ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES ROYER
MARC YOR

Représentation intégrale de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathcal{C}(\mathbf{R})$; mesures extrémales et propriété de Markov

Annales de l'institut Fourier, tome 26, nº 2 (1976), p. 7-24
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1976__26_2_7_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
26, 2 (1976), 7-24.

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DE CERTAINES MESURES QUASI-INVARIANTES SUR $\mathscr{C}$(R); MESURES EXTRÉMALES ET PROPRIÉTÉ DE MARKOV

par G. ROYER et M. YOR (1)

Introduction.

A la suite de l'article [4] de P. Courrège et P. Renouard ainsi que des travaux de P. Priouret et des auteurs (cf [12], [13], [16]), on s'intéresse ici à certaines mesures sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ (2) qui sont quasi-invariantes sous les translations de $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ (2); de façon précise soit P un polynôme non constant borné inférieurement sur $\mathbf{R}$ et $a(f, \omega)$ la fonction sur $\mathscr{D}(\mathbf{R}) \times \mathscr{C}(\mathbf{R})$ donnée par :

$$a(f, \omega) = \exp \int_{\mathbf{R}} \left[(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t)) f''(t) - \mathrm{P}(\omega(t) + f(t)) + \mathrm{P}(\omega(t)) \right] dt,$$

on s'attache à l'étude du cône C de toutes les mesures μ positives bornées sur la tribu borélienne de $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ qui satisfont :

$$(\mathrm{Q}) \qquad \forall f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}) \quad \mu(f + d\omega) = a(f, \omega)\mu\,(d\omega)$$

(on dit que $a(f, \omega)$ est une version du module de quasi-inva-

(1) Équipes de recherche associées au C.N.R.S. n° 1 et 294.

(2) $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ (resp. : $\mathscr{D}(\mathbf{R})$) désigne l'espace des fonctions réelles continues sur $\mathbf{R}$ (resp. : indéfiniment dérivables à support compact. On munit $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

riance de μ). On établira les deux résultats principaux suivants :

1° toute mesure de C est intégrale de mesures appartenant aux génératrices extrémales de C;

2° toute mesure μ, élément d'une génératrice extrémale de C, est markovienne, au sens suivant : si pour $t \in \mathbf{R}$ on désigne par X_t la fonction sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ définie par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et si $\mathscr{F}_t^-$ est la tribu engendrée par les X_s, $s \leqslant t$, le processus $(\mu/\mu(1), \mathscr{F}_t^-, X_t)$ vérifie la propriété de Markov.

On rappelle que le caractère markovien d'une mesure quasi-invariante et le caractère local de son module de quasi-invariance sont liés (voir [4], n° 6,4).

0. Préliminaires et rappels.

Dans [4] ou [12] est construit un élément du cône C que l'on notera $\underline{\mu}$ et dont les propriétés suivantes seront utilisées par la suite :

1° $\underline{\mu}$ est une probabilité euclidienne, ce qui signifie que $\underline{\mu}$ est invariante par tout isomorphisme T_σ de $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ induit par une translation ou une symétrie σ de $\mathbf{R}([T_\sigma(\omega)](t) = \omega(\sigma(t)))$;

2° μ_0, loi commune des variables X_t, $t \in \mathbf{R}$, est donnée par $\mu_0\,(dx) = \rho(x)\,dx$ avec $\rho = \exp - 2\hat{\zeta}$, où $\hat{\zeta}$ désigne une primitive convenable de la fonction ζ déterminée en fonction du polynôme P par $\zeta\zeta' - \frac{1}{2}\zeta'' = P'$ et $\rho \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$. (cf. [4] n° 1,5 ou [12] n° 2,1).

3° $\underline{\mu}$ est la loi d'un processus de diffusion stationnaire, de générateur infinitésimal L donné par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}) \quad L(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi'' - \zeta.\varphi'.$$

La mesure $\underline{\mu}$ est donc markovienne et admet un semi-groupe de transition $P_t(x, dy)$. De plus pour $t > 0$ on a

$$P_t(x, dy) = p_t(x, y)\,dy,$$

la fonction $p_t(x, y)$ ayant les propriétés suivantes :

PROPOSITION 0.1. — 1° $p_t(x, y)$ *est indéfiniment dérivable et satisfait aux équations :*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_x\right) p = 0 \quad \textit{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - L_y^*\right) p = 0$$

avec :

$$L^*\varphi = \frac{1}{2} \varphi'' + (\zeta\varphi)'$$

2° p_t *satisfait à l'équation de Chapman-Kolmogorov :*

$$\forall x \, \forall y \in \mathbf{R} \quad p_{t+s}(x, y) = \int_{\mathbf{R}} p_t(x, z) p_s(z, y) \, dz.$$

La propriété 1) reprend le théorème 2 de [12] et la propriété 2) sera établie en 3.3.

Notations 0.2. — Étant donnés $s < t$ on note $\mathscr{F}_{s,t}$ (resp. $\mathscr{F}_t^+$) la tribu sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ engendrée par les X_u, $s \leqslant u \leqslant t$ (resp. : $u \geqslant t$); $\mu_{[s,t]}$ désigne l'image par l'application canonique : $\mathscr{C}(\mathbf{R}) \to \mathscr{C}([s, t])$ d'une mesure μ sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$; enfin $\mu_{\{s,t\}}$ est la mesure sur $\mathbf{R}^2$ image de μ par l'application (X_s, X_t); on utilisera la propriété suivante :

LEMME 0.3. — *La probabilité* $\underline{\mu}_{\{s,t\}}$ *admet une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue qui est strictement positive en tout point de* $\mathbf{R}^2$.

Démonstration. — On a évidemment

$$\underline{\mu}_{\{s,t\}} (dx, dy) = p_{t-s}(x, y)\rho(x) \, dx \, dy$$

et p_t et ρ sont continues et strictement positives.

