ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

CIPRIAN FOIAS

Solution d'un problème sur les itérés d'un opérateur positif sur $C(K)$ et propriétés de moyennes associées

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 3-4 (1975), p. 109-129

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_109_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 3 et 4 (1975), 109-129.

SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LES ITÉRÉS D'UN OPÉRATEUR POSITIF SUR $\mathcal{C}(K)$ ET PROPRIÉTÉS DE MOYENNES ASSOCIÉES

par Gustave CHOQUET et Cyprian FOIAS

Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion de son 70e anniversaire.

Histoire du problème.

En 1955, à l'occasion de ses recherches avec Jacques Deny sur la théorie du potentiel, Choquet rencontra le problème suivant : Soit T un opérateur linéaire positif de $\mathcal{C}(K)$ dans lui-même (où K est un espace compact) tel que pour tout x de K, $\lim (T^n 1)(x) = 0$; est-ce que la suite des $T^n 1$ converge uniformément vers 0?

Si cela est exact, il est immédiat que la convergence de $\|T^n\|$ vers 0 est de type exponentiel, ce qui entraîne que, pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, $\sum_0^\infty T^n f \in \mathcal{C}(K)$, donc que $\sum_0^\infty T^n$ est un bon « noyau élémentaire » de la théorie du potentiel. Ce sera le cas par exemple si T est un opérateur positif de $\mathcal{C}(K)$ tel que, pour tout $x \in K$, $\sum_0^\infty (T^n 1)(x) < \infty$, car alors

$$\lim (T^n 1)(x) = 0.$$

Choquet montra, par un raisonnement basé sur une récurrence transfinie, que la réponse à son problème est positive lorsque T est un opérateur « presque-multiplicatif », c'est-à-dire tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, on ait :

$$Tf = \alpha . (f \circ \varphi), \quad \text{où } \alpha \in \mathcal{C}^+(K) \text{ et } \varphi \in \mathcal{C}(K, K).$$

Notons que si $T1 = \alpha > 0$ sur K, un tel noyau n'est autre qu'un opérateur positif sur $\mathscr{C}(K)$ vérifiant l'identité fonctionnelle :

$$Tf.Tg = T1.T(fg) \qquad \text{pour tous } f,\ g \in \mathscr{C}(K).$$

Choquet remarqua, dans ce cas particulier, que la conclusion reste valable lorsque la condition : « $\forall x \in K$, $\lim\,(T^n1)(x) = 0$ » est remplacée par la condition plus faible : « $\forall x \in K$, $\exists n$, $(T^n1)(x) < 1$ ». Enfin, en suivant la suggestion de J. Neveu d'utiliser un théorème de Frobenius relatif aux matrices positives, il démontra son énoncé général sous cette condition affaiblie, lorsque K est un ensemble fini.

En Juin 1972, dans une conférence à l'Institut de Mathématiques de Bucarest consacrée à divers problèmes d'Analyse fonctionnelle, Choquet rappela son problème. Cyprian Foias aperçut alors plusieurs applications, à la théorie ergodique, du résultat de Choquet sur les opérateurs presque-multiplicatifs, puis donna une démonstration complète de la conjecture générale, d'abord sous l'hypothèse initiale, puis sous l'hypothèse affaiblie.

Peu de temps après, Choquet, désireux d'obtenir une démonstration plus élémentaire, utilisa, d'après une technique de Mokobodzki, la suite des fonctions $g_n = \inf\,(T1, T^21, \ldots, T^n1)$, et obtint effectivement une démonstration élémentaire et simple. Enfin, en s'aidant d'un opérateur auxiliaire $T + \varepsilon I$, où ε est petit, Mokobodzki simplifia encore un peu cette démonstration.

Le présent travail contient d'abord ces deux dernières démonstrations, puis la démonstration d'un énoncé de même type, mais avec des hypothèses opposées : Si $\forall x \in K$, $\exists n$ tel que $(T^n1)(x) > 1$, la suite des T^n1 tend uniformément vers $+\infty$. Suivent des interprétations de ces théorèmes dans des cas particuliers.

On en fait enfin plusieurs applications à l'étude des moyennes $\left(\sum_0^{n-1} T^if\right)\Big/n$ et des racines $(T^nf)^{\frac{1}{n}}$; on donne en particulier sieurs critères de convergence uniforme de ces suites, et on pose quelques problèmes.

Les deux théorèmes de base.

Soient K un espace topologique compact, et $\mathscr{C}(K)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur K, muni de la norme uniforme. On désigne par T un opérateur linéaire positif de $\mathscr{C}(K)$ dans lui-même, et par P_0, P_∞ les propriétés suivantes éventuelles de T :

P_0 : *Pour tout* x *de* K, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $(T^n 1)(x) < 1$.

P_∞ : *Pour tout* x *de* K, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $(T^n 1)(x) > 1$.

P_0 se traduit aussi par $\inf\{T^n 1 : n > 0\} < 1$, et P_∞ par $\sup\{T^n 1 : n > 0\} > 1$.

Par exemple, si pour tout x, la suite des $T^n 1$ converge simplement vers une fonction f à valeurs dans $[0, \infty]$, et si $f < 1$ partout, P_0 est vérifiée; par contre, si $f > 1$ partout, P_∞ est vérifiée.

Lorsque T est presque-multiplicatif, avec

$$(Tf)(x) = \alpha(x) . f(\varphi(x))$$

pour tout x, où $\alpha \in \mathscr{C}^+(K)$ et $\varphi \in \mathscr{C}(K, K)$, on a :

$$(T^{n+i}1)(x) = \alpha(x)\alpha(x') \ldots \alpha(x^n), \quad \text{où} \quad x^i = \varphi^i(x).$$

Donc, dire que $\lim (T^n 1)(x) = 0$ (resp. $+\infty$), signifie que le produit infini des $\alpha(x^n)$ converge vers 0 (resp. $+\infty$).

THÉORÈME 1. — *Lorsque l'opérateur positif* T *a la propriété* P_0, *la suite des* $T^n 1$ *converge uniformément vers* 0.

1ère preuve. — Posons $g_n = \inf(T1, T^2 1, \ldots, T^n 1)$; d'après la propriété P_0 et la compacité de K, il existe un entier r tel que $g_r \leqslant \theta$, où θ est un nombre < 1.

