ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ CEREZO

Solutions analytiques des équations invariantes sur un groupe compact ou complexe réductif

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 249-277

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_249_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 249-277

SOLUTIONS ANALYTIQUES DES ÉQUATIONS INVARIANTES SUR UN GROUPE COMPACT OU COMPLEXE RÉDUCTIF

par André CEREZO

Ce travail se compose de deux parties. La première est parallèle et complémentaire à l'article [1], dont elle reprend à peu près les notations : on y donnait une caractérisation "algébrique" (portant sur les coefficients de Fourier) des opérateurs différentiels linéaires invariants à gauche sur un groupe de Lie compact (ou un espace homogène) qui possèdent certaines propriétés de résolution "différentiable" : surjectivité dans C^∞ ou $\mathcal{D}'$, existence d'une solution élémentaire distribution, etc. De même on donne ici une condition du même type caractérisant les propriétés de surjectivité dans l'espace des fonctions analytiques, ou d'existence d'une solution élémentaire hyperfonction (théorème 6). Comme dans le cas différentiable, une condition plus faible caractérise encore les opérateurs à indice, ou ayant une paramétrix (théorème 8). De nouveau des phénomènes arithmétiques apparaissent, mais plus faiblement.

La seconde partie traite des équations différentielles invariantes sur un groupe de Lie complexe réductif, dans l'espace des fonctions holomorphes. L'idée est de se ramener à une équation sur le sous-groupe compact maximal (donc à un problème analogue au problème précédent), et ceci au moyen d'un "développement de Laurent" des fonctions holomorphes. On peut ainsi caractériser les opérateurs différentiels invariants qui sont surjectifs, ou d'indice fini, dans cet espace (théorème 14).

PREMIERE PARTIE

1. Rappels et notations.

K est un groupe de Lie compact connexe, dk sa mesure de Haar de masse 1, $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de K (de dimension finie) dans des espaces hilbertiens ; de chaque classe de $\hat{K}$ on choisit un représentant unitaire M, représentation de K dans l'espace H(M) de dimension $d(M)$. $L^2(K, dk)$ est la somme directe hilbertienne des sous-espaces vectoriels des coefficients des représentations de $\hat{K}$: si $f \in L^2(K, dk)$, soit

$$\hat{f}(M) = \int_K f(k)\, M^*(k)\, dk \qquad (M \in \hat{K}\,; MM^* = M^*M = id) \qquad (1)$$

sa transformée de Fourier. On a une formule de Plancherel

$$\|f\|^2 = \sum_{M \in \hat{K}} d(M)\, |||\hat{f}(M)|||^2 \qquad (|||A|||^2 = tr\, AA^*) \qquad (2)$$

et, si f est C^∞, une formule d'inversion

$$f(k) = \sum_{M \in \hat{K}} d(M)\ tr[\hat{f}(M)\, M(k)]\ . \qquad \text{(voir [5], Ch. V)} \qquad (3)$$

On identifie l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K à celle des champs de vecteurs invariants à gauche sur K, et donc l'algèbre D(K) des opérateurs différentiels linéaires invariants à gauche sur K à coefficients complexes à l'algèbre enveloppante complexifiée de $\mathfrak{k}$. Le centre Z(K) de D(K) est formé des opérateurs bi-invariants sur K (c'est-à-dire invariants à droite et à gauche). On note encore M la représentation de D(K) dans H(M) associée à M, et on a :

– si $X \in \mathfrak{k}$, $\widehat{Xf}(M) = XM(1)\, \hat{f}(M) = M(X)\, \hat{f}(M)$, pour $f \in C^\infty(K)$.

– si $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une base de $\mathfrak{k}$ et si

$$P = \Sigma\, a_\alpha X^\alpha = \Sigma\, a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

appartient à D(K),

$$\widehat{Pf}(M) = \Sigma\, a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} M(X_1)^{\alpha_1} \ldots M(X_n)^{\alpha_n} \hat{f}(M)$$

$$= M(P)\, \hat{f}(M) \ , \quad \text{pour} \quad f \in C^\infty(K) \ .$$

Les opérateurs M(P) sont scalaires pour tout $M \in \hat{K}$ si et seulement si $P \in Z(K)$.

$\mathfrak{k}$ est la somme directe de son centre $\mathfrak{z}$ et de l'algèbre semi-simple compacte $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$, dont on note Γ l'opérateur de Casimir. Si $\{X_1, \ldots, X_s\}$ est une base de $\mathfrak{z}$, l'opérateur

$$\Delta = \Delta_{\mathfrak{z}} + \Gamma \ , \quad \text{avec} \quad \Delta_{\mathfrak{z}} = -\sum_{j=1}^{s} X_j^2$$

est un opérateur elliptique auto-adjoint de degré 2, bi-invariant sur K ; on note $\delta(M)$ $(M \in \hat{K})$ les scalaires positifs définis par

$$M(\Delta) = (\delta(M))^2\, id_{H(M)} \quad (M \in \hat{K}) \ .$$

On rappelle la caractérisation donnée dans [1] (proposition 5, p. 567) des fonctions C^∞ et des distributions sur K par leur coefficients de Fourier : la formule

$$\langle T, f \rangle = \sum_{M \in \hat{K}} d(M)\, tr[\hat{T}(M)\, \hat{f}(M)] \quad (T \in \mathcal{D}'(K)\ , f \in C^\infty(K))$$

permet de définir par dualité les coefficients de Fourier $\hat{T}(M)$ $(M \in \hat{K})$ d'une distribution T sur K ; ce sont encore des opérateurs continus dans H(M), et pour qu'une famille $(a(M))$ $(M \in \hat{K})$ d'opérateurs continus dans H(M) soit la famille des coefficients de Fourier d'une fonction indéfiniment différentiable (resp. d'une distribution) sur K, il faut et il suffit que

$$\forall N \in \mathbf{N} \quad \exists C > 0 \quad \forall M \in \hat{K} \quad |||a(M)||| \leqslant \frac{C}{1 + \delta(M)^N}$$

$$(\text{resp. } \exists N \in \mathbf{N},\ C > 0 \quad \forall M \in \hat{K} \quad |||a(M)||| \leqslant C(1 + \delta(M)^N)\ )\ .$$

En fait, les conditions énoncées dans [1] sont légèrement différentes, mais leur équivalence avec celles-ci résulte facilement du lemme 3 de [1], p. 565.

Enfin on a montré dans [1] (théorème I, p. 568) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $P \in D(K)$ soit surjectif dans $C^{\infty}(K)$ est que

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad C > 0 \quad \forall M \in \hat{K} \quad |||M(P)^{-1}||| \leqslant C(1 + \delta(M)^{N}) . \quad (4)$$

2. Caractérisation de $\mathcal{A}(K)$ et $\mathcal{B}(K)$.

LEMME 1. – *Soit* (a_p) $(p \in \mathbf{N}^r)$ *une famille de nombres positifs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\exists \rho \in (]0, 1[)^r, \quad C > 0, \quad \forall p \in \mathbf{N}^r \quad a_p < C\rho^p$

ii) $\exists A > 0 \quad \forall q \in \mathbf{N}^r - \{0\} \quad \sum_{p \in \mathbf{N}^r} p^q a_p \leqslant A^{|q|} q\,!$

Preuve. – Introduisons la condition

iii) $\exists A > 0 \quad \forall q \in \mathbf{N}^r - \{0\} \quad \forall \theta \in \mathbf{R}^r \quad \sum_{p \in \mathbf{N}^r} (ip)^q a_p e^{ip} \leqslant$

$$\leqslant A^{|q|} q\,! \ .$$

ii) $\Rightarrow$ iii) trivialement.

i) $\Rightarrow$ ii) : Notons ϵ le multi-indice $(1, \ldots, 1)$. On a

$$\sum_{p \in \mathbf{N}^r} p^q \rho^p < \sum_{p \in \mathbf{N}^r} \frac{(p+q)\,!}{p\,!} \rho^p = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^q \sum_{p \in \mathbf{N}^r} \rho^{p+q}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^q \frac{\rho^q}{(1-\rho)^{\epsilon}} = \frac{q\,!}{(1-\rho)^{q+\epsilon}} .$$

Donc i) implique

$$\sum_{p \in \mathbf{N}^r} p^q a_p < C \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{q+\epsilon} q\,! \quad , \quad \text{d'où ii).}$$

iii) $\Rightarrow$ i) : La condition iii) exprime que la fonction

$$f(\theta) = \sum_{p \in \mathbf{N}^r} a_p e^{ip\theta}$$

est analytique (réelle) sur le tore $\mathbf{T}^r$. Mais la série entière $\sum_{p \in \mathbf{N}^r} a_p z^p$ définit alors une fonction de r variables complexes holomorphe dans un voisinage du polydisque unité, ce qu'exprime précisément la condition i). ■