Contrairement à l'usage on note $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R} | t > 0\}$, (resp : R^-, $<$), et on note $L_+^0(\mathbf{R}^2)$ le cône des classes de fonctions positives et mesurables pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$.

DÉFINITION 0.4. — *On appelle* D *le cône des applications* d : $\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \to L_+^0(R^2)$, $(s, t) \longmapsto d_{s,t}$ *telles que* $d_{s,t}(X_s, X_t)$ *soit une* $(\mu, \mathscr{F}_{s,t})$ *martingale intégrable; autrement dit,* $d_{s,t}(x, y)$ *étant une version quelconque de* $d_{s,t}$, *on a pour* $s_1 \leqslant s_2 < 0$,

$t_1 \geqslant t_2 > 0$ *et presque tout* (x, y) :

$$(\varepsilon) \qquad d_{s_2, t_2}(x, y) = \int_{\mathbf{R}^2} d_{s_1, t_1}(u, v) \mathrm{P}_{s_2 - s_1}(x, du) \mathrm{P}_{t_1 - t_2}(y, dv)$$

et $\underline{\mu}_{\{s,t\}}(d_{s,t}) < \infty$ (on se limite à $s < 0$ *et* $t > 0$ par commodité pour la fin de ce travail).

On s'appuiera par la suite sur :

Proposition 0.5. — 1° *pour toute mesure* $\mu \in \mathrm{C}$, $\mu_{[s,t]}$ *est équivalente à* $\underline{\mu}_{[s,t]}$ *et il existe un élément* d *de* D *tel que pour* $s < 0$, $t > 0$, $\mu_{[s,t]} = d_{s,t}(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_t)\underline{\mu}_{[s,t]}$. *L'application*

$$\mathscr{J} : \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{D}$$

ainsi définie est un isomorphisme de cônes.

2° *pour que* μ *soit markovienne il faut et il suffit que* $d_{s,t}$ *soit décomposée c'est-à-dire qu'il existe des fonctions sur* $\mathbf{R}$, φ_s^+ *et* φ_t^- *telles que :*

$$\forall s < 0, t > 0 \quad \textit{pour presque tout } (x, y) \quad d_{s,t}(x, y) = \varphi_s^+(x)\varphi_t^-(y)$$

Démonstration. — 1° L'existence de l'application $\mathscr{J}$ est reprise de [13], prop 11. D'autre part étant donné $d \in \mathrm{D}$ si l'on définit la mesure $\mu^{s,t}$ sur $\mathscr{C}([s, t])$ par

$$\mu^{s,t} = d_{s,t}(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_t)\underline{\mu}_{[s,t]})$$

l'équation (ε) exprime que le système $\mu^{s,t}$ est projectif (pour les applications canoniques : $\mathscr{C}([s_1, t_1]) \rightarrow \mathscr{C}([s_2, t_2])$ lorsque $s_1 \leqslant s_2, t_2 \leqslant t_1$) ; il provient d'après le théorème de Kolmogorov sur les espaces polonais (cf. [3] n° 4, 3 ou [10], page 79) d'une mesure μ sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$ et on a immédiatement $\mu \in \mathrm{C}$, $\mathscr{J}(\mu) = d$.

2° Le caractère nécessaire de cette condition est établi dans [13] et la réciproque est aisée à l'aide du caractère markovien de $\underline{\mu}$ (remarquons que $(\varphi_s^+, \mathscr{F}_s^+)$ et $(\varphi_t^-, \mathscr{F}_t^-)$ sont des martingales).

1. Le cas du champ libre.

Dans ce paragraphe on étudie le cas particulier simple où le polynôme $\mathrm{P}(x)$ est $\dfrac{m^2}{2} x^2$, $m > 0$; c'est le cas du champ libre en théorie quantique des champs; $\underline{\mu}$ se trouve alors être une mesure gaussienne et on peut calculer explicitement les fonctions ρ et p_t correspondantes (cf. [4] n° 2.6.2. et [16] n° 6.3 pour le lien avec les processus gaussiens); si pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ on désigne par S_x la solution

$$x_1 e^{mt} + x_2 e^{-mt}$$

de l'équation $S'' - m^2 S = 0$, la proposition suivante donne la structure du cône C (cf. [13] prop. 16) :

Proposition 1.1. — *Toute mesure $\mu \in C$ se représente de manière unique sous la forme :*

$$\mu\,(d\omega) = \int_{\mathbf{R}^2} \underline{\mu}(S_x + d\omega)\alpha\,(dx),$$

α désignant une mesure $\geqslant 0$ bornée sur $\mathbf{R}^2$.

Remarques 1.2. — Ici le module de quasi-invariance vaut

$$a(f, \omega) = \left\langle \omega + \frac{1}{2} f, f'' - m^2 f \right\rangle_{L^2(\mathbf{R})};$$

il se prolonge continûment à $\mathscr{D}(\mathbf{R}) \times \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ et on peut montrer que toute mesure bornée sur $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ qui est $\mathscr{D}(\mathbf{R})$-quasi-invariante avec le module $a(f, \omega)$ est portée par $\mathscr{C}(\mathbf{R})$. D'autre part la bijection définie plus haut entre C et $\mathscr{M}_b^+(R^2)$ est biétroitement continue (voir le paragraphe 2).

On voit qu'ici les résultats annoncés dans l'introduction découlent de la proposition. 1.1 : les génératrices extrémales de C sont formées des mesures $\underline{\mu}(S_x + d\omega)$ qui sont markoviennes, $\underline{\mu}$ l'étant. De plus on peut alors trouver toutes les mesures markoviennes de C.

Proposition 1.3. — *μ est markovienne si et seulement si α est de la forme $\alpha\,(dx_1, dx_2) = e^{2mx_1x_2}\alpha_1\,(dx_1)\alpha_2\,(dx_2)$, α_1 et α_2 étant des mesures sur* **R**.

