux feuilles de* $\mathscr{F}(\Phi)$.

d) H *envoie les arcs de normales issus des points* x *de* M *sur les segments issus des points* $(g\Gamma_{x_0}, 0)$ (*où* $g\Gamma_{x_0} = \tilde{\Phi}_{x_0}^{-1}(x)$). H *est donc « équivariant » pour la projection* π *de voisinage tubulaire et pour la projection*

$$p : G/\Gamma_{x_0} \times [0, 1] \to G/\Gamma_{x_0}.$$

Définissons les « relevés locaux » d'éléments de $\mathscr{G}$. Notons $\tilde{u}$ le champ défini dans U_ε et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) $\tilde{u}_x$ est tangent à la feuille L_x issue de x (où x est un point de U_ε).

b) $\pi_* \tilde{u}_x = \Phi(u)_{\pi(x)}$ (et en particulier $\tilde{u}_x = \Phi(u)_x$ si x est dans M. La propriété *d)* de l'homéomorphisme H, jointe à la relation $H = \tilde{\Phi}_{x_0}^{-1}$ sur M permet d'écrire immédiatement :

$$\begin{aligned} H_*(\tilde{V}_i) &= Y_i = -\alpha_i t(1-t)\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{\varphi}_i, 0) \\ H_*(\tilde{W}_j) &= (\overline{W}_j, 0) \end{aligned}$$

En particulier $t \circ H$ est une fonction de Liapounov (C^1 dans $U - M$) pour $\tilde{\varphi}_i$ car,

$$\langle dt, H_* \tilde{\varphi}_i \rangle = \langle dt, Y_i \rangle = -\alpha_i t(1-t)$$

Si x est dans U, l'ensemble asymptotique $\omega^+(x)$ des orbites de $\tilde{\varphi}_i$ est inclus dans M.

Montrons que ce phénomène est plus général. Ceci introduit l'étape 3.

Étape 3 *: Définition de* ω_M.

Soit $\omega_M = \sum_{k=1}^{k=s} \alpha_k \omega^k$ la forme biinvariante définie dans G. $\omega_M^{-1}(0)$ est l'image réciproque par Λ_0 de l'hyperplan

$$0 = \sum_{k=1} \alpha_k dx^k$$

de $\hat{R}_0$.

Montrons que, si u est dans $\mathscr{G}$ et tel que $\langle \omega_M, u \rangle > 0$, les orbites de $\Phi(u)$ et $\tilde{u}$ admettent la fonction $t \circ H$ comme fonction de Liapounov sur un certain voisinage de M.

Soit $u = \sum_{i=1}^{i=s} u_i \overline{V}_i + \sum_{j=1}^{j=n-s-1} u'_j \overline{W}^j$

$$\langle \omega_M, u \rangle = \sum_{i=1}^{i=s} \alpha_i u_i$$

En chaque point de U, le système des $\tilde{\varphi}_i$ et des $\tilde{\varpi}_j$ forme une base de l'espace tangent à la feuille en ce point. Il existe des fonctions μ_i et μ'_j telles que :

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{i=s} \mu_i \tilde{V}_i + \sum_{j=1}^{j=n-s-1} \mu'_j \tilde{W}_j$$

Les fonctions μ_i et μ_j coïncident avec u_i et u'_j sur M (puisque, sur M, $\tilde{V}_i = \Phi(V_i)$, $\tilde{W}_j = \Phi(W_j)$).

A l'étape précédente, nous obtenons les relations :

$$\begin{aligned} H_* \tilde{V}_i &= Y_i = -\alpha_i t(1-t) \frac{\partial}{\partial t} + (\overline{V}_i, 0) \\ H_* \tilde{W}_j &= (\overline{W}_j, 0) \\ H_* \Phi(u) &= (\tilde{u}, 0) \quad \text{sur} \quad M \end{aligned}$$

On déduit alors

$$\begin{aligned} \langle dt, H_* \tilde{V}_i \rangle &= -\alpha_i t(1-t) \\ \langle dt, H_* \tilde{W}_j \rangle &= 0 \end{aligned}$$

et dans $G/\Gamma_{x_0} \times \{0\}$:

$$H_* \Phi(u) = \sum_{i=1}^{i=s} u^i(\overline{V}_i, 0) + \sum_{j=1}^{j=n-s-1} u'_j(\overline{W}_j, 0)$$

Notant $H(x) = (g\Gamma_{x_0}, t)$, on peut écrire dans $H(U)$:

$$\begin{aligned} (H_* \Phi(u))_{(g\Gamma_{x_0}, t)} = &\sum_{i=1}^{i=s} (\mu_i \circ H^{-1})_{(g\Gamma_{x_0}, t)} Y_i \\ &+ \sum_{j=1}^{j=n-s-1} (\mu'_j \circ H^{-1})_{(g\Gamma_{x_0}, t)} (\overline{W}_j, 0) \end{aligned}$$

Si $d(x, M)$ tend vers 0, t tend vers 0. Utilisant alors les

relations établies plus haut, on peut écrire :

$$\langle dt, \mathrm{H}_*\Phi(u)\rangle_{(g\Gamma_{x_0}, t)} = -t(1-t)\left(\sum_{i=1}^{i=s} \alpha_i u_i + \varepsilon\right)$$
$$= -t(1-t)(\langle \omega_{\mathrm{M}}, u\rangle + \varepsilon)$$

ε est une fonction de $(t, g\Gamma_{x_0})$ tendant vers 0 avec t.

Supposant $\langle \omega_{\mathrm{M}}, u\rangle = 1$, il y a un voisinage $\mathrm{U}_{\mathrm{M}} \subset \mathrm{U}$ tel que $\langle dt, \mathrm{H}_*\Phi(u)\rangle_{\mathrm{H}(x)} < -\frac{1}{2}t(1-t)$, si x est dans $\mathrm{U}_{\mathrm{M}} - \mathrm{M}$. Pour u tel que $\langle \omega_{\mathrm{M}}, u\rangle > 0$, $\langle dt, \mathrm{H}_*\Phi(u)\rangle < 0$ puisque Φ conserve la colinéarité.