Remarque 2. – On utilisera les conditions i) et ii) du lemme 1 sous les formes suivantes, visiblement équivalentes :

i') $\exists\, \rho \in]0,1[,\ C > 0,\ \forall p \in \mathbf{N}^r \quad a_p < C\rho^{|p|}$

ii') $\exists\, A > 0\ \forall q \in \mathbf{N} - \{0\} \displaystyle\sum_{p \in \mathbf{N}^r} (1 + |p|^2)^{2q} a_p \leqslant A^{4q}((2q)!)^2.$

Remarque 3. – Soit s la dimension de $\mathfrak{z}$, K' un groupe compact semi-simple simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}\ ,\ \mathfrak{k}]$, et t le rang de K'. Le revêtement universel de K est isomorphe au produit direct $\mathbf{R}^s \times K'$, et ses représentations irréductibles sont les produits tensoriels d'une représentation irréductible de K' par une représentation irréductible de $\mathbf{R}^s$ ([5], p. 66). Celles de K' sont paramétrées à isomorphisme près par les points d'un réseau isomorphe à $\mathbf{N}^t$ (le réseau des poids dominants, voir [4], exposé 17), et celles de $\mathbf{R}^s$ par $\mathbf{R}^s$. Comme K est un quotient compact de $\mathbf{R}^s \times K'$ par un sous-groupe distingué discret, K est donc paramétré par les points d'un réseau discret de $\mathbf{R}^s \times \mathbf{N}^t$, dont la projection sur $\mathbf{R}^s$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^s$ et la projection sur $\mathbf{N}^t$ est $\mathbf{N}^t$. On en déduit une bijection de $\hat{K}$ sur une partie de $\mathbf{Z}^{s+t}$, pour laquelle les coefficients de Fourier $(\delta(M))^2$ de l'opérateur Δ du § 1 sont polynômiaux (de degré 2) : c'est déjà vrai des coefficients de Δ pour toutes les représentations de $\mathbf{R}^s \times K'$, puisque $\Delta = -\Sigma\, X_j^2 + \Gamma$, et que les coefficients de Fourier de Γ sont les valeurs d'un polynôme de degré 2 sur les poids dominants. Il en est de même de la dimension $d(M)$ de H(M).

On note $\mathfrak{A}(K)$ l'espace des fonctions analytiques sur K muni de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet-Schwartz (limite inductive des espaces de fonctions holomorphes dans les voisinages complexes de K). Pour $\rho \in]0,1[$, on note $\hat{\mathfrak{A}}_\rho(K)$ l'espace des familles $(a(M))$ d'opérateurs continus dans H(M) telles que

$$\sup_{M \in \hat{K}} |||a(M)|||\, \rho^{-\delta(M)} < \infty\ ,$$

muni de la norme écrite, et on pose

$$\hat{\mathcal{A}}(\mathrm{K}) = \varinjlim_{\rho \in]0,1[} \hat{\mathcal{A}}_\rho(\mathrm{K}) .$$

PROPOSITION 4. – *La transformation de Fourier est un isomorphisme de* $\mathcal{A}(\mathrm{K})$ *sur* $\hat{\mathcal{A}}(\mathrm{K})$.

Preuve. – Dès que $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{K})$, sa transformée de Fourier $(\hat{f}(\mathrm{M}))$ $(\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}})$ est définie par (1), et cette transformation est bijective de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{K})$ sur l'espace des familles $(\hat{f}(\mathrm{M}))$ "à décroissance rapide" (voir la fin du § 1). De plus f est analytique au voisinage d'un point $k_0 \in \mathrm{K}$ si et seulement si on a des majorations de ses dérivées uniformes dans un voisinage V de k_0 :

$$\exists\, \mathrm{A}_{k_0} > 0,\ \forall \alpha \in \mathrm{N}^n - \{0\},\ \forall k \in \mathrm{V}$$
$$|\mathrm{X}^\alpha f(k)| \leqslant \mathrm{A}_{k_0}^{|\alpha|}\, \alpha\,!$$

où l'on note encore $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\}$ une base de $\mathfrak{k}$. Comme K est compact, ces majorations équivalent à une majoration uniforme :

$$\exists\, \mathrm{A} > 0,\ \forall \alpha \in \mathrm{N}^n - \{0\},\ \forall k \in \mathrm{K} \tag{5}$$
$$|\mathrm{X}^\alpha f(k)| \leqslant \mathrm{A}^{|\alpha|}\, \alpha\,!\ .$$

De plus, et toujours grâce à la compacité de K, on obtient un système d'inégalités équivalent en remplaçant $\sup_{k \in \mathrm{K}} |\mathrm{X}^\alpha f(k)| = \|\mathrm{X}^\alpha f\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{K})}$ par $\|\mathrm{X}^\alpha f\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{K})}$:

$$\exists\, \mathrm{A} > 0,\ \forall \alpha \in \mathrm{N}^n - \{0\},\ \forall k \in \mathrm{K}$$
$$\|\mathrm{X}^\alpha f\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{K})} \leqslant \mathrm{A}^{|\alpha|}\, \alpha\,!\ .$$

Comme une puissance de l'opérateur elliptique Δ domine tout opérateur invariant à gauche (cf. [1], p. 565), on peut se contenter des inégalités

$$\exists\, \mathrm{A} > 0,\ \forall q \in \mathrm{N} - \{0\} \quad \|\Delta^q f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{K})} \leqslant \mathrm{A}^{4q} (2q)\,!^2$$

On obtient alors, par la formule de Plancherel (2) :

$$\exists\, A > 0,\ \forall q \in \mathrm{N} - \{0\} \sum_{M \in \hat{K}} d(M)\,\delta(M)^{4q}\, |||\hat{f}(M)|||^2 \leqslant A^{4q}(2q)!^2\ . \tag{6}$$

Comme $1 \leqslant d(M) \leqslant C(1 + \delta(M)^{2b})$ pour certains $C > 0$, $b \in \mathrm{N}$ (cf. la remarque sur la mesure de Dirac de [1], p. 567) ; il résulte du lemme 1, de la remarque 2, et de la remarque 3, que les inégalités (6), de la forme (ii′), sont équivalentes aux inégalités suivantes, de la forme (i′) :

$$\exists \rho \in\,]0,1[\ ,\ C > 0,\ \forall M \in \hat{K} \quad |||\hat{f}(M)||| < C\rho^{\delta(M)}\ . \tag{7}$$

Donc la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{A}(K)$ sur $\hat{\mathcal{A}}(K)$. De plus, d'après la démonstration du lemme 1, il est clair que si f vérifie (7) avec la constante ρ, elle vérifie (6) avec une constante A de l'ordre de $(1 - \rho)^{-1}$, et réciproquement ; comme $\mathcal{A}(K)$ est la limite inductive des espaces de fonctions vérifiant (5) pour une constante A donnée, la bicontinuité de la transformation de Fourier en résulte. ■

Par la formule de dualité

$$\langle T , f \rangle = \sum_{M \in \hat{K}} d(M)\ tr[\hat{T}(M)\,\hat{f}(M)]\ ,$$

on identifie le dual de $\hat{\mathcal{A}}(K)$ à l'espace (de Fréchet-Schwartz) $\hat{\mathcal{B}}(K)$ des familles $(\hat{T}(M))$ $(M \in \hat{K})$ d'opérateurs continus dans $H(M)$ telles que

$$\forall \lambda > 1\ \ \exists C > 0\ \ \forall M \in \hat{K} \quad |||\hat{T}(M)||| < C\lambda^{\delta(M)}\ . \tag{8}$$

Comme K est compact, l'espace $\mathcal{B}(K)$ des *hyperfonctions* sur K s'identifie canoniquement au dual de $\mathcal{A}(K)$ (cf. [3], th. 121, p. 58) ; d'où une définition naturelle des coefficients de Fourier d'une hyperfonction T sur K, et la proposition évidente suivante :

PROPOSITION 5. — *La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{B}(K)$ sur $\hat{\mathcal{B}}(K)$.*

Remarque. — Un opérateur $P \in D(K)$ est, bien sûr, continu de $\mathcal{A}(K)$ dans $\mathcal{A}(K)$ et de $\mathcal{B}(K)$ dans $\mathcal{B}(K)$, et on a encore, pour $T \in \mathcal{B}(K)$:

$$\widehat{PT}(M) = M(P)\,\hat{T}(M)\ .$$

3. Existence de solutions analytiques.

Une équation sur K du type $Pf = g$, où $P \in D(K)$ et $f, g \in \mathcal{A}(K)$ (resp. $\mathcal{B}(K)$), équivaut, d'après les propositions 4 et 5, à la famille d'équations

$$M(P)\,\hat{f}(M) = \hat{g}(M)$$

où les familles $(\hat{f}(M))$ et $(\hat{g}(M))$ $(M \in \hat{K})$ vérifiant la condition (7) (resp. (8)).

