

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-CLAUDE TOUGERON

**Racines p -ième de fonctions différentiables
: passage du local au global**

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 2 (1975), p. 185-192

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_185_0

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RACINES P^{èmes} DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES : PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL

par Jean-Claude TOUGERON

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction complexe C^∞ sur une variété X , qui admet localement une racine $p^{\text{ème}}$ C^∞ , soit globalement puissance $p^{\text{ème}}$ de fonction C^∞ .

Soit X une variété différentiable paracompacte de classe C^∞ . On désigne par \mathcal{G} le faisceau sur X des germes de fonctions C^∞ à valeurs dans \mathbb{C} ; par \mathcal{G}^* le sous-faisceau de \mathcal{G} formé par les germes inversibles, i.e. $\forall x \in X, \mathcal{G}^*(x) = \{\varphi \in \mathcal{G}(x) ; \varphi(x) \neq 0\}$; par $\underline{\mathcal{G}}^\#$ le préfaisceau sur X des fractions différentiables défini comme suit : si U est un ouvert de X ,

$$\underline{\mathcal{G}}^\#(U) = \{\varphi/\psi ; \varphi, \psi \in \mathcal{G}(U) \text{ et } \forall x \in U, T_x \varphi \neq 0, T_x \psi \neq 0\} ;$$

par $\mathcal{G}^\#$ le faisceau associé à $\underline{\mathcal{G}}^\#$. Les faisceaux \mathcal{G}^* et $\mathcal{G}^\#$ sont des faisceaux de groupes abéliens multiplicatifs. Enfin, on note $\mathcal{G}^{[p]}$ la puissance $p^{\text{ème}}$ de $\mathcal{G}^\#$ ($\forall x \in X, \mathcal{G}^{[p]}(x)$ est le sous-groupe de $\mathcal{G}^\#(x)$ formé par les φ^p où $\varphi \in \mathcal{G}^\#(x)$) ; on pose :

$$G_p(X) = \text{coker} (H^0(X, \mathcal{G}^\#) \xrightarrow{p} H^0(X, \mathcal{G}^{[p]})) ;$$

$$G_p^*(X) = \text{coker} (H^0(X, \mathcal{G}^*) \xrightarrow{p} H^0(X, \mathcal{G}^*)),$$

où dans les deux cas, p désigne l'application qui, à tout élément, associe sa puissance $p^{\text{ème}}$.

LEMME 1. — *Soit Y un fermé de X et soit $\varphi \in \mathcal{G}(Y)$ telle que $\forall y \in Y, T_y \varphi \neq 0$. Alors, il existe $\bar{\varphi} \in \mathcal{G}(X)$ telle que*

$$\forall x \in X, T_x \bar{\varphi} \neq 0,$$

et telle que $\bar{\varphi}$ induise le germe φ .

Preuve. — Soit $\varphi' \in \mathcal{G}(X)$ telle que φ' induise le germe φ . Il existe un voisinage ouvert U de Y , tel que, $\forall x \in \bar{U}$, on ait $T_x \varphi' \neq 0$. Soit ϵ une fonction C^∞ sur X à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\epsilon = 0$ au voisinage de Y et $\epsilon = 1$ sur $X - U$.

D'après le théorème de transversalité, l'ensemble des applications $\varphi'' \in \mathcal{G}(X)$ telles que φ'' soit transverse sur $\{0\}$ est dense dans $\mathcal{G}(X)$ pour la topologie fine [1]. Choisissons φ'' suffisamment voisin de φ' pour que, $\forall x \in \bar{U}$, on ait : $T_x(\varphi' + \epsilon(\varphi'' - \varphi')) \neq 0$.

Posons $\bar{\varphi} = \varphi' + \epsilon(\varphi'' - \varphi')$; on a $\bar{\varphi} = \varphi'$ au voisinage de Y , donc $\bar{\varphi}$ induit le germe φ . En outre, $\bar{\varphi} = \varphi''$ sur $X - \bar{U}$ et donc, $\forall x \in X$, on a $T_x \bar{\varphi} \neq 0$.

LEMME 2. — Avec les notations précédentes :

- 1) $\underline{\mathcal{G}}^\#$ est un faisceau, i.e. $\underline{\mathcal{G}}^\# = \mathcal{G}^\#$.
- 2) Le faisceau $\mathcal{G}^\#$ est mou.
- 3) Tout élément de $\mathcal{G}^{[p]}(X)$ est de la forme f/g^p , où

$$f, g \in \mathcal{G}(X) ; \forall x \in X, T_x f \neq 0, T_x g \neq 0,$$

et f est localement la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞ .

Preuve. —

1) Soit U un ouvert de X ; soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de U et pour chaque $i \in I$, soit $\varphi_i/\psi_i \in \underline{\mathcal{G}}^\#(U_i)$, tels que $\varphi_i/\psi_i = \varphi_{i'}/\psi_{i'}$ sur $U_i \cap U_{i'}$. Il existe un recouvrement ouvert localement fini $(V_j)_{j \in J}$ plus fin que le recouvrement précédent et une partition C^∞ de l'unité $(\epsilon_j)_{j \in J}$ subordonnée à ce recouvrement. Pour chaque indice $j \in J$, choisissons un indice $i(j) \in I$ tel que $V_j \subset U_{i(j)}$. D'après le lemme 1, il existe $f_j/g_j \in \underline{\mathcal{G}}^\#(U)$ tel que $f_j/g_j = \varphi_{i(j)}/\psi_{i(j)}$ au voisinage de $\text{supp } \epsilon_j$ et $g_j = 1$ sur $U - V_j$.