La démonstration pour $\tilde{u}$ est plus simple car $\langle dt, \mathrm{H}_*(\tilde{u})\rangle$ est exactement égal à $-t(1-t)\langle \omega_{\mathrm{M}}, u\rangle$.

Étape 4 : La définition de f_{M} et ses propriétés.

Posons maintenant $f_{\mathrm{M}} = t \circ \mathrm{H}$ sur U_{M}, f_{M} satisfait à toutes les propriétés annoncées au paragraphe C ii). Montrons que le cobordisme entre $\mathrm{M} = f_{\mathrm{M}}^{-1}(0)$ et $\mathrm{M}_\varepsilon = f_{\mathrm{M}}^{-1}(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ et dans l'image de f_{M}) est trivial. Il suffit de remarquer que les surfaces de niveau M_ε sont les images réciproques par H des «horizontales» du modèle proches de $\mathrm{G}/\Gamma_{x_0} \times \{0\}$. Ces dernières sont transverses aux segments. Les surfaces M_ε sont C^1 (rappelons que H et donc f_{M} est C^0 dans U_{M} et C^1 dans $\mathrm{M} - \mathrm{U}_{\mathrm{M}}$) et transverses aux arcs de normales issus des points de M puisque H conjugue segments et normales. Ces arcs fournissent une trivialisation naturelle du cobordisme entre M_ε et M.

Étape 5 : J_{M} contient les stabilisateurs des feuilles ouvertes dont l'adhérence contient M.

Si x est dans $\mathrm{U}_{\mathrm{M}} - \mathrm{M}$ la feuille issue de x est ouverte et contient M dans son adhérence. Si d est un élément de Γ_x et si $\exp \mathrm{X} = d$, $\Phi(\mathrm{X})$ a une orbite fermée au point x. On a nécessairement $\langle \omega_{\mathrm{M}}, \mathrm{X}\rangle = 0$, puisque dans le cas contraire, M serait une attraction de l'orbite de X ou de $-\mathrm{X}$. Il en résulte que d est dans J_{M}.

Conclusion.

Remarquons que les feuilletages induits sur les surfaces de niveau M_ε sont C^1-conjugués par H au feuilletage linéaire

de $G/\Gamma_{x_0} \times \{t\}$ définis par la forme $\sum_{k=1}^{k=s} \alpha_k \overline{\omega}_k$. La forme «séparatrice » ω_M est donc liée très simplement à la classe de conjugaison des feuilletages induits.

PARTIE II

Nous nous proposons d'aborder maintenant la démonstration du théorème 2. Utilisant un raisonnement exactement identique à celui qui permet de se débarrasser des feuilles compactes non isolées dans le cas de R^2 (cf. [12]), la preuve du théorème de cobordisme est en fait ramenée à la démonstration de la proposition qui suit :

Proposition PIIO. — *Soit* V *une variété à bord. On suppose satisfaites les conditions de l'énoncé du théorème* 2. *On suppose de plus que* Φ *agit à l'intérieur de* V *sans orbite compacte (les composantes de* ∂V *sont alors les seules orbites compactes).*

Alors il existe un difféomorphisme C^1 *de* V *sur* $G/\Gamma \times [0, 1]$ *ou* Γ *est un sous-groupe uniforme convenable de* G.

Cette proposition sera établie en trois étapes.

La première étape fera intervenir expressément les conditions techniques précisées dans l'énoncé du théorème 2. Il s'agira en fait de montrer que G_M (où M est l'une des composantes du bord et G_M « le groupe des noyaux » associée à M dans la première partie) agit sur les feuilles ouvertes dont l'adhérence contient M de telle sorte que ses orbites soient compactes. Ceci implique en fait (cf. conclusion à la fin) que G_M « absorbe » les stabilisateurs des feuilles ouvertes (on savait dans la première partie que $J_M \supset G_M$ jouissait de cette propriété).

La deuxième étape consiste à montrer que l'ensemble ouvert $\mathscr{D}$ des points de V tels que l'ensemble $\omega^+(x)$ associé à $\Phi(V_s)$, ($\langle \omega_M, V_s \rangle = 1\, f_M$ est donc de Liapounov pour $\Phi(V_s)$) est saturé pour Φ.

Cette étape cruciale assure le passage du local au global.

Une troisième étape ramène enfin le problème à la situation

classique de ([3] et [12]) où un système de variétés transverses est construit au voisinage de chaque composante de V.

Étape 1 : *Le problème de la compacité des orbites de* G_M.

Nous nous plaçons donc dans la situation de la proposition II. Soit M une des composantes du bord et x_0 un point de base choisi sur M. M est naturellement isolée d'un côté et les résultats de la partie I lui sont applicables. Le germe de feuilletage au voisinage de M est conjugué au germe d'un modèle standard. Le feuilletage de ce modèle est transverse aux fibres d'un fibré trivial. L'homotopie des feuilles ouvertes est donnée par l'homotopie des variétés relevées suivant les segments, des orbites de G_M sur $G/\Gamma_{x_0} \times \{0\}$. Ces variétés compactes et de dimension $n - s - 1$ peuvent être aussi décrites comme les variétés intégrales de la distribution $\{(\overline{W}_j, 0)\}$ définies sur $G/\Gamma_{x_0} \times [0, 1]$.

Ces sous-variétés donnent aussi l'homotopie des feuilles du feuilletage induit par les feuilles ouvertes de $\mathscr{F}(\Omega)$ sur les « horizontales » $t = c^{te}$ $(t \neq 0)$ du modèle. Le groupe d'homotopie de ces sous-variétés est isomorphe à $\operatorname{Ker} \lambda_0$.