Démonstration. — La mesure $\underline{\mu}^x = \underline{\mu}(S_x + d\omega)$ étant markovienne, si on pose $d^x = \mathscr{I}(\underline{\mu}^x)$, d^x est décomposée d'après la proposition 0.4; on peut ici à l'aide des formules (2.6.1) et (1.7.1) de [4] établir que :

$$d_{s,t}(y, z) = \exp - 2mx_1x_2\, \psi_t^{-,x}(z)\psi_s^{+,x}(y)$$

où :

$$\psi_t^{-,x}(y) = \exp - m(e^{2mt}x_1^2 + 2yx_1e^{mt})$$
$$\psi_s^{+,x}(z) = \exp - m(e^{-2ms}x_2^2 + 2zx_2e^{-ms})$$

Soit $d = \mathcal{I}(\mu)$; il est donc clair que si α est de la forme indiquée d est décomposée. Réciproquement supposons d décomposée et posons, s, t, étant fixés :

$$\beta\ (dx_1, dx_2) = e^{-2mx_1x_2} \exp - m(x_1^2e^{2mt} + e^{-2ms}x_2^2)\alpha\ (dx_1, dx_2) ;$$

$d_{s,t}$ est (à des coefficients près) la transformée de Laplace de β : $d_{s,t}$ étant un produit tensoriel il en est de même de β d'où le résultat.

2. Représentation intégrale lorsque P est quelconque.

2.0. — Rappelons les éléments de la théorie de la représentation intégrale de G. Choquet qui nous seront utiles pour la suite; soit Γ un cône convexe saillant, réticulé pour son ordre propre et réunion de chapeaux métrisables dans un espace localement convexe; pour tout élément x de Γ il existe une mesure conique maximale unique π sur Γ de résultante x; de plus pour tout chapeau K de Γ contenant x, π provient d'une probabilité de Radon sur K, portée par les génératrices extrémales de K (Ce théorème est indiqué dans [9], § 11, n° 37; pour le § 3 on utilisera plutôt [5], § 30.)

Étant donné un espace topologique X (complètement régulier) on notera $\mathcal{M}_b^+(X)$ le cône des mesures positives bornées sur la tribu borélienne de X[3], muni de la topologie de la convergence étroite, c'est-à-dire la topologie faible définie par la dualité avec $\mathcal{C}_b(X)$, espace des fonctions continues bornées sur X. On posera $W = \mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Théorème 2.1. — C *est un sous-cône fermé et réticulé de* $\mathcal{M}_b^+(W)$; C *est métrisable et réunion de ses chapeaux.*

[3] Dans les exemples qui suivent X est polonais et donc $\mathcal{M}_b^+(X)$ est composé de mesures de Radon.

Démonstration. — Une mesure μ appartient à C si et seulement si elle vérifie :

$$(Q) \quad \forall F \in \mathscr{C}_b^+(W), \ \forall f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}) \int_W F(\omega - f)\mu\,(d\omega) = \int_W a(f, \omega)F(\omega)\mu\,(d\omega)$$

Montrons que (Q) équivaut à :

$$(Q') \quad \forall F \in \mathscr{C}_b^+(W), \quad \forall f \int a(f, \omega)F(\omega)\mu\,(d\omega) \leqslant \int F(\omega - f)\mu\,(d\omega);$$

pour cela on remarque que $a(f, \omega)$ est une fonction continue de la variable ω qui possède la propriété de cocycle multiplicatif :

$$\forall f_1, f_2, \omega \quad a(f_1 + f_2, \omega) = a(f_1, \omega) \quad a(f_2, \omega + f_1).$$

D'autre part l'inégalité (Q′) s'étend, d'après le théorème de Fatou, au cas où F n'est pas supposée bornée; en particulier si on pose

$$F(\omega) = a(-f, \omega + f)\psi(\omega + f), \quad \text{où} \quad \psi \in \mathscr{C}_b^+(W),$$

d'après l'égalité de cocycle, (Q′) s'écrit :

$$\int_W \psi(\omega + f)\mu\,(d\omega) \leqslant \int a(-f, \omega)\psi(\omega)\mu\,(d\omega)$$

et donc (Q′) implique (Q). Pour montrer que C est fermé il suffit maintenant d'utiliser (Q′) en remarquant que l'application :

$$\mu \longmapsto \int_W a(f, \omega)F(\omega)\mu\,(d\omega) \quad \text{est s.c.i. pour} \quad F \in \mathscr{C}_b^+(W)$$

d'après le théorème de Fatou et la continuité de $a(f, .)$.

b) Soient μ_1 et $\mu_2 \in C$ et $\mu = \mu_1 + \mu_2$. D'après le théorème de Radon-Nikodym on peut écrire $\mu_i = F_i\mu$ $i = 1, 2$ et comme μ_i et μ ont même module de quasi-invariance, pour tout $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, on a pour μ-presque tout ω :

$F_i(\omega + f) = F_i(\omega)$; si on pose : $G = \sup(F_1, F_2)$, on a donc aussi presque partout $G(\omega + f) = G(\omega)$; on en déduit que la mesure $G\mu$ est dans C; c'est la borne supérieure de μ_1 et μ_2 dans $\mathscr{M}_b^+(W)$ et donc aussi pour l'ordre propre de C.

c) C est métrisable; en effet W étant un espace polonais $\mathscr{M}_b^+(W)$ est polonais (cf [3] n° 5-4).

d) C étant fermé dans $\mathscr{M}_b^+(\mathrm{W})$, pour démontrer que C est réunion de ses chapeaux (bien coiffé), il suffit de démontrer que $\mathscr{M}_b^+(\mathrm{W})$ est bien coiffé. La démonstration suivante est indiquée dans [3] exercice 5-10 : soit f une fonction s.c.i. sur W à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}^+$ qui est bornée inférieurement sur W et telle que pour tout n l'ensemble $f^{-1}([0, n])$ soit compact; alors l'ensemble $\mathrm{K}_f = \{\mu \in \mathscr{M}_b^+(\mathrm{W}) | \mu(f) \leqslant 1\}$ est un chapeau : en effet K_f est fermé et d'autre part si a est la borne inférieure de f, les mesures de K_f ont leur masse majorée par $\frac{1}{a}$ et sont portées à $\frac{1}{an}$ près par $f^{-1}([0, n])$; donc K_f est compact d'après le critère de Prokhorov (cf. [3], nº 5,5); enfin μ étant donnée on peut former une fonction f telle que $\mu \in \mathrm{K}_f$ de la manière suivante : supposant μ de masse 1, soit K_n une suite croissante de compacts de W tels que K_n porte μ à $\frac{1}{2^{2n}}$ près; il suffit de poser :
$f = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\varphi_n$, où φ_n est la fonction caractéristique du complémentaire de K_n.

