ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BENT FUGLEDE

Sur la fonction de Green pour un domaine fin

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 201-206

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_201_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 201-206.

SUR LA FONCTION DE GREEN POUR UN DOMAINE FIN

par Bent FUGLEDE

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

HYPOTHÈSES ET NOTATIONS. — On se place dans le cadre axiomatique de M. Brelot [1]. On suppose que l'espace harmonique, noté Ω, satisfait à toutes les hypothèses de la théorie des fonctions harmoniques adjointes de Mme Hervé [4, ch. VI]. On suppose en outre l'identité des deux topologies fines (l'une associée au faisceau donné et l'autre au faisceau adjoint). Enfin on suppose que l'axiome D (de domination) soit rempli.

Le noyau de Green sur $\Omega \times \Omega$ se note G, et on pose

$$p_y = G(\,.\,, y) = G\varepsilon_y,$$

de sorte que p_y est un potentiel extrémal > 0 sur Ω, harmonique dans $\Omega \setminus \{y\}$. Rappelons la formule fondamentale

$$\hat{R}^A_{G\mu} = G(\mu^{*A}) \tag{1}$$

qui relie le balayé d'un potentiel de Green $G\mu$ sur un ensemble $A \subset \Omega$ avec la co-balayée μ^{*A} de la mesure μ.

L'adhérence fine d'un ensemble A sera notée $\tilde{A}$, et la frontière fine de A s'écrit $\partial_f A$. La *base* de A, notée $b(A)$, est l'ensemble des points de Ω en lesquels A est ineffilé. Elle est identique à la co-base $b^*(A)$ (associée au faisceau adjoint) :

$$b^*(A) = b(A)$$

en vertu de l'hypothèse de l'identité des deux topologies fines.

La frontière fine $\partial_f U$ d'un *ouvert fin* $U \subset \Omega$ se décompose en deux parties : la partie régulière

$$(2) \qquad \partial_{f,r} U = (\partial_f U) \cap b(\complement U) = \tilde{U} \cap b(\complement U)$$

et la partie irrégulière (qui est polaire)

$$(3) \qquad \partial_{f,i} U = (\partial_f U) \setminus b(\complement U) = (\complement U) \setminus b(\complement U).$$

Un ouvert fin U sera dit *régulier* lorsque $\partial_{f,i} U = \emptyset$, ce qui équivaut à dire que $\complement U$ est une base : $b(\complement U) = \complement U$. Pour tout ouvert fin U l'ensemble

$$(4) \qquad V = \complement b(\complement U) = U \cup \partial_{f,i} U$$

est le plus petit ouvert fin et régulier qui contient U. D'après [2, Theorem 12.2], V est finement connexe si U est finement connexe, et dans ce cas seul. Rappeler qu'il y a identité entre balayage sur $\complement U$ et sur $\complement V = b(\complement U)$.

Pour simplifier un peu les énoncés on se borne dans ce qui suit au cas d'un *domaine fin* U, c'est-à-dire un ouvert fin et finement connexe.

DÉFINITION. — *Pour un domaine fin* $U \subset \Omega$ *la fonction de Green* p_y^U *à pôle* $y \in U$ *se définit dans* Ω *par*

$$p_y^U = p_y - \hat{R}_{p_y}^{\complement U} = G\varepsilon_y - G(\varepsilon_y^{*\complement U}),$$

prolongée au point y *par continuité fine si* y *est polaire.*

Remarque. — Ce prolongement est possible grâce au [2, Theorem 9.14], car $\hat{R}_{p_y}^{\complement U}$ est finement harmonique dans $U \setminus \{y\}$ (et dans U si y est non-polaire), voir [2, Cor. 9.7]. Il en résulte que p_y^U ainsi prolongé est finement surharmonique dans U (et même dans V comme défini par (4)). De plus on a

$$p_y^U > 0 \quad \text{dans} \quad U$$

(et même dans V), tandis que $p_y^U = 0$ dans $\Omega \setminus V$. En effet, si on avait $p_y^U = 0$ en un point de V, ceci aurait lieu partout dans V d'après [2, Theorem 12.6], donc partout dans Ω.

D'où $G\varepsilon_y = G\varepsilon_y^{*\complement U}$, et par suite $\varepsilon_y = \varepsilon_y^{*\complement U}$, ce qui est absurde puisque $y \in V = \complement\, b(\complement\, U) = \complement\, b^*(\complement\, U)$.

THÉORÈME. — *Soient* $U \subset \Omega$ *un domaine fin et* $y \in U$ *un point donné. La fonction de Green* p_y^U *pour* U *est un potentiel fin* (1) *relatif à* U, *et finement harmonique dans* $U \setminus \{y\}$. *Ces deux propriétés caractérisent* p_y^U *dans* U (*à un facteur constant près*). *On a* $p_y^U(y) = +\infty$ *si* y *est polaire* (*et dans ce cas seul*).