1) Comme $g_r \leqslant T^i 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$, on a aussi

$$Tg_r \leqslant T^i 1$$

pour $1 \leqslant i \leqslant r$, d'où $Tg_r \leqslant \inf(T1, \ldots, T^r 1) = g_r$; autrement dit, $Tg_r \leqslant g_r$; il en résulte que la suite des $T^i g_r$ est décroissante.

2) De la relation $g_r \leqslant \theta$ il résulte $T^i g_r \leqslant \theta T^i 1$ pour tout i, d'où d'après la décroissance des premiers membres :

$$T^r g_r \leqslant \theta \inf_{i \leqslant r} T^i 1 = \theta g_r$$

Il en résulte $T^{ir} g_r \leqslant \theta^i g_r$, donc la suite décroissante des $T^n g_r$ tend uniformément vers 0.

3) Il existe évidemment un nombre $a \geqslant 1$ tel que $T1 \leqslant a.1$ d'où aussi, pour $i \leqslant r$, $T^r 1 \leqslant a^r T^i 1$, donc $T^r 1 \leqslant a^r g_r$, d'où aussi $T^{r+i} 1 \leqslant a^r T^i g_r$. Comme d'après (2) la suite des $T^i g_r$ tend uniformément vers 0, il en est de même de la suite des $T^p 1$.

2^e^ preuve. — Comme dans la preuve ci-dessus, notons r un entier tel que $g = \inf(T1, \ldots, T^r 1) < 1$.

Il existe évidemment un nombre $a \in]0, 1[$ assez petit pour que, en posant $\hat{T} = T + aI$, on ait :

$$\hat{g} = \inf(\hat{T}1, \ldots, \hat{T}^r 1) < 1.$$

Comme $\hat{g} \leqslant \hat{T}^i 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$, on a aussi $\hat{T}\hat{g} \leqslant T^i 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, d'où $\hat{T}\hat{g} \leqslant \inf(\hat{T}1, \ldots, \hat{T}^r 1) = \hat{g}$; autrement dit, $\hat{T}\hat{g} \leqslant \hat{g}$, soit encore :

$$T\hat{g} + a\hat{g} \leqslant \hat{g} \qquad \text{ou} \qquad T\hat{g} \leqslant (1 - a)\hat{g}$$

On en tire $T^n \hat{g} \leqslant (1 - a)^n \hat{g}$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où puisque $\hat{g} \geqslant a^r$, $T^n 1 \leqslant (1 - a)^n a^{-r} \hat{g}$, suite qui converge uniformément vers 0.

THÉORÈME 2. — *Lorsque l'opérateur positif* T *a la propriété* P_∞, *la suite des* $T^n 1$ *converge uniformément vers* $+\infty$.

Preuve. — Pour abréger, nous donnerons ici une seule preuve.

D'après la propriété P_∞ et la compacité de K, il existe un entier r tel que : $g = \sup(T1, T^2 1, \ldots, T^r 1) > 1$.

Il existe évidemment un nombre $a \in]0, 1[$, assez petit, pour que, en posant $\hat{T} = (1 - a)T$ (donc $\hat{T}$ est positif), on ait aussi :

$$\hat{g} = \sup(\hat{T}1, \ldots, \hat{T}^r 1) > 1.$$

Comme $\hat{g} \geqslant \hat{T}^i 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$, on a aussi $\hat{T}\hat{g} \geqslant \hat{T}^i 1$

pour $1 \leqslant i \leqslant r$, d'où $\hat{T}\hat{g} \geqslant \sup(\hat{T}1, \ldots, \hat{T}^r 1) = \hat{g}$; autrement dit, $\hat{T}\hat{g} \geqslant \hat{g}$; soit encore :

$T\hat{g} \leqslant (1 - a)^{-1}\hat{g}$, d'où $T^n\hat{g} \geqslant (1 - a)^{-n}\hat{g}$ pour tout $n \geqslant 1$,

d'où $T^n 1 \geqslant (1 - a)^{-n}\hat{g}\|\hat{g}\|^{-1}$, suite qui converge uniformément vers $+\infty$, puisque $(1 - a)^{-1} > 1$ et $\hat{g} > 1$.

Conséquences des théorèmes 1 et 2.

Commençons par deux corollaires directs.

COROLLAIRE 3. — *Soit* T *un opérateur positif sur* $\mathscr{C}(K)$ *et soit* ρ *son rayon spectral* $\lim \|T^n\|^{1/n}$; *alors*

$$P_0 \Longleftrightarrow (\rho < 1) \quad et \quad P_\infty \Longrightarrow (\rho > 1)$$

(l'implication inverse étant fausse).

COROLLAIRE 4. — *Il n'est pas possible, pour un opérateur positif* T *que, pour tout* $x \in K$, *il existe des entiers* $p, q > 0$ *tels que* $(T^p 1)(x) < 1$ *et* $T^q 1(x) > 1$.

Remarque 5. — 1) La fonction 1 joue dans les énoncés des théorèmes 1 et 2 un rôle qui peut paraître arbitraire; de fait, on peut la remplacer par n'importe quelle fonction fixe $f > 0$ de $\mathscr{C}^+(K)$; les énoncés P_0 et P_∞ correspondants sont alors respectivement :

Pour tout x *de* K, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que*

$$(T^n f)(x) < f(x) \qquad (\text{resp.} >).$$

Les théorèmes 1 et 2 et par suite les corollaires 3 et 4 relatifs à cet f s'obtiennent, soit en modifiant un peu les démonstrations ci-dessus, soit plus simplement en remarquant qu'on passe des énoncés relatifs à 1, à ceux relatifs à f, en remplaçant T par $A^{-1}TA$, où A est l'automorphisme de $\mathscr{C}(K)$ défini par $A(g) = fg$.

Par contre, la condition $f > 0$ ne peut pas être remplacée par la condition plus faible $f \geqslant 0$, même lorsque T est presque-multiplicatif, et même lorsque la suite des $T^n f$

converge simplement vers 0 : On le vérifiera sur l'exemple suivant : $K = [0, 1]$, T est l'opérateur défini par

$$(Tg)(x) = g(x^2),$$

et f est n'importe quelle fonction continue telle que

$$f(0) = f(1) = 0.$$

2) Le théorème 1 s'étend à tout opérateur linéaire positif sur le cône $\mathscr{F}_s^+(K)$ des fonctions positives bornées s.c.s. sur K; et le théorème 2 s'étend à tout opérateur positif sur le cône $\mathscr{F}_i^+(K)$ des fonctions positives bornées s.c.i. sur K. Les démonstrations restent les mêmes.