Remarque sur la démonstration. — En utilisant (Q′) on peut montrer que la quasi-invariance par les translations d'une partie dense de $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ avec le module $a(f, \omega)$ implique la quasi-invariance par $\mathscr{D}(\mathbf{R})$; ceci permet d'obtenir des désintégrations de mesures quasi-invariantes en mesures quasi-invariantes de même module (cf. [16]).

Dans le cas où $\mathrm{P}(x) = \frac{m^2}{2} x^2$, on a vu que C était isomorphe à $\mathscr{M}_b^+(\mathbf{R}^2)$. Dans le cas général la proposition qui va suivre précise la structure du cône C; posons $\mathrm{W}_{s,t} = \mathscr{C}([s, t])$; on utilisera :

LEMME 2.2. — *$\mathscr{M}_b^+(\mathrm{W})$ est la limite projective topologique du système $(\mathscr{M}_b^+(\mathrm{W}_{s,t}), r_{s,t}^{s',t'})$, $r_{s,t}^{s',t'}$ désignant l'application canonique :*

$$\mathscr{M}_b^+(\mathrm{W}_{s',t'}) \to \mathscr{M}_b^+(\mathrm{W}_{s,t}) \quad \text{pour} \quad [s, t] \subset [s', t'].$$

Démonstration. — D'après le théorème de Kolmogorov il est clair que $\mathscr{M}_b^+(\mathrm{W})$ est limite projective ensembliste de $\mathscr{M}_b^+(\mathrm{W}_{s,t})$. D'autre part étant donné une base d'ouverts 0 de W, la topologie étroite de $\mathcal{M}_b^+(W)$ est la moins fine de celles qui rendent s.c.i. les applications $\mu \longmapsto \mu(U)$ pour tout $U \in \mathcal{O}$ (cf. [14]). Or, si $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts qui sont image réciproque canonique d'un ouvert d'un espace $W_{s,t}$, la limite projective des topologies de $\mathcal{M}_b^+(W_{s,t})$ est moins fine que celle de $\mathcal{M}_b^+(W)$ et possède la propriété précédente. D'où le résultat.

Proposition 2.3. — C *est limite projective topologique d'une suite de cônes isomorphes à* $\mathcal{M}_b^+(\mathbf{R}^2)$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{C}_0^\infty([s, t])$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $[s, t]$, nulles en s et t et $a_{s,t}$ la fonction sur $\mathcal{C}_0^\infty([s, t]) \times W_{s,t}$ définie par :

$$\log a_{s,t}(f, \omega) = \omega(s)f'(s) - \omega(t)f'(t) \\ + \int_s^t \left[(\omega(t) + \frac{1}{2} f(t))f''(t) - P(\omega(t) + f(t)) + P(\omega(t))\right] dt$$

et soit $C_{s,t}$ le cône des mesures bornées positives sur $W_{s,t}$ qui sont quasi invariantes par les translations de $\mathcal{C}_0^\infty([s, t])$ avec le module $a_{s,t}$. Dans [13] (démonstration de la proposition 11) il est montré que si $\mu \in C$ alors $\mu_{[s,t]} \in C_{s,t}$ et de la même manière on démontre que le système $(C_{s,t}, r_{s,t}^{s',t'})$ est projectif; $C_{s,t}$ étant muni de la topologie étroite le lemme 2.2 implique que C est la limite projective topologique de ce système. Pour terminer on établit que $C_{s,t}$ est topologiquement isomorphe à $\mathcal{M}_b^+(\mathbf{R}^2)$, cet isomorphisme étant décrit par les formules suivantes (cf. [13] proposition 9 et sa démonstration) : désignons pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ par $\gamma_{s,t}^{x_1,x_2}$ la loi sur $W_{s,t}$ d'un mouvement brownien prenant la valeur x_1 au temps s et la valeur x_2 au temps t [on peut définir $\gamma_{s,t}^{x_1,x_2}$ par sa transformée de Fourier comme dans [13] ou bien désintégrer la loi du mouvement brownien habituel par rapport à l'application (X_s, X_t)], et définissons la probabilité ν_x par :

$$(1) \qquad \nu_x(d\omega) = I_x^{-1} \exp - \int_s^t P(\omega(u))\, du \,.\, \gamma_{s,t}^{x_1,x_2}(d\omega),$$

I_x étant la constante de normalisation; alors toute mesure ν

de $C_{s,t}$ se représente de manière unique sous la forme :

(2) $\nu = \int_{\mathbf{R}^2} \nu_x \beta(dx)$ où β est une mesure sur $\mathbf{R}^2$, et $\beta = (X_s, X_t)\nu$.

Remarques. — On pourrait remplacer $\mathscr{C}_0^\infty([s, t])$ par $\mathscr{D}(]s, t[)$.

— Pour $\nu = \underline{\mu}_{[s,t]}$ on peut déduire la formule (2) de la formule $\mathrm{III}_{\rho,0}$ du théorème 7 de [12] et donc aussi d'après la proposition 0-5 pour toute mesure $\mu_{[s,t]}$ avec $\mu \in C$.

3. Étude du cône D; génératrices extrémales de C.

La proposition 0.5 amène naturellement à l'étude du cône D.