THEOREME 6. – *Soit* P *un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie compact connexe* K. *Les conditions sont équivalentes :*

a) $P\,\mathcal{B}(K) \supset \mathcal{A}(K)$

b) $P\,\mathcal{A}(K) = \mathcal{A}(K)$

c) P *est un isomorphisme de* $\mathcal{A}(K)$

d) P *a une solution élémentaire hyperfonction sur* K

e) $P\,\mathcal{B}(K) = \mathcal{B}(K)$

f) P *est un isomorphisme de* $\mathcal{B}(K)$

g) *Les coefficients de Fourier* $M(P)$ $(M \in \hat{K})$ *de* P *sont inversibles et*

$$\forall \lambda > 1 \ \exists C > 0 \ \forall M \in \hat{K} \quad |||M(P)^{-1}||| \leqslant C\lambda^{\delta(M)}$$

h) *Mêmes propriétés pour le transport* ${}^tP$ *de* P.

Preuve. – Comme ${}^{tt}P = P$, il suffit de montrer les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} a) & \Leftarrow & b) & \Leftrightarrow & c) & \Rightarrow & h) \\ \Downarrow & & \Uparrow & & & & \\ g) & \Rightarrow & d) & \Leftrightarrow & e) & \Leftrightarrow & f) \end{array}$$

a) $\Rightarrow$ g) : Par hypothèse, pour toute $f \in \mathcal{A}(K)$, il existe $T \in \mathcal{B}(K)$ telle que

$$\forall M \in \hat{K} \quad M(P)\,\hat{T}(M) = \hat{f}(M)\ .$$

D'abord ceci implique que les $M(P)$ sont inversibles, puisque le second membre est l'identité si l'on prend $f = d(M)\, tr\, M(.)$. Supposons g) faux : il existe $\lambda > 1$ et une suite $M_p (p \in N)$ tendant vers l'infini dans le réseau $\hat{K}$ telle que

$$\forall p \in N \quad |||M_p(P)^{-1}||| > \lambda^{\delta(M_p)}$$

Soit $\lambda' \in]1, \lambda[$. D'après la proposition 4, on définit une fonction $f \in \mathcal{A}(K)$ en posant

$$\begin{cases} \hat{f}(M_p) = \lambda'^{-\delta(M_p)} \cdot id_{H(M_p)} \\ \hat{f}(M) \ = 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite.} \end{cases}$$

L'unique solution $T \in \mathcal{B}(K)$ de l'équation $PT = f$ aurait alors pour coefficients de Fourier

$$\begin{cases} \hat{T}(M_p) = \lambda'^{-\delta(M_p)} \cdot M_p(P)^{-1} \\ \hat{T}(M) \ = 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite.} \end{cases}$$

Mais ceci implique

$$|||\hat{T}(M_p)||| = \lambda'^{-\delta(M_p)}\, |||M_p(P)^{-1}||| > \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^{\delta(M_p)}$$

ce qui contredit (8).

g) $\Rightarrow$ d) : Les coefficients de Fourier de la mesure de Dirac δ de K sont

$$\hat{\delta}(M) = id_{H(M)} \quad (M \in \hat{K}) .$$

Donc P a une solution élémentaire hyperfonction sur K, c'est-à-dire une solution de l'équation $PE = \delta$, si et seulement si la famille des

$$\hat{E}(M) = M(P)^{-1} \quad (M \in \hat{K})$$

est la transformée de Fourier d'une hyperfonction sur K, ce qu'exprime précisément la condition g), d'après la proposition 5.

d) $\Rightarrow$ b) par convolution à droite par la solution élémentaire.

b) $\Rightarrow$ a) trivialement.

d) $\Leftrightarrow$ e) : d) implique e) par convolution à droite par la solution élémentaire, et la réciproque est triviale.

e) $\Leftrightarrow$ f) : Il suffit de montrer que e) implique f). Mais on sait déjà que e) implique g) ; donc P, qui est surjectif dans $\mathcal{B}(K)$, est aussi injectif, puisque tous les M(P) sont inversibles. De plus son inverse, transporté par l'isomorphisme de la proposition 5, est la multiplication à gauche par la famille $(M(P)^{-1})$, et c'est un opérateur continu dans $\hat{\mathcal{B}}(K)$ d'après g).

b) $\Leftrightarrow$ c) par un raisonnement analogue au précédent.

c) $\Rightarrow$ h) : Si P est un isomorphisme de $\mathcal{A}(K)$, son transposé ${}^tP$ est un isomorphisme de $\mathcal{B}(K)$, donc satisfait à f), et par suite à toutes les autres conditions. ■

COROLLAIRE 7. – *Soit* $P \in D(K)$. *Si* $PC^\infty(K) = C^\infty(K)$, *alors* $P\mathcal{A}(K) = \mathcal{A}(K)$.

Preuve. – Visiblement (4) implique la condition g) du théorème 6. Le corollaire résulte donc de ce théorème et du théorème I de [1]. ■

4. Paramétrix, indice, hypoellipticité.

Une *paramétrix* de $P \in D(K)$ est une hyperfonction $E \in \mathcal{B}(K)$ telle que $PE - \delta \in \mathcal{A}(K)$. L'*indice* d'un endomorphisme est la codimension de son image diminuée de la dimension de son noyau : il n'est défini que si l'une des deux est finie. Enfin on dira que P *est globalement hypoelliptique analytique si*

$$\forall T \in \mathcal{B}(K) \quad PT \in \mathcal{A}(K) \Rightarrow T \in \mathcal{A}(K) .$$

THEOREME 8. – *Soient* K *et* P *comme dans le théorème 6. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) P *a une paramétrix sur* K

b) P *est d'indice fini dans* $\mathcal{B}(K)$

c) P *est d'indice zéro dans* $\mathcal{B}(K)$

d) P *est d'indice fini dans* $\mathcal{A}(K)$

e) P *est d'indice zéro dans* $\mathcal{A}(K)$

f) P *est globalement hypoelliptique analytique dans* K

g) *Il existe une partie finie* F *de* $\hat{K}$ *telle que les coefficients de Fourier* M(P) *de* P *soient inversibles pour tout* $M \in \hat{K} - F$, *et*

$$\forall \lambda > 1 \ \exists C > 0 \ \forall M \in \hat{K} - F \quad |||M(P)^{-1}||| \leqslant C\lambda^{\delta(M)}$$

h) *Mêmes propriétés pour le transposé* ${}^tP$ *de* P.

Preuve. – Si P vérifie g), en posant

$$\begin{cases} \hat{E}(M) = M(P)^{-1} & \text{pour} \quad M \in \hat{K} - F \\ \hat{E}(M) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on définit, d'après la proposition 5, une hyperfonction $E \in \mathcal{B}(K)$. De plus

$$\widehat{PE - \delta}(M) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad M \in \hat{K} - F \\ -id_{H(M)} & \text{sinon} \ , \end{cases}$$

donc $PE - \delta = - \sum_{M \in F} d(M) \, tr\, M(.)$ est analytique sur K, et c'est dire que E est une paramétrix de P.

D'autre part il est clair que le noyau de P, que ce soit dans $\mathcal{A}(K)$ ou dans $\mathcal{B}(K)$, est l'espace H des fonctions analytiques $f \in \mathcal{A}(K)$ dont tous les coefficients de Fourier $\hat{f}(M)$ sont nuls pour $M \in \hat{K} - F$, et telles que $M(P)\hat{f}(M) = 0$ pour $M \in F$. H est donc de dimension finie. Soit L(M), pour $M \in F$, un supplémentaire de l'image de la multiplication par M(P) dans l'espace des opérateurs continus de H(M), et $L = \bigoplus_{M \in F} L(M)$. Il est clair que L a même dimension que H, et que c'est un supplémentaire topologique de l'image de P dans $\mathcal{A}(K)$ comme dans $\mathcal{B}(K)$. Donc P est d'indice nul dans chacun de ces deux espaces.