Voici maintenant une application, fort utile pour la suite, des théorèmes 1 et 2. Posons pour cela :

$$g_n = (T^n 1)^{\frac{1}{n}}\,; \qquad \gamma = \liminf_{n\to\infty} g_n\,; \qquad \Gamma = \limsup_{n\to\infty} g_n$$

Remarquons, pour éclairer l'énoncé qui suit, que si a et A désignent le minimum et le maximum de T1, on a évidemment : $a^n \leqslant T^n 1 \leqslant A^n$, d'où $a \leqslant g_n \leqslant A$, d'où aussi

$$a \leqslant \gamma \leqslant \Gamma \leqslant A.$$

Remarquons enfin que pour toute $f \in \mathscr{C}(K)$ avec $f > 0$, si m, M désignent son minimum et son maximum, on a :

$$mT^n 1 \leqslant T^n f \leqslant MT^n 1 \qquad \text{ou} \qquad (1 + \varepsilon_n)g_n \leqslant (T^n f)^{\frac{1}{n}} \leqslant (1 + \varepsilon'_n)g_n,$$

où les ε_n, ε'_n tendent vers 0 avec $1/n$. En particulier, la suite des $(T^n f)^{\frac{1}{n}}$ a mêmes lim. inf. et sup. que (g_n).

Corollaire 6. — *Soit* T *un opérateur positif sur* $\mathscr{C}(K)$, *et soit* $f \in \mathscr{C}(K)$, $f > 0$. *Alors :*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max_K (T^n f)^{\frac{1}{n}}\right] = \sup_K(\gamma) = \sup_K(\Gamma).$$

On a une égalité analogue en remplaçant max *et* sup *par* min *et* inf.

Preuve. — La remarque ci-dessus relative à $(T^n f)^{\frac{1}{n}}$ montre qu'on peut se borner au cas $f = 1$. Notons alors : $k_n = \max\limits_{K} g_n$; $\lambda = \sup\limits_{K} \gamma$; $\mu = \limsup\limits_{n \to \infty} k_n$; on a :

$$\lambda \leqslant \sup_{K} \Gamma \leqslant \mu; \quad \lambda \leqslant \liminf_{n \to \infty} k_n \leqslant \mu.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $T_\varepsilon = (\lambda + \varepsilon)^{-1} T$; alors :

$$\liminf_{n \to \infty} (T_\varepsilon^n 1)^{\frac{1}{n}} \leqslant \lambda/(\lambda + \varepsilon) < 1,$$

donc $\inf\limits_{n} (T_\varepsilon^n 1) = 0$.

En vertu du théorème 1, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \|T_\varepsilon^n 1\| = 0;$$

en particulier pour n assez grand on aura :

$$\max_{K} T_\varepsilon^n 1 \leqslant 1,$$

donc $\mu \leqslant \lambda + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'oú $\mu \leqslant \lambda$, ce qui achève la preuve.

La seconde partie de l'énoncé se démontre de même en appliquant le théorème 2.

COROLLAIRE 7. — *Soit* T *un opérateur positif sur* $\mathscr{C}(\mathrm{K})$, *et soit* $f \in \mathscr{C}(\mathrm{K})$, *avec* $f > 0$. *Alors si* $(T^n f)^{\frac{1}{n}}$ *converge simplement vers une constante, la convergence est uniforme.*

Preuve. — Soit λ la constante de l'énoncé. Alors d'après le corollaire 6, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\max_{K} (T^n f)^{\frac{1}{n}}\right] = \lambda = \lim_{n \to \infty} \left[\min_{K} (T^n f)^{\frac{1}{n}}\right]$$

d'où la conclusion.

Remarque 8. — 1) Dans cet énoncé on ne peut pas supposer seulement que $f \geqslant 0$. En effet, prenons $K = [0, 1]$ et notons T l'opérateur défini par $Tf(x) = af(x^2)$; alors

$$(T^n f)^{\frac{1}{n}}(x) = af^{\frac{1}{n}}(x^{2^n})$$

(on suppose $a > 0$). Donc si $f(0) = f(1) = 0$, avec f dérivable en 0, la suite des $(T^n)^{\frac{1}{n}}$ converge simplement vers la constante 0, mais puisque $\|(T^nf)^{\frac{1}{n}}\| = a\|f\|^{\frac{1}{n}}$, la convergence n'est uniforme que si $f \equiv 0$.

2) On peut modifier un peu cet exemple pour montrer que même si $(T^nf)^{\frac{1}{n}}$ converge simplement vers une constante > 0, il peut ne pas y avoir convergence uniforme lorsque f a des zéros : il suffit de conserver le même T et de prendre pour f une fonction positive quelconque ayant des zéros, mais telle que $f(0) = f(1) = 1$.

Remarque 9. — Les théorèmes 1 et 2 précisent le comportement des T^n1 et T^nf lorsque l'on sait que T vérifie P_0 ou P_∞; mais c'est un problème bien différent que de savoir si une T donnée vérifie P_0 ou P_∞; toutefois, on peut répondre de façon assez complète à cette question dans certains cas particuliers.

Prenons par exemple K = le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de dimension 1; soit φ la rotation $x \rightarrow x + \theta$, où θ est un nombre irrationnel, et soit α un élément de $\mathscr{C}^+(K)$ avec $\alpha > 0$. Désignons par T l'opérateur presque-multiplicatif défini par $Tf = \alpha.(f \circ \varphi)$.

On a ici $(T^n1)(x) = \alpha(x)\alpha(x + \theta) \ldots \alpha(x + (n - 1)\theta)$.

Posons $\beta(x) = \operatorname{Log} \alpha(x)$; de $\alpha > 0$ résulte que $\beta \in \mathscr{C}(K)$.

Posons $k = \int \beta(t)\, dt$, l'intégrale étant relative à la mesure de Haar de K.

Si l'on pose $\tau_n(x) = \operatorname{Log}(T^n1)(x) = \sum_0^{(n-1)} \beta(x + i\theta)$, une propriété classique de l'intégrale de Riemann montre que la suite des fonctions τ_n/n converge uniformément vers la fonction constante k.