La régularité des éléments de D va découler des deux énoncés qui suivent :

LEMME 3.1. — *Soit* A *un opérateur différentiel hypoelliptique sur un ouvert* X *de* $\mathbf{R}^n$ *et* $\mathscr{L}_A = \{f \in \mathscr{C}^\infty(X) | A(f) = 0\}$. *Sur* $\mathscr{L}_A$ *la topologie des distributions coïncide avec celle de* $\mathscr{C}^\infty(X)$ (*et donc aussi avec la topologie de* $L^1_{\mathrm{loc}}(X)$).

Ce lemme est une conséquence du théorème du graphe fermé (voir Malgrange [8], prop. 2, p. 331). Pour deux groupes de variables il admet l'analogue suivant :

LEMME 3.2. — *Soit* A (*resp* : B) *un opérateur différentiel hypoelliptique sur un ouvert* X (*resp* : Y) *de* $\mathbf{R}^n$ (*resp :* $\mathbf{R}^p$) *et* $\mathscr{L}_{A,B} = \{T \in \mathscr{D}'(X \times Y) | A_x T = 0 \; B_y T = 0\}$ (4). *Toute distribution de* $\mathscr{L}_{A,B}$ *est une fonction* $\mathscr{C}^\infty$ *et sur* $\mathscr{L}_{A,B}$ *les topologies de* $\mathscr{D}'(X \times Y)$ *et de* $\mathscr{C}^\infty(X \times Y)$ *coïncident.*

Démonstration. — Soient $\varphi_1 \in \mathscr{D}(X)$ et $\varphi_2 \in \mathscr{D}(Y)$; alors l'application : $\varphi_2 \longmapsto T(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ est une distribution S_{φ_1} sur Y qui satisfait à $BS_{\varphi_1} = 0$; par l'hypoellipticité de B, S_{φ_1} provient d'une fonction de $\mathscr{C}^\infty(Y)$ que l'on notera $T(\varphi_1, y)$; l'application : $\varphi_1 \longmapsto S_{\varphi_1}$ est continue : $\mathscr{D}(X) \to \mathscr{D}'(Y)$ elle est donc d'après le lemme 3.1 continue : $\mathscr{D}(X) \to \mathscr{C}^\infty(Y)$; en particulier l'application $\varphi_1 \longmapsto T(\varphi_1, y)$ est une distribu-

(4) $A_x(T_1 \otimes T_2) = AT_1 \otimes T_2$, $B_y(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes BT_2 (T_1 \in \mathscr{D}'(X), T_2 \in \mathscr{D}'(Y))$.

tion V_y sur X; il est immédiat que $AV_y = 0$ et donc V_y est une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X)$ notée $V_y(x)$; de plus l'application : $y \longmapsto V_y$, $Y \to \mathscr{D}'(X)$ est $\mathscr{C}^\infty$ pour la topologie faible de $\mathscr{D}'(X)$ donc aussi d'après la propriété de Montel de $\mathscr{D}'(X)$, pour la topologie forte de $\mathscr{D}'(X)$ (cf. [15], chap. III, § 2) ou enfin d'après le lemme 3.1 pour la topologie de $\mathscr{C}^\infty(X)$; ceci implique que $(x, y) \longmapsto V_y(x)$ est une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X \times Y)$ et T provient évidemment de cette fonction. Enfin la dernière partie du lemme s'obtient en appliquant à nouveau 2 fois le lemme 3.1.

3.3. — Le lemme 3.1 permet également de compléter la démonstration de la proposition 0.1 : $P_t(x, dy)$ étant un semi-groupe de noyaux (cf. [12], théorème 2) on a :

$\forall x$ pour presque tout y $p_{s+t}(x, y) = \int p_s(x, z) p_t(z, y)\, dz$; soit K_n une suite exhaustive de compacts de **R** de fonctions caractéristiques φ_n. D'après 0.1 si on pose :

$$q^n_{s,t}(x, y) = \int p_s(x, z)\varphi_n(z) p_t(z, y)\, dz,$$

$q^n_{s,.}(x,.)$ est une fonction appartenant à $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ qui satisfait à $\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_y\right) q^n = 0$; d'autre part pour presque tout $y \in \mathbf{R}$, $p_{s+t}(x, y)$ est la limite croissante de $q^n_{s,t}(x, y)$; l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - L^*_y$ étant hypoelliptique le lemme 3.1 implique la convergence partout et donc :

$$\forall x\, \forall y \quad p_{s+t}(x, y) = \lim q^n_{s,t}(x, y) = \int p_s(x, z) p_t(z, y)\, dz$$

Proposition 3.4. — *Tout élément d du cône* D *admet une version $\bar{d}_{s,t}(x, y)$ appartenant à $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$ et qui vérifie les équations :*

$$\begin{cases} (E^-) \ -\dfrac{\partial \bar{d}}{\partial s} + L_x \bar{d} = 0 \\[2ex] (E^+) \quad \dfrac{\partial \bar{d}}{\partial t} + L_y \bar{d} = 0 \end{cases}$$

$$(\bar{\varepsilon}) \qquad \forall s_1 \leqslant s_2 < 0 \qquad \forall t_1 \geqslant t_2 > 0. \qquad \forall x, y$$
$$\bar{d}_{s_2,t_2}(x, y) = \int_{\mathbf{R}^2} \bar{d}_{s_1,t_1}(u, v) P_{s_2 - s_1}(x, du) P_{t_1 - t_2}(y, dv)$$