Démonstration. — Pour voir que la fonction finement surharmonique p_y^U (considérée dans U) est un potentiel fin relatif à U, soit φ une minorante finement sousharmonique de p_y^U dans U. Comme p_y^U est finement continue dans Ω, il vient (pour $z \in \partial_f U$, donc $z \neq y$)

$$\limsup_{x \to z,\, x \in U} \text{fine}\, \varphi(x) \leqslant p_y^U(z) \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad z \in \partial_{f,r} U \\ < +\infty & \text{si} \quad z \in \partial_{f,i} U. \end{cases}$$

Vu que $\varphi \leqslant p_y^U \leqslant p_y$ dans U, il en résulte d'après le principe du minimum fin, donné dans [3, Theorem 6], qu'on a bien $\varphi \leqslant 0$ dans U.

Si y est polaire on a $p_y^U(y) = +\infty$, car sinon le potentiel fin $p_y^U > 0$ serait finement harmonique dans tout U selon [2, Cor. 9.15], ce qui est contradictoire.

Soit maintenant q un potentiel fin quelconque relatif à U avec q harmonique dans $U \setminus \{y\}$, et montrons qu'on a bien $q = ap_y^U$ pour une constante a. On se ramène facilement au cas d'un domaine fin et *régulier* U (2). Fixons $x_0 \in U \setminus \{y\}$ si y est polaire, mais $x_0 = y$ si y est non-polaire. Définissons $a \geqslant 0$ par

$$q(x_0) = ap_y^U(x_0). \tag{5}$$

Si $a = 0$ alors $q = 0$ dans U selon [2, Theorem 12.6], et par suite $q = ap_y^U$ dans ce cas.

(1) Voir [2, § 10] au sujet de la notion de potentiel fin.

(2) En effet, d'après [2, Theorem 9.14] q se prolonge en une fonction finement surharmonique sur le domaine fin et régulier V défini par (4). Toute minorante finement sousharmonique de q dans V est finement continue selon [2, Theorem 9.10] et $\leqslant q$ dans U, donc $\leqslant 0$ dans U, et même dans V, car U est finement dense dans V puisque $\partial_{f,i} U$ est polaire.

Si y est non-polaire les potentiels fins q et p_y^U relatifs à U sont finis, donc *stables* [2, Cor. 10.9], et comme ils sont finement harmoniques dans $U \setminus \{y\}$ il résulte de (5) d'après [2, Cor. 10.11] qu'on a encore $q = ap_y^U$ (dans U).

Il reste donc le cas $a > 0$ et y *polaire*. Dans ce cas posons

$$\begin{aligned} u &= q - ap_y^U \quad \text{dans} \quad U \setminus \{y\}, \\ U^+ &= \{x \in U \setminus \{y\} \mid u(x) > 0\}, \\ U^- &= \{x \in U \setminus \{y\} \mid u(x) < 0\}, \end{aligned}$$

et montrons que l'un au moins des ensembles finement ouverts U^+ ou U^- est vide. Cela conduira à la conclusion cherchée $q = ap_y^U$ comme suit. Si par exemple $U^- = \emptyset$ alors u est finement harmonique et $\geqslant 0$ dans $U \setminus \{y\}$ qui est finement connexe selon [2, Theorem 12.2] puisque y est polaire. Comme $u(x_0) = 0$ d'après (5), il en résulte par [2, Theorem 12.6] que $u = 0$ dans $U \setminus \{y\}$, d'où en fait $q = ap_y^U$ dans U par continuité fine.

On achève la démonstration en montrant qu'il aboutit à une contradiction de supposer que U^+ et U^- sont tous les deux non-vides. Notons d'abord que u est finement continue dans $U \setminus \{y\}$. Pour $z \in \partial_f U^-$ cela établit le premier des deux énoncés suivants :

$$\liminf_{x \to z,\, x \in U^-} \text{fine}\; u(x) \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad z \in U \setminus \{y\} \\ \geqslant 0 & \text{si} \quad z \in \partial_f U. \end{cases}$$

Pour vérifier le second énoncé, noter que p_y^U est finement continu dans Ω et s'annule sur $\partial_f U \subset b(\complement U)$ puisque U est supposé régulier (voir plus haut). Comme

$$\partial_f U^- \subset (U^-)^{\sim} \subset \tilde{U} = U \cup \partial_f U,$$

il résulte des deux énoncés ci-dessus que la limite inférieure fine envisagée est toujours $\geqslant 0$ lorsque $z \neq y$. En utilisant de nouveau le principe de minimum fin donné dans [3, Theorem 6] on sera amené à la contradiction $u \geqslant 0$ dans U^- pourvu que le point polaire y n'appartienne pas à $\partial_{f,i} U^-$ [voir (3)] [3].