Or, les théorèmes 1 et 2 montrent que, si P_0 (resp. P_∞) est vérifié, τ_n/n est, à partir d'un certain n, inférieure à une constante < 0 (resp. supérieure à une constante > 0); et la réciproque est évidente; autrement dit :

Le critère pour que P_0 (resp. P_∞) *soit vérifié est que* $k < 0$ (resp. $k > 0$).

Reste à préciser le comportement de la suite des T^n1

(ou encore des τ_n) lorsque $k = 0$. Les théorèmes 1 et 2 permettent d'affirmer ceci :

Lorsque $k = 0$, *chacun des ensembles*

$$\{x : \forall n,\ \tau_n(x) \leqslant 0\} \qquad \textit{et} \qquad \{x : \forall n,\ \tau_n(x) \geqslant 0\}$$

est non vide.

Pour poursuivre l'étude du cas $k = 0$, il est commode d'utiliser le développement de β en série de Fourier $\Sigma a_n e^{2i\pi nx}$; un calcul élémentaire montre que si la série des

$$|a_n| . \left|\sin \frac{n\theta}{2}\right|^{-1}$$

est convergente, la suite des τ_n est bornée. Pour un β donné, qui ne soit pas un polynôme trigonométrique, l'ensemble des θ tels que la suite des τ_n ne soit pas bornée, ni supérieurement, ni inférieurement est un G_δ et comme il contient des rationnels partout denses (remarque de Kahane), c'est un résiduel de $[0, 1]$. Il serait intéressant de savoir si la suite des τ_n peut être bornée inférieurement sans l'être supérieurement; la seule chose facile à montrer est qu'il existe tout un résiduel de fonctions β dont chacune admet un résiduel de valeurs de θ pour lesquelles la suite des τ_n contient une sous-suite qui converge uniformément vers 0.

Signalons, pour terminer cette remarque, que ses deux énoncés s'étendent à tout opérateur T presque multiplicatif sur un compact quelconque sur lequel n'existe qu'une seule mesure de probabilité μ invariante par φ; les deux énoncés sont alors valables en prenant $k = \mu(\beta)$.

Étude des moyennes S_n^f pour un opérateur T quelconque.

Les théorèmes 1 et 2 constituent pour cette étude un outil commode. Pour toute $f \in \mathcal{C}(K)$ et pour tout entier $n > 0$, nous poserons :

$$S_n^f = (f + Tf + \cdots T_f^{n-1})/n$$

L'énoncé suivant est un cas particulier d'un théorème ergodique abstrait bien connu :

THÉORÈME 10. — *Si la famille des opérateurs* T^n *est équi-continue (ce qui équivaut à dire que la famille des fonctions* $T^n 1$ *est équi-bornée), et si la suite des* S_n^f *converge simplement vers une fonction continue, la convergence est uniforme.*

De plus l'ensemble des f *ayant cette propriété est l'espace vectoriel* $\mathrm{Ker}\,(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}$.

Si l'on abandonne l'hypothèse d'équicontinuité des T^n, la conclusion peut être différente :

Exemple 11. — On prend $K = [0, 1]$, et T est l'opérateur presque multiplicatif défini par $(Tf)(x) = 2f(x^2)$. Lorsque $f(0) = f(1) = 0$, avec f dérivable en 0, la suite des S_n^f converge simplement vers 0, mais non uniformément si $f \not\equiv 0$.

Dans cet exemple, ni f ni la limite des S_n^f ne sont > 0; pour voir plus clairement la raison de la non-uniforme convergence, nous avons besoin d'une sorte de réciproque du théorème 10 :

Pour $f \in \mathscr{C}^+(K)$, notons σ_f la fonction $\liminf\limits_{n \to \infty} S_n^f$.

LEMME 12. — *Si l'on note* m, M *les bornes inférieure et supérieure de* σ_f *(où* $f \in \mathscr{C}^+(K)$*) on a pour tout* $p > 0$: $mT^p 1 \leqslant M$ *(donc si* $m, M \in]0, \infty[$, *la suite des* T^p *est équi-continue).*

Preuve. — Pour tout $x \in K$ et tout entier $p > 0$, soit $\mu_{x,p}$ la mesure $\delta_x T^p$ définie par $\mu_{x,p}(g) = T^p g$

De l'identité élémentaire :

$$S_{n+p}^f(x) = \frac{p}{n+p} S_p^f(x) + \mu_{x,p}\left[\frac{n}{n+p} S_n^f\right],$$

on déduit d'après le théorème de Lebesgue-Fatou :

$$\sigma_f(x) = \liminf_{n \to \infty} \mu_{x,p}(S_n^f) \geqslant \mu_{x,p}(\sigma_f),$$

d'où $M \geqslant m\|\mu_{x,p}\|$ pour tout x, ou encore $mT^p 1 \leqslant M$. On en déduit, d'après le théorème ergodique 10 :

THÉORÈME 13. — *Pour un opérateur* T *quelconque, et* $f \in \mathscr{C}^+(K)$, *si la suite des* S_n^f *converge simplement vers une* *fonction continue* > 0, *la suite des* T^n *est équicontinue, et la convergence des* S_n^f *est uniforme.*

Prenons maintenant $f = 1$, pour simplifier. Nous remarquons que si $\inf \{S_n^1 : n > 0\} < 1$, on a aussi

$$\inf \{T^n 1 : n > 0\} < 1;$$

donc, d'après le théorème 1, la suite $(T^n 1)$ converge uniformément vers 0, donc aussi la suite (S_n^1). De même, d'après le théorème 2, si $\sup \{S_n^1\} > 1$, la suite (S_n^1) converge uniformément vers $+\infty$.

Si donc on cherche un exemple d'opérateur $T \geqslant 0$ tel que (S_n^1) converge de façon non uniforme vers une fonction continue σ, il faudra que :

a) la suite des T^n ne soit pas équicontinue,

b) σ prenne la valeur 0, des valeurs non nulles arbitrairement petites et des valeurs $\geqslant 1$,

c) que $\overset{-1}{\sigma}(0)$ soit T-stable : conséquence de l'inégalité :

$$\sigma_{(x)} \geqslant \mu_{x,p}(\sigma),$$

d) qu'il n'existe aucun voisinage fermé de $\overset{-1}{\sigma}(0)$ qui soit T-stable et sur lequel $\sigma < 1$.