Soit x_1 un point de U_M situé sur l'arc de normale (que nous noterons N dans la suite) issu de x_0. Si L_{x_1} est l'orbite de Φ issue de x_1, $\overline{L}_{x_1} \supset M$. Notons M_1 la surface de niveau de f_M à laquelle x_1 appartient. $\mathscr{F}(\Phi)$ induit sur M_1 un feuilletage C^1-conjugué au feuilletage linéaire induit dans le modèle sur les « horizontales ». La sous-variété $(\tilde{W}_M)_{x_1}$ relevée en x_1 sur L_{x_1} de l'orbite de G_M en x_0 donne l'homotopie de la feuille l_{x_1} du feuilletage induit à laquelle appartient x_1. Observant les orbites de $\tilde{V}_s$ dans U_M, on construit aisément un difféomorphisme de $l_{x_1} \times \mathbf{R}$ sur L_1^+ composante connexe de $L_{x_1} \cap A_1$, où A_1 est la sous-variété (difféomorphe à $M \times [0, 1]$) bordée par M et M_1.

$\tilde{W}_{x_1}$ donne donc l'homotopie de L_1^+. $\mathscr{F}(\Phi)$, provenant des orbites d'une action de groupe, il est sans cycle évanouissant et l'homotopie de $\tilde{W}_{x_1}$ s'injecte dans l'homotopie de L_{x_1}. Relevant suivant le revêtement Φ_{x_1} et utilisant l'isomorphie de $\pi_1(\tilde{W}_{x_1}, x_1)$ avec $\operatorname{Ker} \lambda_0$, on déduit l'existence d'un sous-groupe H_1 de Γ_{x_1} isomorphe à $\operatorname{Ker} \lambda_0$. H_1 se décrit géomé-

triquement comme un sous-groupe discret de G et engendré par l'ensemble des extrémités des relevés via Φ_{x_1} des orbites des $\tilde{W}_j (1 \leqslant j \leqslant n - s - 1)$ qui sont fermées et de période un en x_1 ($\Phi(W_j) = \tilde{W}_j$ sur M à son orbite fermée et de période un en x_0).

Toute cette étape va consister à montrer que ces générateurs de H_1 sont dans G_M et on déduira alors $H_1 \subset G_M$. Montrons que cette inclusion implique la compacité de l'orbite de G_M en x_0. G_M étant distingué dans G, *toutes* les orbites de G_M sur L_{x_1} seront alors compactes.

Remarquons que $G_M \cap \Gamma_{x_1}$ est le stabilisateur de l'action de G_M en x_1 et $H_1 \subset G_M \cap \Gamma_{x_1}$. Il en résulte que $G_M/G_M \cap \Gamma_{x_1}$ est compacte puisque G_M/H_1 l'est (H_1 est un sous-groupe de G_M isomorphe à un sous-groupe uniforme de G_M). Le quotient $G_M/G_M \cap \Gamma_{x_1}$ est difféomorphe à l'orbite de G_M en x_1 et celle-ci est donc compacte.

Introduisons les notations suivantes :

$C_x(\tilde{W}_j)$ est l'orbite de $\tilde{W}_j$ au point x de l'arc N (celle-ci est fermée de période un). K dénote $\bigcup_{x \in N} C_x(\tilde{W}_j)$. Via Φ_x, $C_x(\tilde{W}_j)$ se relève suivant un élément $d'_j(x)$. En particulier $d'_j(x_0) = d'_j$ et $d'_j(x_1)$ est dans H_1. La continuité de Φ, jointe à la propriété de revêtement assure que, si $x \to x_0$ sur N, $d'_j(x) \to d'_j$ dans G (*).

Il est évident que, si x est sur N, $C_x(W_j)$ induit un élément de $H_1(V, Q)$ ne dépendant pas de x. Ceci introduit le critère suivant :

LEMME LII-1_1. (*Critère d'appartenance à* G_M). — *Supposons qu'il existe une suite* (x'_n) *de points de* L_{x_1} *telle que*

a) $(x'_n)_{n \in N}$ *reste sur* N, $x'_1 = x_1$ *et* $x'_n \to x_0$, *quand*

$$n \to +\infty.$$

b) Les orbites $C_{x'_n}(\tilde{W}_j)$ *de* $\tilde{W}_j$ *aux points* x'_n *induisent un élément constant dans* $H_1(L_{x_1}, Q)$ (*et donc égal à la classe d'homologie de* $C_{x_1}(\tilde{W}_j)$ *dans* $H_1(L_{x_1}, Q)$.

Alors le relevé $d'_j(x_1)$ *appartient à* G_M.

(*) Ceci est d'ailleurs utilisé pour montrer que $\mathscr{F}(\Phi)$ n'admet pas de cycles évanouissants.

Posons, pour simplifier $d'_j(x_1) = d'_1$ et

$$d'_j(x'_n) = d'_n, \quad C_1 = C_{x_1}(\tilde{W}_j);$$

$C_n = C_{x'_n}(\tilde{W}_j)$, $C_0 = C_{x_0}(\tilde{W}_j)$. Soit donc $a = \delta(d'_1, G_M)$. G_M étant fermé, il suffit de voir que $a = 0$. Supposant $a \neq 0$ et utilisant la continuité de Φ, il existe n_0 tel que

$$\delta(d'_{n_0}, d'_j) < \frac{a}{2}.$$

On en déduit $\delta(d'_{n_0}, G_M) < \dfrac{a}{2}$ (1).

x'_{n_0} étant sur L_{x_1}, il existe un élément γ de G tel que $x'_{n_0} = \gamma . x_1$. Il y a aussi un élément X de $\mathcal{G}$ tel que

$$\exp X = \gamma.$$

Soit $C_\gamma : [0, 1] \to L_{x_1}$ le chemin d'origine x_1 et d'extrémité x'_{n_0} défini par $t \longmapsto \exp tX . x_1 . C_{\gamma-1} * C_{n_0} * C_\gamma$ est un lacet fermé en x_1 (cf. fig. 1 ci-dessous).