Enfin si $PT \in \mathcal{A}(K)$, avec $T \in \mathcal{B}(K)$, on a par la proposition 4 :

$$\exists \rho < 1 \ , C > 0 \ \forall M \in \hat{K} \quad |||M(P)\hat{T}(M)||| < C\rho^{\delta(M)}$$

d'où en appliquant g) avec $1 < \lambda < \dfrac{1}{\rho}$:

$$\begin{aligned} |||\hat{T}(M)||| &\leqslant |||M(P)^{-1}||| \,.\, |||M(P)\hat{T}(M)||| \qquad \text{pour } M \in \hat{K} - F \\ &\leqslant C^{ste} (\lambda\rho)^{\delta(M)} \end{aligned}$$

ce qui montre que $T \in \mathcal{A}(K)$.

– Si $M(P)$ n'est pas inversible pour toute une suite infinie (M_p) $(p \in N)$ de $\hat{K}$, le noyau et le conoyau de P sont de dimension infinie, et il n'a pas d'indice.

De plus P n'est pas globalement hypoelliptique analytique, car son noyau contient des hyperfonctions non analytiques : il suffit de choisir une suite d'opérateurs A_p dans $H(M_p)$ tels que

$$M_p(P)\, A_p = 0 \quad \text{et} \quad |||\, A_p \,||| = 1 \ ,$$

pour que la famille

$$\begin{cases} \hat{T}(M_p) = A_p \\ \hat{T}(M) = 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite,} \end{cases}$$

vérifie (8) mais pas (7), autrement dit définisse une hyperfonction T non analytique sur K, telle que $PT = 0$.

Enfin si P avait une paramétrix $E \in \mathcal{B}(K)$, c'est-à-dire si $PE - \delta$ était analytique, la suite des nombres

$$|||\, M_p(P)\, \hat{E}(M_p) - id_{H(M_p)} \,|||$$

vérifierait (7), donc tendrait vers zéro, ce qui impliquerait que pour p assez grand $M_p(P)\, E(M_p)$ et donc $M_p(P)$ soient inversibles.

– Si $M(P)$ est inversible sauf sur une partie finie F de $\hat{K}$, mais g) est faux, il existe $\lambda > 1$ et une suite (M_p) $(p \in N)$, tendant vers l'infini dans $\hat{K} - F$, telle que

$$\forall p \in N \quad |||\, M_p(P)^{-1} \,||| > \lambda^{\delta(M_p)} \ .$$

Les formules

$$\begin{cases} \hat{T}(M_p) = \lambda_p\, M_p(P)^{-1} \quad \text{avec} \quad \lambda_p \,|||\, M_p(P)^{-1} \,||| = 1 \\ \hat{T}(M) \ = 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite,} \end{cases}$$

définissent une hyperfonction non analytique T sur K (propositions 4 et 5), et PT est analytique puisque

$$|||\, M(P)\, \hat{T}(M) \,||| = \begin{cases} \dfrac{1}{|||\, M_p(P)^{-1} \,|||} < \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^{\delta(M_p)} & \text{si } M = M_p \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc P n'est pas globalement hypoelliptique analytique.

Le noyau de P (dans $\mathcal{A}(K)$ ou $\mathcal{B}(K)$) est de dimension finie, mais son image est fermée et son conoyau est de dimension infinie : dans $\mathcal{A}(K)$ par exemple, un supplémentaire de l'image contient toutes les fonctions f telles que

$$\begin{cases} \hat{f}(M_p) = \lambda_p \, id_{H(M_p)} \\ \hat{f}(M) \ = 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite,} \end{cases}$$

avec $\lambda_1^{\delta(M_p)} < \lambda_p < \lambda_2^{\delta(M_p)}$ et $\frac{1}{\lambda} < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$.

Donc P est d'indice $+\infty$.

Enfin si P avait une paramétrix $E \in \mathcal{B}(K)$, on aurait

$$PE - \delta = f \in \mathcal{A}(K) \ ,$$

donc

$$\forall M \in \hat{K} \quad M(P)\,\hat{E}(M) = id_{H(M)} + \hat{f}(M)$$

d'où en particulier

$$\hat{E}(M_p) = M_p(P)^{-1} + M_p(P)^{-1}\,\hat{f}(M_p)) \ .$$

Comme $f \in \mathcal{A}(K)$, il existe $\rho < 1$ et $C > 0$ tels que

$$\forall M \in \hat{K} \quad |||\hat{f}(M)||| < C\rho^{\delta(M)}$$

d'où

$$\begin{aligned} |||\hat{E}(M_p)||| &\geqslant |||M_p(P)^{-1}||| - |||M_p(P)^{-1}|||\,.\,|||\hat{f}(M_p)||| \\ &> \lambda^{\delta(M_p)}(1 - C\rho^{\delta(M_p)}) \\ &> \frac{1}{2}\,\lambda^{\delta(M_p)} \quad \text{pour } p \text{ assez grand, ce qui contredit (8).} \end{aligned}$$

– On a donc montré l'équivalence des conditions a) à g) de l'énoncé. Comme les conditions b) et d) par exemple s'échangent par transposition, l'équivalence de h) s'en déduit. ∎

Remarque. – De même que le théorème 6 était l'analogue "analytique" du théorème "différentiable" I de [1], le théorème 8 est l'analogue du théorème II de [1], ce dernier ne traitait que l'hypoellipticité globale, mais on pourrait aisément en compléter l'énoncé : l'existence d'une paramétrix (distribution) ou d'indices finis dans $C^\infty(K)$ ou $\mathcal{D}'(K)$, ou d'indices nuls, est encore équivalente à l'hypoelliptïcité globale (différentiable).

5. Exemples.

A) L'opérateur Δ du § 1 dont les coefficients de Fourier nous ont fourni une mesure de croissance vérifie évidemment les conditions équivalentes du théorème 8. En particulier si K est semi-simple, $\Delta = \Gamma$ est l'opérateur de Casimir. Donc $\Gamma - \lambda$ vérifie toujours les conditions du théorème 8, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, et il vérifie celles du théorème 6 si et seulement si pour tout $M \in \hat{K}$, $M(\Gamma - \lambda) \neq 0$;

COROLLAIRE 9. – *L'opérateur de Casimir* Γ *d'un groupe compact semi-simple* K *a une paramétrix et est d'indice nul dans* $\mathcal{A}(K)$ *et* $\mathcal{B}(K)$.

L'opérateur $\Gamma - \lambda$ ($\lambda \in \mathbf{C}$) *est un isomorphisme de* $\mathcal{A}(K)$ *et de* $\mathcal{B}(K)$ *si et seulement s'il est injectif.*

B) Explicitons dans le cas du tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ les conditions g) des théorèmes 6 et 8. Dans les coordonnées canoniques $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, tout opérateur $P \in D(\mathbf{T}^n)$ est un polynôme à coefficients complexes

$$P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_n}\right) = P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Les représentations irréductibles de $\mathbf{T}^n$ sont ses caractères, et les conditions g) des théorèmes 6 et 8 s'écrivent :

Pour tout $\lambda > 1$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{Z}^n$ (ou pour tout $k \in \mathbf{Z}^n$ sauf un nombre fini)

$$\frac{1}{|P(2\pi k)|} \leqslant C\lambda^{|k|}.$$

– Si $n = 1$, la condition de croissance est triviale, et les conditions du théorème 8 sont toujours vraies, tandis que celles du théorème 6 le sont si et seulement si P est injectif.

– Si $n > 1$, la condition g) fait intervenir des propriétés arithmétiques des coefficients de P, plus faibles cependant que dans le cas différentiable : Pour le montrer, nous reprenons l'exemple de [1], p. 570 : sur le tore $\mathbf{T}^2$, on pose

$$P_1 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\alpha}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \pi, \text{ avec } \alpha \in \mathbf{R}, \text{ et } P_2 = P_1 - \pi .$$

Il est facile de vérifier à l'aide des théorèmes 6 et 8, en explicitant la condition g) dans ces deux cas particuliers, que :

– *si* α *est rationnel,* $\alpha = \dfrac{p}{q}$, p et q premiers entre eux, alors P_2 n'a jamais d'indice (fini ou non) ni de paramétrix, et P_1 non plus si q est pair ; mais si q est impair P_1 est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, C^∞ et $\mathcal{D}'$.

– *si* α *est irrationnel algébrique,* P_1 est un isomorphisme de C^∞, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, tandis que P_2 est d'indice nul dans chacun de ces espaces.

– *si* $\alpha = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2^j}}$, P_1 reste un isomorphisme et P_2 reste d'indice nul dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$; mais P_1 et P_2 sont d'indice infini dans C^∞ et $\mathcal{D}'$, et sans paramétrix distribution.