Démonstration. — On va d'abord montrer que d définit une distribution sur $\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2$ qui satisfait à (E^-) et (E^+). D'après un lemme de Doob il existe une version $d_{s,t}(x, y)$ de d qui est mesurable sur $\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2$; d'autre part $\underline{\mu}_{\{s,t\}}(d_{s,t})$ est fini et ne dépend pas de s et t; à l'aide du théorème de Fubini et du lemme 0.3 on en déduit que $d_{s,t} \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$ et $d_{s,t}(x, y)$ définit bien une distribution. D'après l'équation (ε) (cf. 0.4) et les équations satisfaites par p_t cette distribution satisfait à (E^-) et (E^+) et provient donc d'après le lemme 3.2 d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$: $\overline{d}_{s,t}(x, y)$. Enfin pour établir l'équation $(\overline{\varepsilon})$ on procède comme au n° 3.3: φ_n étant les fonctions caractéristiques d'une suite exhaustive de compacts de $\mathbf{R}^2$, si on pose, s_0, t_0 étant fixés, pour $s > s_0$, $t < t_0$,

$$q^n_{s,t}(x, y) = \int_{\mathbf{R}^2} p_{s-s_0}(x, u) p_{t_0-t}(y, v) \varphi_n(u, v) \overline{d}_{s_0,t_0}(u, v)\, du\, dv,$$

$q^n \in \mathscr{C}^\infty(]s_0, 0[\times]0, t_0[\times \mathbf{R}^2)$, satisfait à (E^-) et (E^+) et tend en croissant presque partout vers $\overline{d}_{s,t}(x, y)$ donc partout d'après la fin du lemme 3.2.

Munissons D de la topologie initiale associée aux applications canoniques $D \to L^1(\underline{\mu}_{\{s,t\}})$; alors:

Proposition 3.5. — D *est métrisable complet et l'isomorphisme* $\mathscr{I} : C \to D$ *est bicontinu.*

Démonstration. — Soit s_n une suite décroissante non bornée et t_n une suite croissante non bornée; d'après l'équation (ε) on peut se restreindre à la famille dénombrable d'indices (s_n, t_n) pour définir la topologie de D d'où le caractère métrisable complet. Désignons par μ^n et μ des mesures de C et $d^n = \mathscr{I}(\mu^n)$, $d = \mathscr{I}(\mu)$; si $d^n \to d$ alors pour tout (s, t), $\mu^n_{[s,t]} \to \mu_{[s,t]}$ étroitement donc d'après le lemme 2.2 $\mu^n \to \mu$. Réciproquement si $\mu^n \to \mu$, $\underline{\mu}^n_{\{s,t\}} \to \underline{\mu}_{\{s,t\}}$ étroitement; on en déduit que $\overline{d}^n \to \overline{d}$ dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$ donc aussi, d'après le lemme 3.2, dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$; comme de plus $\underline{\mu}_{\{s,t\}}(\overline{d}^n_{s,t})$ converge vers $\underline{\mu}_{\{s,t\}}(\overline{d}_{s,t})$ la suite $\overline{d}^n_{s,t}$ est $\underline{\mu}_{\{s,t\}}$ équiintégrable et converge dans $L^1(\underline{\mu}_{\{s,t\}})$ (cf. [9], § 2, n° 2,1).

Passons maintenant à l'étude des génératrices extrémales de

D; on remarque l'analogie qui existe entre D et le cône des fonctions positives séparément harmoniques sur un produit d'ouverts bornés de $\mathbf{R}^n$ considéré par divers auteurs; on rappelle en particulier que les génératrices extrémales de ce cône sont formées de produits tensoriels de fonctions harmoniques (cf. [7]). On utilisera la remarque suivante : lorsqu'on fixe les variables s et x la fonction $\overline{d}_{s,.}(x,.)$ est un élément du cône H défini comme suit :

Définition. — On note H le cône des fonctions $h(t, y)$ indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, positives qui sont solution de $(\mathrm{E}^+) : \dfrac{\partial h}{\partial t} + \mathrm{L}_y h = 0$; on munit H de la structure uniforme faible définie par les formes linéaires $h \to \langle \varphi, h \rangle$ où φ est un élément quelconque de $\mathscr{D}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$.

Proposition 3.6. — H *est un cône complet, réticulé pour son ordre propre et réunion de chapeaux métrisables.*

Démonstration. — Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ et si F est un filtre de Cauchy sur H, $\lim\limits_{\mathrm{F}} \langle h, \varphi \rangle$ existe; on définit ainsi une forme linéaire positive sur $\mathscr{D}$ donc une distribution qui satisfait évidemment à (E^+); par l'hypoellipticité de $\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathrm{L}_y$, cette distribution est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ d'où le caractère complet de H.

— Pour toute fonction $h \in \mathrm{H}$ on construit aisément une fonction p continue et > 0 sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ telle que

$$\langle p, h \rangle = \int p(t, y) h(t, y)\, dt\, dy \leqslant 1;$$

on va montrer que $\mathrm{K} = \{k \in \mathrm{H} | \langle p, k \rangle \leqslant 1\}$ est un chapeau de H; d'abord les fonctions de K étant uniformément d'intégrale bornée sur chaque compact de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, K est borné dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ donc aussi dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ (cf. lemme 3.1) donc relativement compact dans ce dernier espace (par la propriété de Montel); d'autre part le lemme de Fatou entraîne que K est fermé donc compact dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ et donc K est aussi compact et métrisable dans H.

— le cône H peut être considéré comme un cône de fonctions harmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel (cf. [1]); il est connu que ces cônes sont réticulés pour leur ordre propre (la démonstration que l'on trouve dans le livre de Brelot [2] chapitre II, § 8 pour le cas classique se transpose sans difficulté : on n'a besoin que d'une base d'ouverts réguliers pour le problème de Dirichlet).