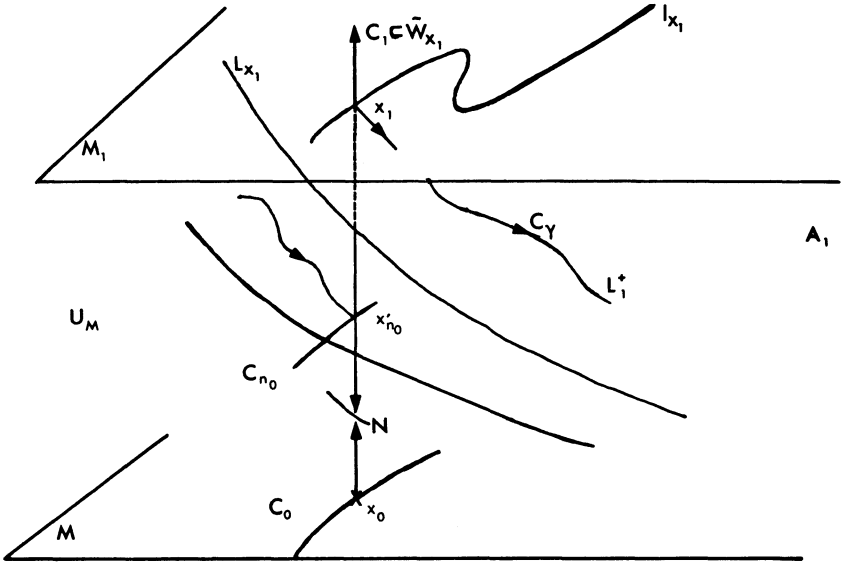

Fig. 1.

Ce lacet est naturellement homologue dans L_1^+ à C_{n_0}. Appliquant maintenant *b*), C_{n_0} étant homologue à C_1, C_1 et

$C_{\gamma-1} * C_{n_0} * C_\gamma$ sont homologues dans L_{x_1}. Si $[C_1]$ et

$$[C_{\gamma-1} * C_{n_0} * C_\gamma]$$

sont leurs classes d'homotopie dans $\pi_1(L_{x_1}, x_1)$,

$$[C_1][C_{\gamma-1} * C_{n_0} * C_\gamma]^{-1}$$

est un élément de $\pi_1(L_{x_1}, x_1)$ dont une puissance est dans le commutateur $\{\pi_1(L_{x_1}, x_1), \pi_1(L_{x_1}, x_1)\}$. Relevons via Φ_{x_1} cette situation dans G. On en déduit que l'élément $d'_1\gamma d'^{-1}_{n_0}\gamma^{-1}$ a une puissance dans $\{\Gamma_x, \Gamma_x\}$ et donc dans $\operatorname{Ker}\Lambda_0$. Il en résulte immédiatement que $k(\Lambda_0(d'_1) - \Lambda_0(d'_{n_0})) = 0$ pour un entier k. Il existe donc un élément ρ_0 de $\operatorname{Ker}\Lambda_0 = G_M$ tel que $d'_{n_0} = d'_1\rho_0$. L'invariance à droite implique que

$$a = \delta(d'_1, G_M) = \delta(d'_{n_0}, G_M).$$

Retournant à l'inégalité (1) du début, $a < \frac{a}{2}$ ce qui est absurde. Ceci entraîne bien que d'_1 est un élément de G_M. Pour montrer que $H_1 \subset G_M$ il suffira donc d'appliquer le critère à tous les d'_j $(1 \leqslant j \leqslant n - s - 1)$.

Lemme LII.1_2. *Vérification de la compacité des orbites de* G_M *lorsque* H_1 *est supposée satisfaite.*

a) Si $\operatorname{Codim} \mathscr{G}_M = 1$, *la relation* $\mathscr{G}_M \subset \mathscr{J}_M$ *entraîne* $G_M = J_M . J_M$ *contenant les stabilisateurs des points de* L_{x_1}, G_M *contient* Γ_{x_1}. *Comme* $H_1 \subset \Gamma_{x_1}$, $H_1 \subset G_M$ *ce qui donne la compacité cherchée.*

b) Supposons maintenant que C_2 *soit satisfaite. Il faut cette fois avoir recours au critère d'appartenance à* G_M. *Gardons les notations de la figure* 1 *et retournant à la démonstration du critère, on voit qu'il suffit en fait de montrer que* C_1 *est homologue à* C_{n_0} *dans* L_{x_1}.

On sait que l'homotopie de L_1^+ est donnée par celle $\tilde{W}_{x_1}$. Il y a un lacet C'_{n_0} de $\tilde{W}_{x_1}$, fermé en x_1 et homotope dans L_1^+ à $C_{\gamma-1} * C_{n_0} * C_\gamma$. C'_{n_0} et C_1 sont homologues dans $K \subset A_1$, puisque C_{n_0} et C_1 le sont. L'homotopie de A_1 est donnée par celle de M_1. C'_{n_0} et C_1 sont en fait homologues dans M_1. La propriété de monomorphisme entraîne immédiatement que C'_{n_0} et C_1 sont homologues dans $\tilde{W}_{x_1}.C_{\gamma-1} * C_{n_0} * C_\gamma$ et C_1 sont donc homologues dans L_1^+ et enfin C_{n_0} et C_1

le sont aussi. Le critère LII.1_1 est satisfait pour tous les d'_j et $H_1 \subset G_M$. Les orbites de G_M sont donc compactes sur L_{x_1}.

Remarque. — Il est évident que cette condition est satisfaite pour $G = \mathbf{R}^n$ puisque alors l'homologie entière et l'homotopie sont confondues. L'homotopie des feuilles $(\approx S_1^{n-s-1} \times R^s)$ s'injecte dans $M \approx T^{n-1}$ et est donnée par l'orbite de $G_M(\approx R^{n-s-1})$ qui est un tore T^{n-s-1}.

LEMME LII.1_3. *Vérification de la compacité des orbites de* G_M *sur* L *lorsque* H_2 *est satisfaite. — On suppose donc cette fois que* G *est l'un des groupes de Heisenberg de dimension* $2n+1$ *décrits dans l'énoncé du théorème* 2.