On pourrait commencer à chercher cet exemple parmi les opérateurs presque-multiplicatifs. Ils sont particulièrement commodes ici; en effet, si T est défini par un couple (α, φ), on vérifie l'identité $\sigma(x) = \alpha(x)\sigma(\varphi(x))$; donc si $\alpha > 0$, le complémentaire de $\overset{-1}{\sigma}(0)$ est stable par φ, de même que $\overset{-1}{\sigma}(0)$. Et enfin, pour tout x dans ce complémentaire on a (en posant $x^n = \varphi^n(x)$) :

$$\begin{aligned} S_n^1(x) &= [1 + \alpha(x) + \cdots + \alpha(x) \ldots \alpha(x^{n-2})]/n \\ &= \sigma(x)\left[\sum_0^{n-1} \overset{-1}{\sigma}(x^i)\right]\Big/ n = \sigma(x) S_n^{1/\sigma}(x) \end{aligned}$$

ou plus simplement : $S_n^1 = \sigma S_n^{1/\sigma}$.

14. *Cas particulier des opérateurs* T *de la forme* $f \to f \circ \varphi$. — Nous en avons étudié un exemple dans la remarque 9. Il s'agit d'un cas particulièrement simple du cas où les $T^n 1$ valent 1 pour tout n; aussi peut-on ici se poser des pro-

blèmes plus précis tels que la recherche des fonctions f pour lesquelles il y a convergence de la suite (S_n^f), où

$$S_n^f = (f + f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n-1})/_n$$

Indiquons seulement dans ce sens quelques énoncés élémentaires : Désignons par M_φ^1 l'ensemble des mesures μ de probabilité sur K invariantes par φ, i.e. telles que

$$\varphi(\mu) = \mu.$$

— Si M_φ^1 contient un seul élément μ, la suite des S_n^f converge uniformément vers la constante $\mu(f)$.

— Pour tout élément extrémal μ de M_φ^1, la suite des S_n^f converge μ-presque partout vers $\mu(f)$.

Enfin voici un énoncé commode déduit des théorèmes 1 et 2, et concernant ces sommes S_n^f particulières :

Corollaire 15. — *Pour toute* $\varphi \in \mathscr{C}(K, K)$ *et toute* $f \in \mathscr{C}(K)$, *on a :* $\lim_{n\to\infty}\left(\max_K S_n^f\right) = \sup_K\left(\limsup_{n\to\infty} S_n^f\right) = \sup_K\left(\liminf_{n\to\infty} S_n^f\right)$.

On a une égalité analogue qu'on obtient en remplaçant max, sup *et* inf, *par* min, inf *et* sup.

Preuve. — On applique le corollaire 6 à l'opérateur presque-multiplicatif T défini par :

$$(Tg)(x) = \exp f(x)[g \circ \varphi(x)]$$

pour tous $g \in \mathscr{C}(K)$ et $x \in K$, en remarquant que

$$S_n^f = \operatorname{Log} T^n 1.$$

Étude de la suite des $(T^n1)^{\frac{1}{n}}$.

Ces fonctions sont l'analogue multiplicatif des moyennes S_n^1 et S_n^f étudiées ci-dessus. Nous en avons commencé l'étude avec les corollaires 5 et 6; ceux-ci mettent en évidence une raison de l'intérêt des $(T^n1)^{\frac{1}{n}}$: c'est que lorsque les T^n1 convergent vers 0 ou $+\infty$, on peut obtenir un renseignement supplémentaire sur la rapidité de convergence en étudiant leurs racines n-ièmes.

Nous allons voir que le corollaire 7 peut se généraliser dans plusieurs directions.

Pour $x \in K$, μ_x désignera encore la mesure $\delta_x T$, et plus généralement $\mu_{x,p} = \delta_x T^p$; et nous utiliserons les notations g_n, g, γ, Γ, introduites pour le corollaire 6.

LEMME 16. — 1) *Pour tout* $a \in K$, *on a :*

$$\gamma(a) \geqslant (\text{sup } \textit{essentiel de } \gamma, \textit{ relatif à } \mu_a).$$

2) *Pour tout* $k \geqslant 0$, *les ensembles* $\{x : \gamma(x) < k\}$ *et* $\{x : \gamma(x) \leqslant k\}$ *sont* T-*stables,* i.e. *portent* μ_x *dès qu'ils contiennent* x.

Preuve. — 1) Posons $k =$ (sup μ_a-essentiel de γ); il suffit de considérer le cas où $k > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie P de K, μ_a-mesurable avec $\mu_a(P) \neq 0$, et un entier N, tels que $n \geqslant N$ entraîne : $g_n \geqslant (k - \varepsilon)$ sur P, d'où

$$(T^{n+1}1)(a) = \mu_a(g_n^n) \geqslant (k - \varepsilon)^n \mu_a(P).$$

Il en résulte que $\liminf\limits_{n \to \infty} g_{n+1} \geqslant (k - \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\gamma(a) \geqslant k$.

2) Cette seconde propriété découle immédiatement de (1).

COROLLAIRE 17. — *Pour toute* $f \geqslant 0$ *universellement intégrable, on a* $T(f\gamma) \leqslant \gamma T(f)$.

Preuve. — Dans cet énoncé Tc est défini par

$$(Tc)(x) = \mu_x(c).$$

Alors, pour tout $a \in K$, si $k =$ (sup μ_a-essentiel de γ), on a bien :

$$(Tf\gamma)(a) = \mu_a(f\gamma) \leqslant k\mu_a(f) = k(Tf)(a) \leqslant \gamma(a)(Tf)(a)$$

PROPOSITION 18. — *Soit* $a \in K$, *et posons* $k =$ (sup μ_a-*essentiel de* γ). *Si* $X_k = \{x : \gamma(x) \leqslant k\}$ *est fermé, on a*

$$k = \gamma(a) = \Gamma(a).$$

Preuve. — Si $\mu_a = 0$, c'est trivialement vrai; on suppose donc $\mu_a \neq 0$. Comme X_k est fermé, et T-stable d'après le lemme 16, on peut lui appliquer le corollaire 6. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout n assez grand, on a : $g_n \leqslant (k + \varepsilon)$ sur X_k, qui porte μ_a; on a donc :

$T^{n+1}1(a) = \mu_a(g_n^n) \leqslant (k + \varepsilon)^n \|\mu_a\|$, d'où $\gamma(a) \leqslant \Gamma(a) \leqslant (k + \varepsilon)$.