Le lemme suivant précise les liens entre l'équation (E^+) et l'équation

$$(\bar{\varepsilon}^+) \quad \forall s_2 \leqslant s_1, \quad \forall y, \quad h(s_2, y) = \int_{\mathbf{R}} h(s_1, v) P_{s_1 - s_2}(y, dv).$$

Lemme 3.7. — *Si $k \in \mathrm{H}$ et satisfait à l'équation $(\bar{\varepsilon}^+)$ et si $h \in \mathrm{H}$ et $h \leqslant k$, alors h vérifie $(\bar{\varepsilon}^+)$.*

Démonstration. — On utilise la construction de $\underline{\mu}$ donnée dans [12] : un instant initial $t_0 > 0$ étant fixé on peut écrire :

$$(1) \qquad \underline{\mu}_{[t_0, +\infty]} = \int_{\mathbf{R}} P_x^{t_0} \mu_0 \, (dx),$$

$P_x^{t_0}$ étant la probabilité portée par $\mathscr{C}_x([t_0, +\infty[)$, (espace des fonctions continues sur $[t_0, +\infty[$ valant x en t_0) caractérisée par :

$$(2) \qquad B_t = X_t + \int_{t_0}^{t} \zeta(X_s) \, ds$$

est un $(P_x^{t_0}, \mathscr{F}_{t_0, t})$ mouvement brownien; considérons pour toute fonction $h(t, y)$ deux fois continument dérivable, l'intégrale stochastique :

$$(3) \qquad M_t^h = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial y}(s, X_s) \, dB_s \text{ (}^5\text{)};$$

d'après la formule de Ito on a :

$$(4) \quad P_x^{t_0} - p.s \quad h(t, X_t) = h(t_0, x) + M_t^h + \int_{t_0}^{t} Ah(X_s) \, ds$$

avec $A = \dfrac{\partial}{\partial t} + L_y$; si $h \in \mathrm{H}$ la dernière intégrale est nulle; $h(t, X_t)$ est donc une martingale locale positive pour la suite

[5] On peut se référer à [11] pour une présentation des intégrales stochastiques.

de $\mathscr{F}_{t_0,t}$ temps d'arrêt T_n donnés par :

$$T_n(\omega) = \mathrm{Inf}\,(s > t_0 \,|\, |X_s(\omega)| \geqslant n),$$

donc une surmartingale ce qui entraîne :

$$E_x^{t_0}(h(t, X_t)) \leqslant h(t_0, x) \tag{5}$$

($E_x^{t_0}$ étant l'espérance définie par la probabilité $P_x^{t_0}$); mais en remplaçant h par $k - h$ dans ce raisonnement on établit l'inégalité inverse; d'où l'égalité dans (5), qui équivaut d'après (1) à $(\bar{\varepsilon}^+)$ puisque t_0 et t sont arbitraires.

Pour continuer on a besoin d'une opération de restriction à certains sous-cônes de H de mesures coniques sur H; une telle opération est facile à mettre en place en utilisant simplement le caractère bien coiffé de H. On notera M(H) le plus petit sous-espace vectoriel de fonctions sur H qui soit réticulé et contienne les formes linéaires continues sur H; une mesure conique est une forme linéaire positive sur M(H) et, H étant faiblement complet, toute mesure conique sur H a un résultant dans H (cf. [5]). On notera B la tribu sur H engendrée par les formes linéaires continues sur H.

Lemme 3.8. — *Soit* A *un sous-cône de* H *appartenant à* B, π *une mesure conique sur* H; *il existe une unique mesure conique* π^A *possédant la propriété suivante : si* π *provient d'une mesure de Radon* λ *portée par un chapeau* K *de* H, π^A *provient de* λ^A, *restriction de* λ *à* A; *on a* $\pi^A \leqslant \pi$ *et si* $\pi^A = c\pi$ *pour tout* A *alors* π *provient d'une mesure de Dirac.*

Démonstration. — On va montrer que si π provient de λ et λ' alors (1) $\lambda'(f) = \lambda(f)$ pour toute fonction f positivement homogène, bornée sur chaque chapeau et B-mesurable; on sait déjà que (1) a lieu pour $f \in M(H)$. Soit H_1 une base de H définie par $H_1 = \{h | l(h) = 1\}$, l étant une forme linéaire continue positive sur H et pour toute fonction φ sur H_1, soit $\hat{\varphi}$ l'unique prolongement positivement homogène de φ à H. Soit E l'espace des restrictions à H_1 des fonctions de M(H) et F l'espace des fonctions φ bornées sur H_1, telles que $\hat{\varphi}$ soit B-mesurable et $\lambda(\hat{\varphi}) = \lambda'(\hat{\varphi})$.

Par application de la remarque qui suit le théorème 1.20 de [9], on obtient que F contient toutes les fonctions bornées et mesurables par rapport à la tribu engendrée par E c'est-à-dire « $B \cap H_1$ ». D'où (1) lorsque f est bornée sur H_1 et le cas général en écrivant pour $f \geqslant 0 : f = \sup_n (\inf (f, nl))$. On pose alors pour $f \in M(H)$ $\pi^A(f) = \lambda(\chi_A f)$ et le reste de la proposition est immédiat (on peut comparer cette méthode de restriction avec [5], prop. 30.8).

THÉORÈME 3.9. — *Les génératrices extrémales de* C *sont formées de mesures markoviennes.*

Démonstration. — D'après la proposition 0.5, il suffit de montrer que les génératrices extrémales de D sont formées d'éléments décomposés. Soit $d \in D$ et A un sous-cône de H B-mesurable; on va définir un élément d^A de D de la manière suivante : soit d la version $\mathscr{C}^\infty$ de d; pour tout $(s, x) \in \mathbf{R}^- \times \mathbf{R}$, $(t, y) \longmapsto d_{s,t}(x, y)$ est un élément de H noté $h_{s,x}$, représenté par une unique mesure conique maximale $\pi_{s,x}$; on considère la mesure conique $\pi^A_{s,x}$ (voir lemme 3.8) dont le résultant $h^A_{s,x}$ est dans H et on pose : $d^A_{s,t}(x, y) = h^A_{s,x}(t, y)$. Montrons que d^A satisfait à l'équation (ε); $h^A_{s,x}$ étant majoré par $h_{s,x}$ on a d'abord pour $t' \geqslant t$ d'après le lemme 3.7 :

$$(1) \qquad \forall s, x, t, y, t' \quad h^A_{s,x}(t, y) = \int h^A_{s,x}(t', v) P_{t'-t}(y, dv).$$