[3] Noter pour cela qu'on a $u \geqslant -ap_y^U \geqslant -ap_y$ dans $U \setminus \{y\}$, et dans U^- en particulier, avec ap_y un potentiel sur Ω.

Voyons enfin que, même dans le cas $y \in \partial_{f,i}U^-$, l'hypothèse $U^+ \neq \emptyset$ aboutit à une contradiction : dans ce cas, y est un point finement isolé de $\complement U^-$, de sorte que $U^- \cup \{y\}$ est un voisinage fin de y, ce qui entraîne que y n'appartient pas à $\partial_f U^+$. Il en résulte par la continuité fine de u dans $U \setminus \{y\}$ qu'on a :

$$\lim_{x \to z,\, x \in U^+} \text{fine}\; u(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in U \cap \partial_f U^+.$$

Comme u est finement harmonique dans U^+ et majorée par le potentiel fin q relatif à U, il découle d'une forme relativisée du principe de minimum fin, donnée dans [2, Theorem 10.8], que $u \leqslant 0$ dans U^+, ce qui est absurde.

Remarques. — 1) Le théorème montre que le potentiel fin p_y^U sur U est *extrémal*, c'est-à-dire ne se représente comme la somme de deux potentiels fins sur U que de façon triviale. Inversement on peut montrer qu'un potentiel fin q relatif à U, qui est extrémal dans ce sens, est nécessairement de la forme $q = ap_y^U$ (avec a constante et $y \in U$), au moins si l'on suppose en outre que q est majoré (dans U) par une fonction surharmonique $\geqslant 0$ sur Ω.

2) Le problème intéressant se pose de savoir si tout potentiel fin q relatif au domaine fin U admet une *représentation intégrale* de la forme

$$q = \int_U p_y^U \, d\mu\,(y)$$

au moyen d'une mesure unique $\mu \geqslant 0$ sur U. On montre facilement (comme au début de la démonstration du théorème ci-dessus) que, étant donné un potentiel $p = G\mu$ sur Ω, la fonction

$$p^U = p - \hat{R}_p^{\complement U} = G\mu - G(\mu^{*A})$$

(prolongée par continuité fine) est un potentiel fin relatif à U si $\partial_{f,i}U$ est intérieurement négligeable pour μ, et dans ce cas seul. Un tel potentiel fin p^U admet évidemment la représentation intégrale cherchée (avec la mesure donnée μ, alors supposée portée par U). Le problème reste ouvert dans le cas général.

3) (A propos d'un problème de Brelot.) Moyennant la fonction de Green pour des domaines fins on va donner ici dans un cas très particulier une réponse affirmative au problème suivant posé il y a longtemps par M. Brelot : Soit K un compact non-polaire, par exemple dans $R^n (n \geqslant 2)$. Est-ce que K contient un compact non-vide A qui est une base (c'est-à-dire ineffilé en chacun de ses points)? Évidemment il en est ainsi lorsque l'intérieur de K est non-vide. Montrons qu'il suffit de supposer que l'intérieur *fin* de K soit non-vide.

Soit alors $U \neq \emptyset$ une composante fine de l'intérieur fin de K, et choisissons un point $y \in U$. L'ensemble

$$A = \{x \in K | p_y^U(x) \geqslant 1\}$$

est compact, car p_y^U est sousharmonique dans tout l'espace sauf au point y qui appartient à A puisque $p_y^U(y) = +\infty$ d'après le théorème ci-dessus. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un point $z \in A$ en lequel A soit ineffilé. On a nécessairement $p_y^U(z) = 1$ parce que p_y^U est partout finement continu. Comme A est effilé en z, ce point est polaire, et il existe un voisinage fin et finement ouvert $W \subset U \setminus \{y\}$ de z tel que $W \cap A = \{z\}$. La fonction $1 - p_y^U$ est finement harmonique et $\geqslant 0$ dans W et s'annule en z, donc s'annule partout dans W d'après [2, Theorem 12.6]. Or cela entraîne que $W \subset A$, ce qui est absurde parce qu'un ouvert fin n'admet pas de point finement isolé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Lectures on Potential Theory. Bombay, 1960.

[2] B. Fuglede, Finely Harmonic Functions, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 289 (1972).

[3] B. Fuglede, Boundary minimum principles in potential theory, *Math. Ann.*, 210 (1974), 213-226.

[4] R.-M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 12 (1962), 415-571.

Manuscrit reçu le 4 février 1975.

Bent Fuglede,
Matematisk Institut
Universitetsparken 5
2100 Copenhague (Danemark).