Comme ε est arbitraire et qu'on sait déjà que $k \leqslant \gamma(a)$, on a bien :

$$\gamma(a) \leqslant \Gamma(a) \leqslant k \leqslant \gamma(a),$$

d'où l'égalité.

Corollaire 19. — *Supposons* γ s.c.i.; *alors :*

1) *On a* $\gamma = \Gamma = g$, *c'est-à-dire que la suite* (g_n) *converge.*

2) *Pour tout* $a \in K$ *et tout entier* $p > 0$, *on a :*

$g(a) =$ (sup *de* g *sur le support de* $\mu_{a,p}$) $=$ (sup *de* g *sur la réunion des supports des* $\mu_{a,p}$).

3) *La suite* (g_n) *est uniformément convergente supérieurement (en ce sens que pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a* $g_n \leqslant g + \varepsilon$ *pour tout* n *assez grand).*

Preuve. — Le (1) résulte de la proposition 18; le (2) pour $p = 1$ résulte du lemme 16.1 et du fait que g est s.c.i.; pour p quelconque, il résulte de ce que, si l'on remplace T par T^p, g est remplacé par g^p; démontrons le (3) :

Soit $X_p = \{x : g(x) \leqslant p\varepsilon\}$, où p est un entier positif quelconque. Comme X_p est T-stable, il existe (corollaire 6) un entier n_p tel que $(n \geqslant n_p)$ entraîne $g_n \leqslant (p + 1)\varepsilon$ sur X_p.

Or g étant bornée, K est réunion d'un nombre fini d'ensembles X_p; posons $N = \sup \{n_p\}$; pour tout $n \geqslant N$, on a sur chaque $(X_{p+1} \setminus X_p)$:

$$g_n \leqslant (p + 2)\varepsilon \leqslant g + 2\varepsilon$$

Comme cette inégalité est vraie en tout point de K, (3) est démontré.

Corollaire 20. — 1) *Si* γ *est* s.c.i., *on a* $\gamma(a) = \sup \gamma$ *pour tout point* a *pour lequel* $K =$ (*réunion des supports des* $\mu_{a,p}$); *si* γ *est continue, il suffit que* K *soit la fermeture de cette réunion.*

2) *Si ceci a lieu pour tout* a, γ *est une constante et la suite* (g_n) *converge uniformément.*

C'est immédiat à partir du corollaire 19.

Corollaire 21. — *Si* K *est un ensemble fini, on a* $\gamma = \Gamma$; *et de plus* $\gamma =$ constante *lorsque pour tout* $a \in \text{K}$, *la réunion des supports des* $\mu_{a,p}$ *est* K *tout entier.*

Exemple 22. — Voici un exemple, simple mais instructif, dans lequel γ est s.c.i. sans être continue : $\text{K} = [0, 1]$; $\mu_x = x\delta_1 + 2(1 - x)\delta_0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour l'opérateur T associé à ces μ_x, γ vaut 2 sur $[0, 1[$, avec $\gamma(1) = 1$.

Étudions maintenant quand l'inégalité $\text{T}(\gamma f) \leqslant \gamma\text{T}(f)$ peut être remplacée par une égalité.

Proposition 23. — *Soit* φ *une fonction numérique bornée universellement mesurable sur* K; *les énoncés suivants sont équivalents :*

1) *Pour toute* $f \in \mathscr{C}^+(\text{K})$, *on a* $\text{T}(\varphi f) = \varphi\text{T}(f)$.

2) *Pour tout scalaire* k, *l'ensemble* $\text{X} = \{x : \varphi(x) = k\}$ *est* T-*stable* (i.e. *il porte* μ_x *pour tout* $x \in \text{X}$).

Preuve. — (1) signifie que pour tout $a \in \text{K}$ on a :

$$\mu_a(f\varphi) = \varphi(a)\mu_a(f),$$

autrement dit $\varphi \,.\, \mu_a = \varphi(a)\mu_a$, c'est-à-dire que μ_a-presque partout on a $\varphi = \varphi(a)$, autrement dit que μ_a est portée par

$$\{x : \varphi(x) = \varphi(a)\},$$

ce qui équivaut à (2).

Proposition 24. — *Si* γ *est continue et si* $\text{T}(\gamma f) = \gamma\text{T}(f)$ *pour toute* $f \in \mathscr{C}^+(\text{K})$, *les* g_n *convergent uniformément vers* γ.

Preuve. — Pour tous scalaires k_1, k_2, le fermé

$$\text{X} = \{x : k_1 \leqslant \gamma(x) \leqslant k_2\}$$

est T-stable d'après la proposition 23.

Donc d'après le corollaire 6, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout n assez grand, on a sur X : $(k_1 - \varepsilon) \leqslant g_n \leqslant (k_2 + \varepsilon)$. La convergence uniforme cherchée en résulte aussitôt. On pourrait penser qu'inversement la convergence uniforme des g_n vers γ entraîne $T(\gamma f) = \gamma T(f)$ identiquement; nous allons voir qu'il n'en est rien en prenant K fini (d'où $\gamma = \Gamma$ d'après le corollaire 21).

Exemple 25. — $K = \{0, 1\}$ et $\mu_1 = 2\delta_1 + \delta_0$, $\gamma_0 = \delta_0$. On vérifie que :

$$(T^n 1)(1) = 2^{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad (T^n 1)(0) = 1.$$

Donc $\gamma(1) = 2$ et $\gamma(0) = 1$; donc l'ensemble

$$\{1\} = \{x : \gamma(x) = 2\}$$

n'est pas T-stable.

A ce stade, nous pouvons poser le problème général auquel nous apporterons quelques réponses partielles.

PROBLÈME 26. — *Si la fonction* $\gamma = \liminf\,(T^n 1)^{\frac{1}{n}}$ *associée à un opérateur positif* T *sur* K *est continue (ce qui entraîne* $\gamma = \Gamma = g$*), est-ce que les* $g_n = (T^n 1)^{\frac{1}{n}}$ *convergent uniformément vers* γ?

Voici une réponse positive complète dans un cas particulier :

THÉORÈME 27. — *Pour tout opérateur presque-multiplicatif* T, *si* γ *est continue, les* g_n *convergent uniformément vers* γ.