D'autre part d'après $(\bar{\varepsilon})$ (voir proposition 3.4) on a pour $s' \geqslant s$

$$\forall s, x, t, y, s' \quad h_{s,x}(t, y) = \int h_{s',u}(t, y) P_{s-s'}(x, du);$$

toute forme linéaire l continue sur H étant donnée par $l(h) = \langle \varphi, h \rangle$, avec $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ on a aussi d'après le théorème de Fubini :

$$(2) \qquad l(h_{s,x}) = \int l(h_{s',u}) P_{s-s'}(x, du);$$

(2) implique que pour toute fonction $f \in M(H)$:

$$(3) \qquad \pi_{s,x}(f) = \int \pi_{s',u}(f) P_{s-s'}(x, du),$$

par le raisonnement suivant : on remarque que l'intégrale

$$\mathrm{I}(f) = \int \pi_{s',u}(f)\mathrm{P}_{s-s'}(x, du) \quad \text{existe;}$$

en effet cette intégrale existe d'après (2) lorsque f est une forme linéaire et dans le cas général cela résulte des propriétés suivantes :

$u \longmapsto \pi_{s',u}(f)$ est une fonction borélienne (voir le théorème 30.1, VII de [5]) et $|f|$ est majorée par une forme linéaire continue (voir la démonstration de la proposition 30.13 de [5]); $f \longmapsto \mathrm{I}(f)$ est une mesure conique, maximale comme intégrale de mesures coniques maximales (cf. [6] corollaire 30) dont le résultant est $h_{s,x}$ d'après (2); d'où (3), par unicité de la représentation intégrale de $h_{s,x}$. Par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 3.8 on déduit de (3) la même égalité pour les mesures $\pi^{\mathrm{A}}_{s,x}$ donc aussi :

$$(4) \qquad h^{\mathrm{A}}_{s,x}(t, y) = \int h^{\mathrm{A}}_{s',u}(t, y)\mathrm{P}_{s-s'}(x, du).$$

La conjonction de (1) et (4) entraîne que d^{A} satisfait à (ε); il est alors clair que $d^{\mathrm{A}} \in \mathrm{D}$ et que $d^{\mathrm{A}} < d$ ($<$ désignant l'ordre propre de D). Supposons maintenant que d appartienne à une génératrice extrémale de D; alors nécessairement $d^{\mathrm{A}} = cd$, $c \in \mathbf{R}$ et en particulier :

$$(5) \qquad h^{\mathrm{A}}_{s,x'} = ch_{s,x} \qquad \text{pour tous} \qquad s, x;$$

il en résulte d'abord que $h_{s,x}$ appartient à une génératrice extrémale $\Delta_{s,x}$ de D (en effet d'après le lemme 3.8, $\pi^{\mathrm{A}}_{s,x}$ provient d'une mesure de Dirac et $\pi^{\mathrm{A}}_{s,x}$ est maximale); d'autre part s_0, x_0 étant fixés on a $\Delta_{s,x} = \Delta_{s_0,x_0}$: car dans le cas contraire pour tout A contenant Δ_{s_0,x_0} et disjoint de $\Delta_{s,x}$ on aurait :

$h^{\mathrm{A}}_{s_0,x_0} = h_{s_0,x_0}$ et $h^{\mathrm{A}}_{s,x} = 0$. Il existe donc une fonction $\varphi(s, x)$ telle que $h_{s,x} = \varphi(s, x)h_{s_0,x_0}$, ce qui revient à dire que d est décomposée.

Remarque. — La réciproque du théorème 3.9 est fausse; en effet, $d_{s,t}$ peut se décomposer sous la forme $\varphi^+_s \otimes \varphi^-_t$ sans être extrémale dans D (pour cela il est nécessaire en effet que φ^-_t soit extrémale dans le cône des $(\underline{\mu}, \mathscr{F}^-_t)$ martingales positives (resp : φ^+_s, $\mathscr{F}^+_s$)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Bony, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de théorie du potentiel, *Cours au C.I.M.E.* (Juin 1970).
[2] M. Brelot, Éléments de la théorie classique du potentiel, (C.D.U., Paris, 4e édition).
[3] Bourbaki, Intégration sur les espaces topologiques séparés.
[4] P. Courrege et P. Renouard, Oscillateur anharmonique, mesures quasi-invariantes sur $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et théorie quantique des champs en dimension $d = 1$, *Astérisque*, n° 22-23.
[5] G. Choquet, Lectures on analysis; II: representation theory.
[6] G. Choquet, Les cônes faiblement complets dans l'analyse, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, (1962), 317.
[7] K. Gowrisankaran, Limites fines et fonctions doublement harmoniques, *C.R.A.S.*, Paris, tome 262 (14/2/1966).
[8] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, VI (1955-56), 271-354.
[9] P. A. Meyer, Probabilités et potentiel.
[10] J. Neveu, Bases mathématiques du calcul des probabilités.
[11] P. Priouret, École d'été de probabilités de Saint-Flour, 1973, *Lectures notes in mathematics*, Vol. 390.
[12] P. Priouret et M. Yor, Processus de diffusion à valeurs dans $\mathbf{R}$ et mesures quasi-invariantes sur $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *Astérisque*, n° 22-23.
[13] G. Royer, Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathscr{C}(\mathbf{R})$, A paraître.
[14] Séminaire Schwartz 1969/70, Applications radonifiantes, exposé 3.
[15] L. Schwartz, Théorie des distributions.
[16] M. Yor, Étude de mesures de probabilités sur $\mathscr{C}(\mathbf{R}^{+*}, \mathbf{R})$ quasi-invariantes par les translations de $\mathscr{D}(\mathbf{R}^{+*}, \mathbf{R})$, A paraître.

Manuscrit reçu le 21 mai 1975
Proposé par G. Choquet.

G. Royer et M. Yor,
Équipes d'Analyse et de Probabilités
E.R.A. au C.N.R.S. n° 294 et n° 1
Université Pierre-et-Marie-Curie
Tour 46, 4e étage
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.