A priori, *deux cas se présentent puisqu'on voit immédiatement que* $\dim [\mathscr{G}, \mathscr{G}] = 1$.

a) $$[\mathscr{G}_M, \mathscr{G}_M] = [\mathscr{G}, \mathscr{G}] = \mathbf{R}\mathrm{I}$$

b) $$[\mathscr{G}_M, \mathscr{G}_M] = 0$$

a) Nous montrons que ce cas implique en fait la condition C_2 *précédente. Il suffit de montrer que tout élément de* $\{\Gamma_{x_0}, \Gamma_{x_0}\}$ *a une puissance dans* $\{\mathrm{Ker}\,\lambda_0, \mathrm{Ker}\,\lambda_0\}$.

Si $W_1, \ldots, W_{2n+1-s}, V_1, \ldots, V_s$ *désigne le système des vecteurs construit dans la première partie, leurs exponentielles engendrent* Γ_{x_0}, *uniforme dans* G, *et ils constituent donc une base de Malcev* (cf. Th. 2.12 de 10).

Il existe un élément u_0 *tel que* $\mathbf{R}u_0 = \mathbf{R}\mathrm{I} = [\mathscr{G}, \mathscr{G}]$ *et tel que :*

$$\begin{aligned} [W_i, W_j] &= C_{ij}u_0 \\ [W_k, V_l] &= C'_{kl}u_0 \\ [V_m, V_n] &= C'_{mn}u_0 \end{aligned} \qquad C_{ij}, C'_{kl}, C'_{mn} \textit{ rationnels}$$

La formule de Cambdell-Hausdorff prend ici la forme très simple $\exp [XY] = \{\exp X, \exp Y\}$. Des formules précédentes, on déduit immédiatement que $\{\Gamma_{x_0}, \Gamma_{x_0}\}$ est engendré par les puissances de $\exp \rho_0 u_0$ où ρ_0 est un rationnel convenable. Dans les relations de crochet, $[W_i, W_j] = C_{ij}u_0$, les C_{ij} sont des rationnels non tous nuls car nous sommes dans l'hypothèse $[\mathscr{G}_M, \mathscr{G}_M] \neq 0$. Soient i_0 et j_0 tels que $C_{i_0 j_0} \neq 0$. Il vient alors

$$\exp C_{i_0 j_0} u_0 = \exp [W_{i_0}, W_{j_0}] = \{\exp W_{i_0}, \exp W_{j_0}\}$$

Soit maintenant γ dans $\{\Gamma_{x_0}, \Gamma_{x_0}\}$. Il existe un entier k tel que $\gamma = \exp \rho_0 k u_0 = \exp [W_{i_0}, W_{j_0}]$. Si $\rho_0 = \frac{r}{s}$, γ^s est donc dans $\{\operatorname{Ker} \lambda_0, \operatorname{Ker} \lambda_0\}$ et la condition C_2 est satisfaite pour M si $[\mathscr{G}_M, \mathscr{G}_M] \neq 0$.

b) Supposons maintenant $\mathscr{G}_M$ abélienne.

Remarquons que l'on peut se limiter au cas $s \geqslant 2$ puisque si $s = 1$, codim $\mathscr{G}_M = 1$ et ceci a déjà été traité ((*a*) de LII.1_2).

Sous-Lemme SLII.1_4. — *Si* $[\mathscr{G}_M, \mathscr{G}_M] = 0$ *et si*

$$\operatorname{codim} \mathscr{G}_M \geqslant 2,$$

on peut associer à chaque élément W_j, *un élément* Z_j *de* $\mathscr{G}$ *tel que*

— $[Z_j, W_j] = 0$.
— $\langle \omega_M, Z_j \rangle > 0$.
— $\exp Z_j$ *est dans* Γ_{x_0}.

Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que tous les V_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ sont tels que $[W_j, V_i] \neq 0$. En effet, si $[W_j, W_{i_0}] = 0$, V_{i_0} répond à la question.

Posons *a priori:* $Z = \sum_{\substack{i=1 \\ s \geqslant 2}}^{i=s} \lambda_i V_i$.

On doit trouver des λ_i tels que :

$$0 = [Z, W_j] = \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i [V_i, W_j] = \sum_{\substack{i=1 \\ s \geqslant 2}}^{i=s} \lambda_i \rho_{ij} u_0$$

Les ρ_{ij} sont des rationnels dont aucun n'est nul.

Soit $\rho_{1j} = \frac{p_1}{q_1}$, $\rho_{2j} = \frac{p_2}{q_2}$. Le choix

$$\lambda_1 = q_1 p_2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = -q_2 p_1, \quad \lambda_i = 0$$

$i \geqslant 3$ donne un élément $Z = q_1 p_2 V_1 - q_2 p_1 V_2$ tel que $[Z, W_j] = 0$, $\langle \omega_M, Z \rangle = q_1 p_2 \alpha_1 - q_2 p_1 \alpha_2$. α_1 et α_2 sont des réels rationnellement indépendants. Changeant au besoin le signe de Z, Z satisfait aux deux premières conditions du sous-lemme mais pas *a priori* à la troisième. λ_1 et λ_2 ayant

les valeurs déterminées plus haut, définissons Z_j par

$$\exp Z_j = \exp \lambda_1 V_1 \exp \lambda_2 V_2.$$

Exp Z_j est dans Γ_{x_0}. Montrons que Z_j s'écrit

$$Z_j = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + X$$

où X est dans $\mathscr{G}_M$ (et commute donc avec W_j).

$$\Lambda_0 (\exp Z_j) = \exp \Lambda_{0*} Z_j = \Lambda_{0*}(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + X) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \Lambda_{0*} X.$$

$$\Lambda_0 (\exp \lambda_1 V_1)(\exp \lambda_2 V_2) = \Lambda_0 (\exp \lambda_1 V_1) + \Lambda_0 (\exp \lambda_2 V_2) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2.$$

$\Lambda_{0*}(X) = 0$ et X est bien dans $\mathscr{G}_M$. Il en résulte que Z_j satisfait à toutes les conditions de SLII.1_4 puisque

$$\langle \omega_M, X \rangle = 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que le critère d'appartenance à G_M est satisfait si $[\mathscr{G}_M, \mathscr{G}_M] = 0$.