– *si* $\alpha = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2^{j^2}}}$, ou si $\alpha = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\varphi(j)}$ avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(j+1) = 2^{\varphi(j)}$, P_1 et P_2 n'ont d'indice fini ni de paramétrix dans aucun des espaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, C^∞, $\mathcal{D}'$.

DEUXIEME PARTIE

6. Groupes complexes réductifs.

Nous rappelons d'abord des résultats de [2], Ch. XVII, § 5.

Si G_0 est un groupe de Lie réel connexe, un *complexifié universel* G de G_0 est la donnée d'un groupe de Lie complexe connexe G et d'un morphisme $\gamma : G_0 \to G$ tels que tout morphisme de G_0 dans un groupe de Lie complexe H se factorise uniquement par γ en un morphisme de G dans H. G et γ sont évidemment uniques à isomorphisme près, et ils existent toujours.

On dit qu'un groupe de Lie complexe connexe G est *réductif* s'il admet une représentation fidèle de dimension finie et si toute représentation de G de dimension finie est semi-simple. On a alors le résultat suivant ([2], p. 205, 208) :

THEOREME. – *Soit* K *un groupe de Lie réel compact connexe, et* $\gamma : K \to G$ *un complexifié universel de* K. *Le morphisme* γ *est injectif,* $\gamma(K)$ *est un sous-groupe compact maximal de* G, *et l'algèbre de* $\gamma(K)$ *est une forme réelle de celle de* G. G *est un groupe complexe réductif.*

– *Réciproquement, soit* G *un groupe complexe réductif, et* K *un sous-groupe compact maximal de* G. G *est un complexifié universel de* K *pour l'injection naturelle.*

Soit donc G un groupe de Lie complexe réductif, et K un sous-groupe compact maximal. L'algèbre enveloppante (sur le corps des complexes) de G s'identifie à la complexifiée de celle de K : on identifie ainsi l'algèbre D(G) des opérateurs différentiels linéaires invariants à gauche sur G à l'algèbre D(K) des opérateurs différentiels linéaires à coefficients complexes invariants à gauche sur K $\left(\text{c'est localement la correspondance } \frac{\partial}{\partial z} \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Bien entendu le centre Z(G) de D(G) s'identifie ainsi au centre Z(K) de D(K).

Par la propriété universelle du complexifié G, toute représentation $M \in \hat{K}$ de K dans l'espace de Hilbert H(M) de dimension finie se prolonge de manière unique en une représentation encore notée M de G dans H(M).

Soit $K_0 = \mathbf{R}^s \times K'$ un revêtement universel de K (K' semi-simple), et soient $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ les algèbres de K_0, $\mathbf{R}^s$, K' ($\mathfrak{z}$ est le centre de $\mathfrak{k}$). Alors $\mathbf{C}^s \times G'$ est un revêtement universel de G, où G' est un complexifié universel de K'. De plus, avec des notations évidentes,

$$\widehat{K_0} \simeq \widehat{\mathbf{R}^s \times K'} \simeq \mathbf{R}^s \times \widehat{K'} ,$$

et $\hat{K}$ est une partie discrète de K_0. Toute représentation irréductible $M \in K$ s'écrit de manière unique $M = M_1 \otimes M_2$, où M_1 est un caractère de $\mathbf{R}^s$ et $M_2 \in \hat{K}'$ (cf. [5], p. 66).

Soit $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}'$, H (resp. H') le sous-groupe (réel) de G d'algèbre $i\mathfrak{z} \oplus i\mathfrak{h}'$ (resp. $i\mathfrak{h}'$), $t \in \mathbf{N}$ le rang de K'. H' est un groupe abélien isomorphe à $\mathbf{R}^t$, et $H \simeq \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^t$. On munit H d'une norme euclidienne $\| \ \|$. L'application $(k, h, k') \mapsto khk'$ de $K \times H \times K$ dans G est surjective, et on pose, pour $g \in G$:

$$\|g\| = \inf_{\substack{g = khk' \\ (k, k' \in K,\, h \in H)}} \|h\|$$

Notons que $\|k\| = 0$ pour tout $k \in K$.

LEMME 10. – $\exists\, a > 0$, $C > 0$, $\forall M \in \hat{K}$, $\forall g \in G$

$$|||M(g)||| \leqslant C\, e^{a \|g\|\, \delta(M)} .$$

Preuve. – Avec les notations ci-dessus, on a

$$\delta(M)^2 = M_2(\Gamma) + M_1 \Big(- \sum_{j=1}^{s} X_j^2\Big)$$

et, si $g \in G$ se relève en $g_0 = (z, g') \in \mathbf{C}^s \times G'$,

$$|||M(g)||| = |||M(g_0)||| = |||M_1(z)|||\,.\,|||M_2(g')||| .$$

Il suffit donc de démontrer l'inégalité du lemme dans le cas où $K = K'$ est semi-simple, et dans le cas où $K_0 = \mathbf{R}^s$, en remplaçant $\delta(M)$ par

$$\left[\mathrm{M}_1\left(-\sum_{j=1}^{s} \mathrm{X}_j^2\right)\right]^{1/2} .$$

Dans le second cas, l'inégalité cherchée est bien connue : les caractères de $\mathbf{R}^s$ sont les exponentielles. Dans le premier cas, l'application $(k, h', k') \mapsto kh'k'$ de $\mathrm{K}' \times \mathrm{H}' \times \mathrm{K}'$ dans G' est surjective, et si $g' = kh'k'$, on a

$$|||\mathrm{M}_2(g')||| = |||\mathrm{M}_2(k)||| \,.\, |||\mathrm{M}_2(h')||| \,.\, |||\mathrm{M}_2(k')||| \leqslant d(\mathrm{M}_2)^2\, |||\mathrm{M}_2(h')|||.$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité voulue pour g' dans H'. Elle est alors immédiate puisque $\mathrm{M}_2(h')$ peut s'écrire comme une matrice diagonale dont les coefficients sont les exponentielles des poids de M_2, et que $\delta(\mathrm{M})^2$ est un polynôme de degré 2 en le plus haut poids. ∎

7. Séries de Laurent des fonctions holomorphes.

On note $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur G. Soit V un voisinage ouvert de K dans G. Si $f \in \mathcal{O}(\mathrm{V})$, la restriction de f à K est analytique (réelle), et possède donc des coefficients de Fourier $\hat{f}(\mathrm{M})$ $(\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}})$ donnés par la formule (1).

DEFINITION. – *On appelle série de Laurent de* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{V})$ *la série*

$$\sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}}} d(\mathrm{M})\; tr[\hat{f}(\mathrm{M})\,\mathrm{M}(g)] \quad (g \in \mathrm{G}) .$$

PROPOSITION 11. – *Il existe un voisinage* V′ *de* K *contenu dans* V *dans lequel la série de Laurent de* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{V})$ *converge vers* f *uniformément.*

Preuve. – Puisque $f|_{\mathrm{K}} \in \mathfrak{A}(\mathrm{K})$, on a par la proposition 4

$$\exists \rho < 1,\ \mathrm{C} > 0,\ \forall \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}} \quad |||\hat{f}(\mathrm{M})||| < \mathrm{C}\rho^{\delta(\mathrm{M})} .$$

Soit $\rho' \in]\rho, 1[$, et posons

$$\mathrm{V}' = \left\{ g \in \mathrm{G} \mid e^{a\|g\|} < \frac{\rho'}{\rho} \right\} \cap \mathrm{V}$$

avec la constante a du lemme 10. On déduit de ce lemme, pour $g \in V'$:

$$|d(M)\, tr[\hat{f}(M)\, M(g)]| \leqslant d(M)^2 \, |||\hat{f}(M)||| \, . \, |||M(g)||| \leqslant$$
$$\leqslant C^{ste}(1 + \delta(M)^{2b})^2 \, . \, \rho'^{\delta(M)} \quad ,$$

ce qui montre que la série de Laurent de f converge normalement dans V', donc vers une fonction holomorphe $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(V')$. Comme f et $\widetilde{f}$ coïncident sur K d'après (3), elles coïncident dans V'. ∎

En particulier toute fonction $f \in \mathcal{O}(G)$ possède une série de Laurent $\sum\limits_{M \in \hat{K}} d(M)\, tr[\hat{f}(M)\, M(.)]$ qui converge vers f au moins dans un voisinage de K. Nous allons voir que la convergence a lieu dans tout G, uniformément sur tout compact.