Preuve. — De façon plus générale, T étant défini par un couple (α, φ), on vérifie que, pour tout x tel que $\alpha(x) \neq 0$ on a :

$$\gamma(x) = \gamma(\varphi(x)) \qquad \text{et} \qquad \Gamma(x) = \Gamma(\varphi(x))$$

Donc pour tout scalaire $k \geqslant 0$, les ensembles $\{\gamma = k\}$ et $\{\Gamma = k\}$ sont T-stables.

Donc si γ est continue, tout ensemble $X = \overset{-1}{\gamma}([k_1, k_2])$ est un fermé T-stable; il en résulte, d'après le corollaire 6, que pour tout $\varepsilon > 0$, on a sur X, pour tout n assez grand : (min de γ sur X) $- \varepsilon \leqslant g_n \leqslant$ (max de γ sur X) $+ \varepsilon$. D'où la convergence uniforme annoncée.

Lorsque $T1 > 0$, ce qui équivaut à $\alpha > 0$, le théorème ergodique 10 fournit une autre démonstration. Il suffit de l'appliquer à $\operatorname{Log} g_n = S_n^\beta$, où $\beta = \operatorname{Log} \alpha$.

Nous allons maintenant aborder le cas général.

LEMME 28. — *On ne fait aucune hypothèse sur* T *ni sur* γ. *On se donne une partition de* K *en deux compacts* K_0, K_1; *on pose* $k_0 = \sup\{\gamma(x) : x \in K_0\}$, $k_1 = \inf\{\gamma(x) : x \in K_1\}$ *et on suppose que* $k_0 < k_1$.

Alors si l'on note $\tilde{T}$ *l'opérateur sur* $\mathcal{C}(K_1)$ *défini par* $\tilde{T}(f) = T(f_1)$, *où* $f_1 = f$ *sur* K_1, *et* $f_1 = 0$ *sur* K_0, *on a aussi* $k_1 = \inf\{\tilde{\gamma}(x) : x \in K_1\}$.

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, *on a* $g_n \geqslant \tilde{g}_n \geqslant (k_1 - \varepsilon)$ *sur* K_1, *pour tout* n *assez grand.*

Preuve. — Notons β la fonction sur K qui vaut 0 sur K_0 et 1 sur K_1, et posons $\alpha = (1 - \beta)$; les fonctions α et β sont continues.

Comme d'après le lemme 16, K_0 est T-stable (ce qui entraîne $\alpha T^n \alpha = \alpha T^n 1$), le corollaire 6 montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un scalaire $A_\varepsilon > 1$ tel que :

$$(1) \qquad \alpha T^n 1 \leqslant A_\varepsilon (k_0 + \varepsilon)^n \alpha \quad \text{pour tout } n.$$

Soit a le sup de $T\alpha$ sur K_1; on a donc :

$$T1 = T\beta + T\alpha = T\beta + \beta T\alpha + \alpha T\alpha \leqslant T\beta + a\beta + \alpha T1.$$

Compte tenu de la relation suivante, déduite de (1) :

$$(2) \qquad T(\alpha T^n 1) \leqslant a A_\varepsilon (k_0 + \varepsilon)^n \beta + \alpha T^{n+1} 1,$$

on obtient donc par récurrence :

$$(3) \quad T^n 1 \leqslant T^n \beta + a A_\varepsilon [T^{n-1}\beta + (k_0 + \varepsilon) T^{n-2}\beta + \cdots + (k_0 + \varepsilon)^{n-1}\beta] + \alpha T^n 1.$$

On déduit de (3), en identifiant $\tilde{T}^n 1$ à $T^n \beta$:

$$(4) \quad \beta \frac{T^n 1}{(k_0 + \varepsilon)^n} \leqslant B_\varepsilon \left[1 + \frac{\tilde{T} 1}{(k_0 + \varepsilon)} + \cdots + \frac{\tilde{T}^n 1}{(k_0 + \varepsilon)^n}\right]$$

Je dis que, pour tout ε tel que $k_0 + \varepsilon < k_1$, on a

$$\tilde{T}^n 1 / (k_0 + \varepsilon)^n > 1$$

pour tout n assez grand; sinon d'après le théorème 2 appliqué à K_1 et $\tilde{T}$, il existerait un $a \in K_1$, tel que

$$(\tilde{T}^n 1)(a)/(k_0 + \varepsilon)^n \leqslant 1$$

pour tout n; la relation (4) donnerait donc :

$$\left(\frac{g_n(a)}{k_0 + \varepsilon}\right)^n \leqslant (n+1)B_\varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma(a) \leqslant (k_0 + \varepsilon) < k_1,$$

ce qui est impossible puisque $a \in K_1$.

On a donc bien sur X_1, pour tout n assez grand (sous l'hypothèse $k_0 + \varepsilon < k_1$) :

$$\beta T^n 1 \geqslant \tilde{T}^n 1 \geqslant (k_0 + \varepsilon)^n.$$

En particulier, ceci donne bien :

$$(k_0 + \varepsilon) \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant \gamma, \qquad \text{d'où} \qquad k_1 = \inf \tilde{\gamma} = \inf \gamma \text{ sur } K_1.$$

Théorème 29. — *Soit* T *un opérateur positif sur* K *tel que* γ *soit continue. Si* $\gamma(K)$ *est totalement discontinu (par exemple si* K *est dénombrable),* γ *est limite uniforme des* g_n.

Preuve. — Il existe des scalaires $k \notin \gamma(K)$ partout denses dans R, et pour un tel k, le lemme 28 s'applique aux fermés $\{\gamma \leqslant k\}$, $\{\gamma \geqslant k\}$; donc γ est limite uniforme inférieurement des g_n; le corollaire 19.3 achève de démontrer la convergence uniforme cherchée.

Voici maintenant deux autres critères assez différents.

Définition 30. — *Soit* (f_n) *une suite de fonctions numériques sur un espace topologique* E, *et soit* f *une autre fonction numérique. On dira que* (f_n) majore f *en un point* a *de* E *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* N *et un voisinage* V *de* a *tels que* $\forall n \geqslant N$ *et* $x \in V$, *on ait*

$$f_n(x) \geqslant (f(a) - \varepsilon).$$

En particulier si $f = \lim f_n$, f est alors s.c.i. au point a. Il est clair aussi que toute suite croissante de fonctions continues majore sa limite en tout point.