Des conditions imposées à Z_j il résulte que le flot associé à Z_j envoie une orbite de $\tilde{W}_j$ sur une autre orbite de $\tilde{W}_j$ (puisque $[\tilde{Z}_j, \tilde{W}_j] = [Z_j, W_j] = 0$).

$\tilde{Z}_j$ admet M pour attracteur dans U_M.

$\tilde{Z}_j (= \Phi(Z_j)$ sur $M)$ a une orbite fermée de période un au point de base x_0.

L'orbite de $\tilde{Z}_j$ issue de x_1 s'enroule donc autour de celle issue de x_0. L'image au temps $t = n$ du point x_1 par le flot induit par $\tilde{Z}_j$ est un point x'_n. L'image par ce flot de l'orbite C_1 de $\tilde{W}_j$ en x_1 au temps $t = n$ est l'orbite $C_{x'_n}$ de $\tilde{W}_j$ en x'_n. C_1 et $C_{x'_n n \in N}$ sont homologues dans L_1^+ et $(x'_n)_{n \in N}$ est la suite exigée par le critère. Ceci termine l'étape 1.

Étape 2: Le bassin d'attraction de M (*) *pour* $\Phi(V_s)$ *est saturé pour l'action* Φ.

V_s étant tel que $\langle \omega_M, V_s \rangle = 1$, M est bien un attracteur pour $\Phi(V_s)$. Nous notons D le bassin d'attraction de M.

(*) C'est l'ouvert de V défini comme l'ensemble des points x tels que $\omega^+(x) \subset M$.

C'est un ouvert de V contenant U_M. Montrons tout d'abord le lemme suivant.

LEMME LII.2_1. — *Il existe sur* G *une métrique invariante à droite telle que la distance des images de deux orbites* $G_M g$ *et* $G_M g'$ *de* G_M (*lorsque celui-ci agit à gauche sur* G) *par le flot induit sur* G *par* V_s *soit constante.*

Remarquons que G_M étant distingué, le flot induit par V_s est compatible avec la fibration $G_M \to G \xrightarrow{\Lambda_0} \hat{R}_0$ i.e. envoie une fibre sur une autre fibre.

Il existe sur $\hat{R}_0$ une métrique euclidienne biinvariante unique telle que $\{f_{i_0}\}$ constitue une base orthonormale en 0 à $\hat{R}_0$. Il existe sur G une métrique unique, invariante à droite telle que $\{(V_i)_e, (W_j)_e\}$ $(1 \leqslant i \leqslant s, 1 \leqslant j \leqslant n - s - 1)$ constitue une base orthonormale de l'espace tangent en e à G.

Compte tenu des relations entre V_i, W_j, f_i cette métrique est compatible avec la fibration $G_M \to G \xrightarrow{\Lambda_0} \hat{R}_0$ et la distance δ de deux fibres $G_M g$ et $G_M g'$ est mesurée par la distance entre $\Lambda_0(g)$ et $\Lambda_0(g)$.

Maintenant si $\hat{\psi}$ est le flot induit par V_s sur G,

$$\hat{\psi}(t, g) = \exp t\, V_s . g.$$

Posons dans la suite, par commodité, $\exp t\, V_s = s_t$ et calculons $\delta(\hat{\psi}(t, G_M g'), \hat{\psi}(t, G_M g) = \delta(s_t G_M g', s_t G_M g)$. G_M étant distingué, $s_t G_M g' = G_M s_t g'$ et $s_t G_M g = G_M s_t g$.

La distance de ces deux fibres est la distance de leurs images par Λ_0 dans $\hat{R}_0$, soit, $\delta(\Lambda_0(s_t) + \Lambda_0(g'), \Lambda_0(s_t) + \Lambda_0(g))$. L'invariance par translation implique que cette quantité n'est autre que $\delta(\Lambda_0(g'), \Lambda_0(g))$, soit encore, $\delta(G_M g', G_M g)$.

Remarque. — Dans le cas abélien de [12] et [3], était utilisée implicitement la biinvariance de la métrique standard de $\mathbf{R}^{n-1}$. Ici la distance est invariante à droite et invariante à gauche « fibre à fibre ».

Reprenons la démonstration de l'étape 2 en gardant les notations de la figure 1 de l'étape 1. ψ désigne le flot induit

par $\Phi(V_s)$ sur V. Les points de $\mathscr{D}$ sont tels que leurs orbites coupent M.

Pour montrer que $\mathscr{D}$ est saturé par Φ, il suffira donc de montrer que si x_1 est dans M_1 alors la feuille L_{x_1} issue de x_1 est telle que $L_{x_1} \subset \mathscr{D}$. Ceci sera établi, si la relation (1),

$$L_{x_1} = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} \psi_t(t, l_{x_1})$$

est satisfaite.

Rappelons que A_1 est la sous-variété (difféomorphe à $M \times [0, 1]$) bordée par M et M_1. Utilisant la compacité des orbites de G_M sur les feuilles dont l'adhérence contient M, on en déduit l'existence d'un voisinage $U' \subset A_1$ de M et d'un nombre $\eta > 0$ tels que :

Si $x \in U'$ et si $y \in A_1$, la condition $\delta((W_M)_x, (W_M)_y) < \eta$ entraîne $(W_M)_y \subset A_1$.

Ajoutons que $\Phi(V_s)$ est tel qu'il existe un temps u_0 au-delà duquel toutes les images des points de l_{x_1} sont dans U'. Notons $L_0^+ = \bigcup_{u \geqslant u_0} \psi(u, l_{x_1})$; on en déduit $L_0^+ \subset U'$.

Examinons maintenant la situation induite dans G par le revêtement Φ_{x_1} (qui est une isométrie locale pour la distance choisie sur G, V et L_{x_1}).