Proposition 12. – *Une fonction $f \in \mathcal{A}(K)$ est la restriction d'une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe dans* G *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists C > 0, \ \forall M \in \hat{K} \quad |||\hat{f}(M)||| < C\epsilon^{\delta(M)} \, . \tag{9}$$

La série de Laurent $\sum\limits_{M \in \hat{K}} d(M)\, tr[\hat{f}(M)\, M(g)]$ *converge alors vers* $\widetilde{f}(g)$ *normalement sur tout compact de* G.

Preuve. – Les ensembles $K_u = \{g \in G \mid e^{a\|g\|} \leqslant u\}$ pour $u > 0$, forment une famille exhaustive de compacts de G. Si $f \in \mathcal{A}(K)$ vérifie (9), pour $\epsilon = \dfrac{1}{2u}$ on a, pour $g \in K_u$

$$|d(M)\, tr[\hat{f}(M)\, M(g)]| \leqslant d(M)^2 \, |||\hat{f}(M)||| \, . \, |||M(g)||| \leqslant$$
$$\leqslant C^{ste}(1 + \delta(M)^{2b})^2 \, . \, 2^{-\delta(M)}$$

par le lemme 10, et la série de Laurent de f converge absolument uniformément sur K_u vers une fonction holomorphe dans $\mathring{K}_u$ qui coïncide avec f sur K d'après (3).

Réciproquement, si $f \in \mathcal{O}(G)$, il faut montrer que ses coefficients de Laurent satisfont à (9). Mais dans ce cas toute translatée $\tau_g f$ de f est encore dans $\mathcal{O}(G)$, donc dans $\mathcal{A}(K)$, et par suite

$$\forall g \in G \ \ \exists \rho < 1, \ C > 0 \ \ \forall M \in \hat{K} \quad |||\hat{f}(M)\, M(g)||| < C\rho^{\delta(M)} \, . \tag{10}$$

Reprenant les notations du § 6, M est une représentation de $\mathbf{C}^s \times G'$, donc de la forme $M = M_1 \otimes M_2$, dans $H(M) = H(M_2)$; M_1 est un caractère de $\mathbf{C}^s$ appartenant à un réseau discret, et M_2 est une représentation irréductible du groupe compact semi-simple K'. Donc il existe $\hat{R} \in \mathbf{Z}^s$ tel que, pour $g = (z , g') \in \mathbf{C}^s \times G'$

$$M(g) = e^{iRz} M_2(g') .$$

Si M_2 est la représentation de K' de plus haut poids $\lambda = (\lambda_1 , \ldots , \lambda_t) \in \mathbf{N}^t$ (voir l'exposé 17 de [4]) dans la base canonique, on a

$$d = d(M) = d(M_2) \leqslant C \prod_{j=1,\ldots,t} \lambda_j \leqslant C\,|\lambda|^t$$

et, pour $g_1 = (z , h') \in H$, $M(g_1)$ est dans une base convenable la matrice

$$M(g_1) = \begin{pmatrix} e^{Rz+\lambda(h')} & & (0) \\ & e^{Rz+\mu(h')} & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix}$$

où $\lambda , \mu , \ldots$ sont les poids de M_2 avec multiplicités.

Posons $\hat{f}(M) = (f_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ et $M(k) = (m_{ij}(k))_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ dans cette base, et pour $k \in K$. De (10) et de la compacité de K, on déduit l'existence de $\rho < 1$ et $C > 0$ tels que, pour tout $M \in \hat{K}$ et tout $k \in K$

$$|||\hat{f}(M)\, M(k)\, M(g_1)||| < C\rho^{\delta(M)} ,$$

cela signifie en effet (voir le début de la remarque 13 ci-dessous) que toutes les translatées $\tau_{g_1} \tau_k f$ sont holomorphes dans un même voisinage de K, pour un certain g_1 et tout $k \in K$. Soit encore :

$$|||\hat{f}(M)\, M(k)\, M(g_1)|||^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \left| \sum_{q=1}^{d} f_{iq}\, m_{qj}(k) \right|^2 e^{2Rz+2\mu_j(h')} <$$

$$< C^2 \rho^{2\delta(M)} ,$$

où l'on a noté μ_j le j-ème poids de M_2. En particulier

$$\sum_{i=1}^{d} \left| \sum_{q=1}^{d} f_{iq}\, m_{q1}(k) \right|^2 < C^2 \rho^{2\delta(M)} e^{-2Rz-2\lambda(h')} .$$

Posons $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{2\rho}$. On peut toujours trouver $(z\,,\,h') \in \mathrm{H}$ tel que

$$e^{-2\mathrm{R}z - 2\lambda(h')} = \epsilon'^{\,|\mathrm{R}|+|\lambda|}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{d} \left| \sum_{q=1}^{d} f_{iq}\, m_{q1}(k) \right|^2 < \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\delta(\mathrm{M})} \tag{11}$$

puisque $\delta(\mathrm{M})$ est équivalent à $|\mathrm{R}| + |\lambda|$.

Supposons (9) faux : il existe $\epsilon_0 > 0$ et une suite M_p tendant vers l'infini dans $\hat{\mathrm{K}}$ telle que, pour tout $p \in \mathrm{N}$

$$|||\hat{f}(\mathrm{M}_p)||| > p\, \epsilon_0^{\delta(\mathrm{M}_p)}\ .$$

En particulier, pour tout entier p, il existe des entiers i_p et j_p de l'ensemble $1\,,\,\ldots\,,d$ tels que

$$|f_{i_p, j_p}(\mathrm{M}_p)| > p\, \frac{\epsilon_0^{\delta(\mathrm{M}_p)}}{d(\mathrm{M}_p)}\,. \tag{12}$$

Posons

$$\begin{cases} \mathrm{F}_{i_p, j_p}(\mathrm{M}_p) = f_{i_p, j_p}(\mathrm{M}_p) \\ \mathrm{F}_{ij}(\mathrm{M}_p) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq i_p \quad \text{ou} \quad j \neq j_p \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{F}}(\mathrm{M}_p) = (\mathrm{F}_{ij}(\mathrm{M}_p)) \\ \hat{\mathrm{F}}(\mathrm{M}) = 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite.} \end{cases}$$

Les $\hat{\mathrm{F}}(\mathrm{M})$ ainsi définis sont évidemment les coefficients de Fourier de la fonction analytique sur K

$$\mathrm{F} = \mathrm{T}_1 * f|_{\mathrm{K}} * \mathrm{T}_2$$

où $*$ est le produit de convolution de $\mathcal{B}(\mathrm{K})$, et où T_1 et T_2 sont les hyperfonctions

$$\mathrm{T}_1 = \sum_{p \in \mathrm{N}} d(\mathrm{M}_p)\, m_{i_p, i_p}(.) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_2 = \sum_{p \in \mathrm{N}} d(\mathrm{M}_p)\, m_{j_p, j_p}(.)\ .$$

Mais F est la restriction à K d'une fonction holomorphe dans G, donnée par la formule

$$F(g) = \iint_{K\times K} T_1(k_1)\, f(k_1^{-1} g k_2^{-1})\, T_2(k_2)\, dk_1\, dk_2 \qquad (g \in G) .$$

On peut donc appliquer à F le raisonnement qui a abouti à (11), et il vient, compte tenu de (12)

$$| f_{i_p, j_p}(M_p)\, m_{j_p,1}(k) |^2 < C^{\text{ste}} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2\delta(M_p)}$$

d'où

$$| m_{j_p,1}(k) | < C^{\text{ste}} \frac{d(M_p)}{p} \left(\frac{\epsilon}{2\epsilon_0}\right)^{\delta(M_p)} ,$$

où ϵ est arbitraire, et la constante ne dépend pas de k. Soit :

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists C > 0 \;\; \forall M \in \hat{K}$$

$$\sup_{k\in K} | m_{j_p,1}(k) | < C\, d(M_p)\, \epsilon^{\delta(M_p)} .$$

Mais la fonction $m_{j_p,1}(k)$ est un coefficient d'une représentation irréductible M_p du groupe compact K, et sa norme dans $L^2(K)$ est $(d(M_p))^{-1/2}$ (cf. [5], p. 74). Il vient donc

$$(d(M_p))^{-1/2} = \| m_{j_p,1} \|_{L^2(K)} \leqslant \| m_{j_p,1} \|_{L^\infty(K)} < C\, d(M_p)\, \epsilon^{\delta(M_p)}$$

pour tout $p \in \mathbf{N}$, ce qui est absurde dès que $\epsilon < 1$ puisque $1 \leqslant d(M_p) \leqslant C(1 + \delta(M_p)^{2b})$ pour un certain entier b, et que $\delta(M_p)$ tend vers l'infini avec p. ■

Remarque 13. – Notons $\hat{\mathcal{O}}_\epsilon(G)$ l'espace des familles $(a(M))$ $(M \in \hat{K})$ d'opérateurs continus dans H(M) telles que

$$\sup_{M\in\hat{K}} |||a(M)\, \epsilon^{-\delta(M)}||| < +\infty$$

muni de la norme écrite, et $\hat{\mathcal{O}}(G) = \varprojlim_{\epsilon > 0} \hat{\mathcal{O}}_\epsilon(G)$. Si $(a(M)) \in \hat{\mathcal{O}}_\epsilon(G)$, la série de Laurent

$$\sum_{M\in\hat{K}} d(M)\; tr[a(M)\, M(g)]$$

converge normalement dans K_u dès que $u < \dfrac{1}{\epsilon}$, vers une fonction holomorphe dans $\mathring{K}_u$. Comme les compacts K_u forment une famille exhaustive de G, $\mathcal{O}(G)$ est la limite projective des espaces $\mathcal{O}(\mathring{K}_u)$. On en déduit aisément que *l'application qui à une fonction f holomorphe sur* G *associe la famille de ses coefficients de Laurent* $(\hat{f}(M))$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{O}(G)$ *sur* $\hat{\mathcal{O}}(G)$.