Dire que (f_n) majore et minore f au point a équivaut à dire que f est continue en a et que la suite (f_n) converge uniformément vers f au point a. En particulier si E est compact ou métrique complet, toute suite convergente de fonctions continues majore et minore sa limite en tout point d'un résiduel de E (donc partout dense).

LEMME 31. — *Supposons* γ s.c.i.; *soit* R *le résiduel des points de* K *en lesquels* (g_n) *majore* γ, *et soit* $a \in \mathrm{K}$. *Si* $\gamma(a) = \sup \{\gamma(x) : x \in \mathrm{R} \cap (\textit{support de } \mu_x)\}$, *on a aussi* $a \in \mathrm{R}$.

Preuve. — C'est évident si $\gamma(a) = 0$; supposons donc $\gamma(a) \neq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in \mathrm{R} \cap$ (support de μ_a) tel que $\gamma(b) > \gamma(a) - \varepsilon$. Il existe donc un ouvert ω contenant b et un entier N tels que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait $g_n \geqslant \gamma(a) - \varepsilon$ sur ω.

Comme $x \to \mu_x$ est continue, il existe $k > 0$ et un voisinage V de a tels que, pour tout $x \in \mathrm{V}$, on ait $\mu_x(\omega) > k$.

Or $(\mathrm{T}^{n+1}1)(x) = \mu_x(g_n^n) \geqslant k(\gamma(a) - \varepsilon)^n$, d'où

$$g_{n+1}(x) \geqslant (\gamma(a) - \varepsilon)(k/(\gamma(a) - \varepsilon))^{\frac{1}{n+1}}.$$

Comme le coefficient de $(\gamma(a) - \varepsilon)$ tend vers 1 quand $n \to \infty$, on a bien $a \in \mathrm{R}$.

COROLLAIRE 32. — *Si* γ *est* s.c.i., *tout point* a *tel que* $\gamma(a) = \sup \{\gamma(x) : x \in (\textit{support de } \mu_x)\}$ *est un point de* R.

En effet, comme R est partout dense, la condition du lemme 31 est alors réalisée.

THÉORÈME 33. — *Si* γ *est* s.c.i. *et si pour tout* $x \in \mathrm{K}$, *le support de* μ_x *est la fermeture de son intérieur, en tout point de* K *la suite* (g_n) « *majore* » γ.

Si de plus γ *est continue, la suite est uniformément convergente.*

C'est une conséquence des corollaires 32 et 19.

DÉFINITION 34. — *Une famille* (μ_i) *de mesures positives sur un compact* K *est dite uniformément continue par rapport à une mesure* $\mu \geqslant 0$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un scalaire* $k_\varepsilon > 0$ *tel que toute* μ_i *s'écrive :*

$$\mu_i = \varepsilon_i + \nu_i, \quad \textit{où} \quad \varepsilon_i,\ \nu_i \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \|\varepsilon_i\| < \varepsilon,\ \nu_i \leqslant k_\varepsilon . \mu.$$

Nous pouvons alors donner notre dernier critère :

THÉORÈME 35. — *Si* γ *est* s.c.i., *et si la famille des* μ_x *est uniformément continue par rapport à une mesure* μ, *la suite* (g_n) *domine* γ *en tout point.*

Si de plus γ *est continue, elle converge uniformément vers* γ.

Preuve. — Donnons-nous $a \in K$ et $\varepsilon > 0$. Il existe alors un ouvert ω de K, un scalaire $k > 0$, et un voisinage V de a tels que,

$$\gamma \geqslant \gamma(a) - \varepsilon \quad \text{sur } \omega; \qquad \mu_x(\omega) \geqslant k \quad \text{pour tout} \quad x \in V.$$

D'autre part, d'après l'uniforme continuité des μ_x par rapport à μ, il existe k' tel que, pour tout $x \in K$:

$$(1) \quad \mu_x = \varepsilon_x + \nu_x, \quad \text{avec} \quad \|\varepsilon_x\| \leqslant k/4 \quad \text{et} \quad \nu_x \leqslant k'\mu.$$

Enfin, comme $\gamma = \lim g_n$, il existe X compact $\subset \omega$, et un entier N tels que :

$$(2) \qquad \mu(\omega - X) < k/k'$$

et, pour tout $n > N : |\gamma - g_n| < \varepsilon$ sur X, d'où

$$g_n > \gamma(a) - 2\varepsilon.$$

On tire de (1) et (2) :

$$\mu_x(\omega - X) \leqslant \|\varepsilon_x\| + k'(k/4k') \leqslant k/2, \qquad \text{d'où} \qquad \mu_x(X) \geqslant k/2.$$

On a donc, pour tout $x \in V$:

$$(T^{n+1}1)(x) = \mu_x(g_n^n) \geqslant \frac{k}{2}(\gamma(a) - 2\varepsilon),$$

d'où $g_{n+1}(x) \geqslant (k/2)^{\frac{1}{n+1}}(\gamma(a) - 2\varepsilon)$, ce qui démontre la majoration annoncée.

L'application à γ continue est immédiate.

36. *Extension à un cadre plus général.* — On peut espérer pouvoir étendre certains résultats de ce travail à un cadre plus général. Sans penser tout de suite à remplacer $\mathscr{C}(K)$ par une algèbre ordonnée où les points de K seraient remplacés par les caractères positifs de l'algèbre, on pourrait commencer par remplacer $\mathscr{C}(K)$ par un sous-espace vectoriel

de $\mathscr{C}(\mathrm{K})$ contenant les constantes, ou par l'espace vectoriel A(X) des fonctions affines continues sur un convexe compact, avec l'hypothèse que, pour tout point extrémal x de X, il existe $n > 0$ tel que $(\mathrm{T}^n 1(x) < 1$. Mokobodzki a vérifié les théorèmes 1 et 2 pour la première de ces extensions, et pour la seconde lorsque $\mathscr{E}(\mathrm{X})$ est fermé.

Manuscrit reçu le 11 janvier 1975.

Cyprian FOIAS,
Institut de Mathématiques
Calea Grivitei 21
Bucarest 12, Roumanie.

Gustave CHOQUET,
Université de Paris VI
Mathématiques
4, place Jussieu
75005 Paris, France.