Si $\hat{l}_e$ est la composante connexe du relèvement de l_{x_1} au point e de G, $\hat{l}_e$ est une sous-variété fermée de G ($\hat{l}_e$ est la composante connexe de l'image réciproque de l_{x_1} qui est fermée dans L_{x_1}). G est difféormorphe à $\mathbf{R}^{n-1}$ et $\hat{l}_e$ sépare donc G en deux composantes connexes K^+ et K^- (K^+ est la composante où V_s est rentrant). Il est clair que $\Phi_{x_1}(K^+) = L^+ = \bigcup_{t \geqslant 0} \psi(t, l_{x_1})$. D'autre part si

$$\hat{L}_0^+ = \bigcup_{t \geqslant u_0} \psi(t, \hat{l}_e), \quad \Phi_{x_1}(\hat{L}_0^+) \subset L_0^+.$$

Les propriétés énoncées plus haut relatives à U', L_0^+, η permettent alors d'affirmer que si g est dans $\hat{L}_0^+$ et g' dans G, $\delta(G_M g, G_M g') < \eta$ implique $G_M g' \subset K^+$ (en particulier le saturé de $\hat{L}_0^+$ pour l'action de G_M est dans K^+ et les fibres suffisamment voisines des fibres de $\hat{L}_0^+$ restent dans K^+).

Terminons maintenant la preuve de (1). Cette relation sera établie si $\bigcup_{t \in \mathbf{R}} \hat{\psi}(t, \hat{l}_e) = \mathrm{G}$.

Soit O l'ensemble des points de G tels que les orbites issues de ces points coupent $\hat{l}_e$. O est un ouvert non vide. Comme G est connexe, nous aurons terminé si $\mathrm{O} = \overline{\mathrm{O}}$. Soit donc g dans $\overline{\mathrm{O}}$. Il existe g' dans 0 tel que $\delta(g, g') < \eta$. g' étant dans O, il existe t' tel que $s_{t'} . g'$ est dans $\hat{l}_e$ et $s_{t'+u_0} . g'$ est dans $\hat{\mathrm{L}}_0^+$ (fig. 2). $\mathrm{G_M}$ étant distingué,

$$\mathrm{G_M} s_{t'+u_0} . g' = \hat{\psi}(t' + u_0, \mathrm{G_M} g').$$

Comme $\delta(g, g') < \eta$, $\delta(\mathrm{G_M} g, \mathrm{G_M} g') < \eta$ et $\hat{\psi}$ préservant la distance des fibres, $\delta(\hat{\psi}(t' + u_0), \mathrm{G_M} g, \hat{\psi}(t' + u_0, \mathrm{G_M} g')) < \eta$. Ceci fait apparaître la distance de la fibre $\mathrm{G_M} s_{t'+u_0} . g$ à la

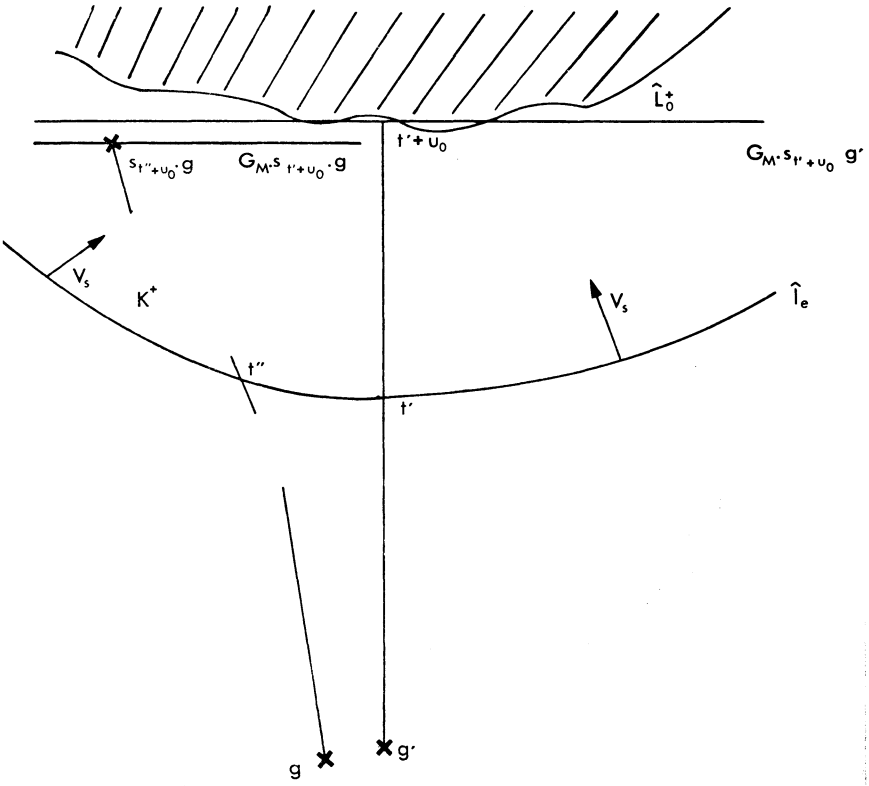

Fig. 2.

fibre $G_M s_{t'+u_0} . g'$ de $s_{t'+u_0} . g'$, ce dernier élément étant dans $\hat{L}_0^+ . G_M s_{t'+u_0} . g$ est donc dans K^+ et $s_{t'+u_0} . g$ est dans K^+. Il y a donc un temps t'' tel que $s_{t''} . g$ est dans $\hat{l}_e$ et g est dans O. Ceci termine le lemme de saturation.

Étape 3*: Le théorème de cobordisme.*

LEMME LII.3_1. — *Il y a dans* ∂V *une feuille* M′ *compacte et différente de* M. *Si* $\mathrm{Fr}\,\mathscr{D} = \complement\,\mathscr{D} \cap \overline{\mathscr{D}}$ *est la frontière de* $\mathscr{D}$, *l'étape précédente permet d'affirmer que c'est un fermé invariant par* Φ. *Montrons que* $\mathrm{Fr}\,\mathscr{D}$ *n'est pas vide.*

V étant connexe et $\mathscr{D}$ étant ouvert, il suffit de voir que $\complement\,\mathscr{D} \neq \emptyset$.