8. Solutions holomorphes.

Soit $P \in D(G)$ un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur le groupe G complexe connexe réductif. Sa restriction à un sous-groupe compact maximal K de G est un opérateur de D(K), qui a donc des coefficients de Fourier M(P) $(M \in \hat{K})$.

THEOREME 14. — P *est surjectif dans* $\mathcal{O}(G)$ *si et seulement si, pour tout* $M \in \hat{K}$, M(P) *est inversible, et*

$$\exists A > 0 \quad \forall M \in \hat{K} \qquad |||M(P)^{-1}||| < A^{1+\delta(M)} . \tag{13}$$

P *est alors un isomorphisme de* $\mathcal{O}(G)$.

— P *est d'indice fini dans* $\mathcal{O}(G)$ *si et seulement si, pour tout* $M \in \hat{K}$ *sauf un ensemble fini* F, *les* M(P) *sont inversibles et vérifient* (13) (*pour* $M \in \hat{K} - F$). P *est alors d'indice nul dans* $\mathcal{O}(G)$.

Preuve. — Elle est analogue à celle des théorèmes 6 et 8. D'après la proposition 12 et l'inversion de Fourier sur K, résoudre l'équation $Pf = g$ dans $\mathcal{O}(G)$ revient à résoudre le système

$$M(P)\,\hat{f}(M) = \hat{g}(M) \qquad (M \in \hat{K})$$

dans l'espace des familles vérifiant (9).

Le second membre est l'identité si l'on choisit $g = d(M)\ tr\ M(.)$, et la surjectivité implique donc l'inversibilité de tous les M(P), pour $M \in \hat{K}$.

D'autre part si M(P) n'est pas inversible pour une infinité de représentations $M \in \hat{K}$, le noyau de P est de dimension infinie. Donc dès que P est d'indice fini dans $\mathcal{O}(G)$, il existe une partie finie F de $\hat{K}$ telle que M(P) soit inversible pour tout $M \in \hat{K} - F$, et ${}^tP$ possède alors la même propriété. P est alors d'image fermée dans $\mathcal{O}(G)$.

– Si (13) est faux, il existe une suite $M_p (p \in \mathrm{N})$ tendant vers l'infini dans $\hat{\mathrm{K}}$ telle que

$$|||\, M_p(\mathrm{P})^{-1} \,||| > p^{\delta(M_p)} .$$

Pour tout $p \in \mathrm{N}$, on choisit un nombre $\lambda_p \in [1 , \sqrt{p}]$ et on pose

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{g}(M_p) = \left(\dfrac{\lambda_p}{p}\right)^{\delta(M_p)} \cdot id_{\mathrm{H}(M_p)} & \\ \hat{g}(M) \;= 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite.} & \end{array} \right. \tag{14}$$

En particulier

$$|||\, \hat{g}(M_p) \,||| \leqslant d(M_p)^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{\delta(M_p)} \leqslant \mathrm{C}(1 + \delta(M_p)^b) \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{\delta(M_p)}$$

et les $\hat{g}(\mathrm{M})$ sont bien les coefficients de Laurent d'une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathrm{G})$, d'après la proposition 12. Si $f \in \mathcal{O}(\mathrm{G})$ était solution de $\mathrm{P}f = g$, on aurait nécessairement, pour $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}} - \mathrm{F}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(M_p) = \left(\dfrac{\lambda_p}{p}\right)^{\delta(M_p)} \cdot M_p(\mathrm{P})^{-1} \\ \hat{f}(M) \;= 0 \quad \text{si M n'est pas dans la suite.} \end{array} \right.$$

En particulier $|||\, \hat{f}(M_p) \,||| > (\lambda_p)^{\delta(M_p)} \geqslant 1$, ce qui contredit (9).

Donc un supplémentaire de l'image de P contient l'espace de toutes les fonctions $g \in \mathcal{O}(\mathrm{G})$ vérifiant (14), qui est de dimension infinie, et l'indice de P est donc $+ \infty$.

– Si par contre P vérifie (13) pour $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}} - \mathrm{F}$, et si $g \in \mathcal{O}(\mathrm{G})$, on définit une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathrm{G})$ en posant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{f}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}(\mathrm{P})^{-1}\, \hat{g}(\mathrm{M}) & \text{pour } \mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}} - \mathrm{F} \\ \hat{f}(\mathrm{M}) = 0 & \text{pour } \mathrm{M} \in \mathrm{F} \end{array} \right.$$

puisqu'alors

$$|||\, \hat{f}(\mathrm{M}) \,||| \leqslant |||\, \mathrm{M}(\mathrm{P})^{-1} \,||| \,.\, |||\, \hat{g}(\mathrm{M}) \,||| < \mathrm{CA}(\mathrm{A}\epsilon)^{\delta(\mathrm{M})}$$

pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}} - \mathrm{F}$.

Par l'inversion de Fourier sur K, et le principe du prolongement analytique, on a alors :

$$\mathrm{P}f = g - \sum_{\mathrm{M} \in \mathrm{F}} d(\mathrm{M})\, tr[g(\mathrm{M})\, \mathrm{M}(.)]$$

ce qui montre que l'image de P est de codimension finie (zéro si F est vide), donc que P est d'indice fini, et surjectif si F est vide. Comme l'indice de M(P) dans H(M) est nul pour tout M, il s'ensuit que l'indice de P dans $\mathcal{O}(\mathrm{G})$, qui est la somme des indices des M(P) pour M dans F, l'est aussi. Enfin si F est vide, P est bijectif dans $\mathcal{O}(\mathrm{G})$. Le transporté de son inverse par l'isomorphisme de $\mathcal{O}(\mathrm{G})$ sur $\hat{\mathcal{O}}(\mathrm{G})$ (remarque 13) est la multiplication à gauche par $(\mathrm{M(P)}^{-1})$, évidemment continue dans $\hat{\mathcal{O}}(\mathrm{G})$ grâce à (13). ■

COROLLAIRE 15. – *Soit* G *un groupe complexe réductif connexe,* K *un sous-groupe compact maximal, et* $\mathrm{P} \in \mathrm{D(G)} \simeq \mathrm{D(K)}$.

Si $\mathrm{P}\mathcal{A}(\mathrm{K}) = \mathcal{A}(\mathrm{K})$, *alors* $\mathrm{P}\mathcal{O}(\mathrm{G}) = \mathcal{O}(\mathrm{G})$.

Preuve. – C'est évident, en comparant les théorèmes 6 et 14.

COROLLAIRE 16. – *L'opérateur de Casimir* Γ *d'un groupe complexe semi-simple* G *est d'indice nul dans* $\mathcal{O}(\mathrm{G})$. *Si* Π *est un polynôme d'une indéterminée à coefficients complexes, l'opérateur* $\Pi(\Gamma)$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{O}(\mathrm{G})$ *si et seulement s'il est injectif.*

Preuve. – Tout groupe complexe semi-simple G admet une représentation fidèle de dimension finie ([2], Ch. XVII, Th. 3.2), et est donc un complexifié universel d'un de ses sous-groupes compacts maximaux, soit K. L'opérateur Δ du § 1 s'identifie dans ce cas à l'opérateur de Casimir Γ, et les coefficients de Fourier de $\Pi(\Gamma)$ sont les opérateurs scalaires $\Pi(\delta(\mathrm{M})^2)\,.\,id_{\mathrm{H(M)}}$, pour lesquels la condition de croissance (13) est triviale. Donc $\Pi(\Gamma)$ est d'indice nul dans $\mathcal{O}(\mathrm{G})$, et c'est un isomorphisme si et seulement si $\Pi(\delta(\mathrm{M})^2)$ ne s'annule pas. ■

Nous terminons ce paragraphe en complétant l'exemple du § 5.B. Le complexifié de l'opérateur

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \frac{\alpha}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_2} + \pi \quad \text{sur le tore } \mathbf{T}^2$$

est l'opérateur

$$P_1 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - \alpha z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \pi \quad \text{sur } (\mathbf{C}^*)^2 .$$

– Si $\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{\varphi(j)}$, avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(j+1) = 2^{\varphi(j)}$, P_1 n'est pas surjectif (il est même d'indice $+\infty$), bien qu'injectif, dans $\mathcal{O}(\mathbf{C}^{*2})$.