Si x_1 est un point de $U_M - M$, nous allons montrer que $\omega_{x_1}^- \subset \complement\,\mathscr{D}$. Si y est un point de $\omega_{x_1}^-$ dans $\mathscr{D}$, il y a un point y_1 de l'orbite de y dans U_M. Ce point est encore dans $\omega_{x_1}^-$ et il existe une suite $t_n \to -\infty$ telle que $\psi(t_x, x_1) \to y_1$. x_1 étant dans $U_M - M$, ceci est rendu impossible par l'existence de la fonction de Liapounov. $\mathrm{Fr}\,\mathscr{D}$ n'est donc pas vide.

C'est un ensemble fermé, invariant, non vide qui contient donc un ensemble minimal M′. M′ n'est pas exceptionnel puisque les feuilles sont à croissance polynomiale ([8], [9]). V n'étant pas minimal dans les conditions présentes, M′ est une orbite compacte, différente de M puisque $M' \subset \complement\,\mathscr{D}$. Ceci termine LII.$3_1$.

LEMME LII.3_2. — *Il y a un élément* V *dans* $\mathscr{G}$ *tel que:*

a) $\Phi(V)$ *est transverse à une surface de niveau de* f_M.

b) $\Phi(V)$ *est transverse à une des surfaces de niveau de* $f_{M'}$ *(où* $f_{M'}$ *est la fonction de Liapounov définie sur un voisinage* $U_{M'}$ *de* M′ *est construite dans la première partie).*

c) Si M_1 *et* M_1' *sont les deux surfaces précédentes, il existe une orbite de* $\Phi(V)$ *issue d'un point de* M′ *qui coupe* M_1.

Appliquons à M′ les résultats de la première partie. Il existe une forme $\omega_{M'}$, un voisinage $U_{M'}$, une fonction $f_{M'}$ définie sur $U_{M'}$ telle que, si u est dans $\mathscr{G}$ et $\langle \omega_{M'}, u \rangle > 0$,

$f_{M'}$ est de Liapounov pour $\Phi(u)$ dans $U_{M'}$. Comme

$$M' \subset \overline{\mathscr{D}} \cap \complement \mathscr{D},$$

il y a un point x' de $\mathscr{D} \cap U_M$, tel que $x' = \psi(t', x)$ où t' est un réel convenable et x un élément de M_1. *A priori* V_s est peut-être tel que $\langle \omega_{M'}, V_s \rangle = 0$ mais il existe un élément V de $\mathscr{G}$ proche de V_s tel que :

a) $\langle \omega_{M'}, V \rangle > 0$.

b) $\langle \omega_M, V \rangle > 0$.

c) L'orbite de $\Phi(-V)$ issue de x' dans $U_{M'}$ atteigne M_1. Les conditions *a*) et *b*) entraînent que $\Phi(V)$ est transverse aux surfaces de niveau de f_M et $f_{M'}$. Le lemme est alors démontré.

Utilisant la compacité et la connexité des surfaces de niveau, un argument classique montre que le cobordisme entre ces surfaces est C^1-trivial. Le cobordisme entre M_1 et M (resp M_1 et M') est C^1-trivial (cf. A 1re partie). Ceci achève la preuve du théorème de cobordisme dans les conditions du théorème 2.

Conclusion.

i) Le lemme de saturation montre en fait que toute orbite de $\Phi(V_s)$ sur L_{x_1} coupe l_{x_1} une fois et une seule. Il en résulte que L_{x_1} est difféomorphe à $l_{x_1} \times \mathbf{R}$. L'homotopie de L_{x_1} est donnée par l_{x_1} et donc par $\tilde{W}_{x_1}$. On en déduit que $\Gamma_{x_1} = H_1 \subset G_M$ et G_M absorbe les stabilisateurs des points de L_{x_1}.

ii) ω_M détermine la classe de conjugaison des feuilletages induits sur les surfaces de niveau de f_M.

Compte tenu de l'étape 3, dans le cas $G = G_{2K+1}$, une classification, au *type topologique près* des composantes (au sens de Novikov) de $\mathscr{F}(\Phi)$ est donc possible et peut être calquée sur [2] en utilisant des modèles linéaires. On en déduirait alors des résultats sur la stabilité structurelle des feuilletages comparables à ceux de [13].

Je tiens à remercier très vivement Monsieur Joubert pour ses critiques pertinentes et Monsieur Roussarie pour sa lecture attentive du manuscrit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Chatelet et H. Rosenberg, Un théorème de conjugaison des feuilletages, *Ann. Inst. Fourier*, 21,3 (1971), 95-106.
[2] G. Chatelet, H. Rosenberg and D. Weil, Classification of R^2-action up to topological type, *Cahier IHES*, 43 (1974).
[3] G. Chatelet and H. Rosenberg, Manifolds which admit R^n-action, *Cahier IHES*, 43 (1974).
[4] A. Haefliger, Variétés feuilletées, *Ann. E.N.S.* Pise série 3, 16 (1962).
[5] N. Koppell, Thèse Berkeley (1968).
[6] N. Koppell, Commuting diffeomorphisms, *Proceeding of symposia in pure mathematics*, XIV (1970).
[7] R. Moussu et F. Pelletier, Sur le théorème de Poincaré-Bendixon, *Ann. Inst. Fourier*, 24,1 (1974), 131-148.
[8] R. Moussu et R. Roussarie, Relation de cobordisme et de feuilletages, *Cahiers IHES*, 43 (1974).
[9] J. Plante, On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one.
[10] Ragunathan, Discrete Lie groups of Lie groups, Springer-Verlag.
[11] G. Reeb, Variétés feuilletées, Hermann (1952).
[12] R. Roussarie, H. Rosenberg and D. Weil, Classification of manifolds of rank two, *Ann. of Maths.*, 91 (1970), 449-464.
[13] H. Rosenberg et R. Roussarie, Stabilité des feuilletages de T^3, *Journal of Diff. Equations*, Vol. 10, n° 2 (1975).
[14] D. Tischler, On fibering certain foliated manifolds over S^1, *Topology*, 9 (1970), 153-154.

Manuscrit reçu le 16 février 1976
Proposé par G. Reeb.

Gilles Chatelet,
Université de Paris VII
Département de Mathématiques
2, place Jussieu
75005 Paris.