– Si $\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2^{j^2}}}$, P_1 est un isomorphisme de $\mathcal{O}(\mathbf{C}^{*2})$, mais il reste d'indice infini dans $\mathcal{A}(\mathrm{T}^2)$. On le vérifie en remarquant que la condition (13) s'écrit ici :

$$\exists A > 0 \ \ \forall (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$$

$$\frac{1}{|2\pi k_1 - 2\alpha\pi k_2 + \pi|} < A^{1+|k_1|+|k_2|} .$$

9. Fonctions et opérateurs du centre.

Si G est un groupe de Lie complexe réductif connexe et K un sous-groupe compact maximal, on note $\mathcal{O}^\natural(G)$ l'espace des fonctions holomorphes sur G qui sont invariantes par les automorphismes intérieurs de G.

LEMME 17. – *Pour* $f \in \mathcal{O}(G)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $f \in \mathcal{O}^\natural(G)$.

b) *f est invariante par les automorphismes intérieurs de* K.

c) *Les coefficients de Laurent de f sont scalaires.*

Preuve. – a) ⇒ b) trivialement.

b) ⇒ c) : Si f est invariante par les automorphismes intérieurs de K, sa restriction à K est une fonction centrale sur K, et il est connu que ses coefficients de Fourier $f(M)$ sont scalaires ([5], p. 85).

c) ⇒ a) : Cela résulte de la proposition 12, puisque chaque terme du développement de Laurent de f est alors invariant par automorphisme intérieur. ■

On note $\chi_M(g) = tr\, M(g)$ le caractère de la représentation $M \in \hat{K}$, et $\hat{\mathcal{O}}^{\natural}(G)$ l'espace des suites de nombres complexes (a_M) indiciées par $M \in \hat{K}$ telles que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \sup_{M \in \hat{K}} |a_M| \, \epsilon^{-\delta(M)} < \infty \,,$$

muni des semi-normes écrites.

Proposition 18. – *L'application de* $\hat{\mathcal{O}}^{\natural}(G)$ *dans* $\mathcal{O}^{\natural}(G)$ *définie par*

$$(a_M) \mapsto \sum_{M \in \hat{K}} d(M)\, a_M \chi_M$$

est un isomorphisme de $\hat{\mathcal{O}}^{\natural}(G)$ *sur* $\mathcal{O}^{\natural}(G)$.

Preuve. – Comme $|||a_M \,.\, id_{H(M)}||| = |a_M|\,(d(M))^{1/2}$, $\hat{\mathcal{O}}^{\natural}(G)$ est tout aussi bien l'espace des suites (a_M) telles que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \sup_{M \in \hat{K}} |||a_M \,.\, id_{H(M)}||| \,.\, \epsilon^{-\delta(M)} < \infty$$

muni de ces nouvelles semi-normes, puisque $1 \leqslant d(M) \leqslant C(1 + \delta(M)^{2b})$. La proposition se déduit donc immédiatement de la remarque 13 et du lemme 17. ∎

Soit maintenant $P \in Z(G)$ un opérateur du centre de l'algèbre enveloppante : il est invariant par les translations à droite et à gauche, et conserve donc $\mathcal{O}^{\natural}(G)$. Ses coefficients de Fourier $M(P)$, qui commutent à tous les $M(g)$, sont scalaires, soit :

$$M(P) = p(M)\, id_{H(M)} \,.$$

Proposition 19. – *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $P\, \mathcal{O}^{\natural}(G) = \mathcal{O}^{\natural}(G)$

b) $P\, \mathcal{O}(G) = \mathcal{O}(G)$

c) $\exists A > 0 \;\; \forall M \in \hat{K} \quad |p(M)| > A^{-1-\delta(M)}$.

Preuve. – c) ⇒ b) par le théorème 14, puisque

$$|||\,\mathrm{M(P)}^{-1}\,||| = \frac{1}{|p(\mathrm{M})|}\,(d(\mathrm{M}))^{1/2} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant d(\mathrm{M}) \leqslant \mathrm{C}(1 + \delta(\mathrm{M})^{2b}).$$

b) $\Rightarrow$ a) : Soit $f \in \mathcal{O}^{\natural}(\mathrm{G})$, et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{G})$ telle que $\mathrm{P}u = f$. Posant

$$u^{\natural}(g) = \int_{\mathrm{K}} u(kgk^{-1})\,dk\ ,$$

$u^{\natural}$ est dans $\mathcal{O}^{\natural}(\mathrm{G})$ par le lemme 7, et il vient :

$$\mathrm{P}u^{\natural}(g) = \mathrm{P}_g \int_{\mathrm{K}} u(kgk^{-1})\,dk = \int_{\mathrm{K}} (\mathrm{P}u)\,(kgk^{-1})\,dk$$
$$= \int_{\mathrm{K}} f(kgk^{-1})\,dk = f(g)\ .$$

non c) $\Rightarrow$ non a) : Si c) est faux, il existe une suite (M_q) de représentations tendant vers l'infini dans $\hat{\mathrm{K}}$ avec $q \in \mathbf{N}$ telle que

$$\forall\, q \in \mathbf{N} \quad |p(\mathrm{M}_q)| < q^{-1-\delta(\mathrm{M}_q)}\ .$$

La série

$$\sum_{q \in \mathbf{N}} d(\mathrm{M}_q)\,.\,q^{-1-\delta(\mathrm{M}_q)}\,.\,\chi_{\mathrm{M}_q}(g)$$

converge sur tout compact vers une fonction f de $\mathcal{O}^{\natural}(\mathrm{G})$ d'après la proposition 18. Si

$$u(g) = \sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}}} d(\mathrm{M})\,a_{\mathrm{M}}\,\chi_{\mathrm{M}}(g)$$

est une fonction de $\mathcal{O}^{\natural}(\mathrm{G})$ solution de $\mathrm{P}u = f$, on a

$$f(g) = \mathrm{P}u(g) = \sum_{\mathrm{M} \in \hat{\mathrm{K}}} d(\mathrm{M})\,p(\mathrm{M})\,a_{\mathrm{M}}\,\chi_{\mathrm{M}}(g)$$

d'où nécessairement

$$p(\mathrm{M}_q)\,a_{\mathrm{M}_q} = q^{-1-\delta(\mathrm{M}_q)}$$

et donc $|a_{\mathrm{M}_q}| > 1$, ce qui contredit la proposition 18. ∎

Remarque 20. – Il est clair que sous les hypothèses de la proposition 19, P *est un isomorphisme de* $\mathcal{O}^{\natural}(\mathrm{G})$ *et de* $\mathcal{O}(\mathrm{G})$: la démonstration est analogue à celle donnée au théorème 14.

De plus, on peut encore ici énoncer le même complément qu'au théorème 14 (et la démonstration est encore tout-à-fait analogue) :

La condition c) de la proposition 19, si l'on oublie un nombre fini d'éléments de $\hat{K}$, *est équivalente au fait que* P *est d'indice fini dans* $\mathcal{O}$(G), *ou encore dans* $\mathcal{O}^{d}$(G), *et alors* P *y est d'indice nul.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CEREZO, et F. ROUVIERE, Solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie réel compact et sur un espace homogène réductif compact, *Ann. Sci. E.N.S.*, 4 (1969), 561-581.

[2] G. HOCHSCHILD, The Structure of Lie Groups, Holden-Day (1965).

[3] P. SCHAPIRA, Théorie des Hyperfonctions, *Lecture Notes*, 126 (1970).

[4] Séminaire Sophus Lie (1954/1955).

[5] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris (1951).

Manuscrit reçu le 17 mai 1974
accepté par B. Malgrange.

André CEREZO,
I.M.S.P.
Université de Nice
Parc Valrose
06 – Nice.