La somme localement finie $\sum_{j \in J} \epsilon_j \frac{f_j}{g_j}$ s'écrit, après réduction au même dénominateur, sous la forme f/g , où g désigne le produit localement fini $\prod_{j \in J} g_j$. Visiblement, $\forall i \in I$, la restriction de f/g à U_i est égale à φ_i/ψ_i . Il en résulte que l'application canonique (évidemment injective) $\underline{\mathcal{G}}^\#(U) \rightarrow \mathcal{G}^\#(U)$ est surjective, et donc un isomorphisme.

2) Soit Y un fermé de X . D'après (1), une section de $\mathcal{G}^\#$ sur Y est de la forme φ/ψ où $\varphi \in \mathcal{E}(Y)$, $\psi \in \mathcal{E}(Y)$ et

$$\forall y \in Y, T_y \varphi \neq 0, T_y \psi \neq 0.$$

D'après le lemme 1, une telle section se prolonge en une section de $\mathcal{G}^\#$ sur X : le faisceau $\mathcal{G}^\#$ est donc mou.

3) La preuve est analogue à celle de (1) et laissée au lecteur.

PROPOSITION 3. — On a un diagramme commutatif de morphismes canoniques de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G_p^*(X) & \rightarrow & G_p(X) & \rightarrow & G_p(X)/G_p^*(X) \rightarrow 0 \\ & & \psi^* \downarrow \wr & & \psi \downarrow \wr & & \psi \downarrow \wr \\ 0 & \rightarrow & H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p & \rightarrow & H^1(X, \mathbb{Z}/p) & \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z})_p \rightarrow 0 \end{array}$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes (*).

Preuve. — On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow \mathcal{G}^\# \xrightarrow{p} \mathcal{G}^{[p]} \rightarrow 0$$

D'après 2.2., on en déduit une suite exacte :

$$H^0(x, \mathcal{G}^\#) \xrightarrow{p} H^0(X, \mathcal{G}^{[p]}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}^\#) = 0.$$

D'où un isomorphisme canonique :

$$G_p(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathbb{Z}/p) \tag{3.1}$$

De même, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow \mathcal{G}^* \xrightarrow{p} \mathcal{G}^* \rightarrow 0$$

d'où une suite exacte :

$$0 \rightarrow G_p^*(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}^*)_p \rightarrow 0 \tag{3.2}$$

Enfin, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\exp} \mathcal{E}^* \rightarrow 0$$

(*) Si G est un groupe abélien additif, on pose : $G_p = \{x \in G ; p x = 0\}$.

où \exp désigne l'application exponentielle. D'où :

$$\text{coker } (H^0(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{\exp} H^0(X, \mathcal{E}^*)) \simeq H^1(X, \mathcal{Z})$$

et en tensorisant par \mathcal{Z}/p :

$$G_p^*(X) \simeq H^0(X, \mathcal{E}^*) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{Z}/p \simeq H^1(X, \mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{Z}/p \quad (3.3)$$

En outre, d'après la même suite exacte :

$$H^1(X, \mathcal{E}^*) \simeq H^2(X, \mathcal{Z}) \quad (3.4)$$

La proposition résulte de (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4).

COROLLAIRE 4. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $H^2(X, \mathcal{Z})_p = 0$.

2) *Toute fonction $f \in \mathcal{E}(X)$ telle que, $\forall x \in X, T_x f \neq 0$, et telle que f soit localement puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞ , est de la forme $\varphi \cdot g^p$ où $\varphi \in \mathcal{E}(X)$, $g \in \mathcal{E}(X)$, et $\forall x \in X, \varphi(x) \neq 0$ (i.e. f est, à un facteur C^∞ inversible près, globalement puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞).*

Preuve. — Immédiate, d'après la proposition 3 et 2.3.

COROLLAIRE 5. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $H^1(X, \mathcal{Z}/p) = 0$

2) *Toute fonction $f \in \mathcal{E}(X)$ telle que, $\forall x \in X, T_x f \neq 0$, et telle que f soit localement puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞ , est de la forme g^p , où $g \in \mathcal{E}(X)$, (i.e. f est globalement puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞).*

Preuve. — Immédiate, d'après la proposition 3 et 2.3.

Nous nous proposons désormais d'expliciter l'homomorphisme ψ . Précisons d'abord quelques notations.

Le cercle S^1 étant paramétré par l'angle θ , i.e. par l'application $[0, 2\pi] \ni \theta \rightarrow e^{i\theta} \in S^1$, une application C^∞ de S^1 dans \mathbb{C} s'identifie à une application C^∞ $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma^{(n)}(0) = \sigma^{(n)}(2\pi).$$

Supposons que σ n'est plate en aucun point de $[0, 2\pi]$, et soit $\mu_\theta(\sigma)$ le plus petit entier n tel que $\sigma^{(n)}(\theta) \neq 0$. On pose :

$$\mu(\sigma) = \sum_{\theta \in [0, 2\pi[} \mu_\theta(\sigma) \quad \text{et} \quad \nu(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)} d\theta.$$

Si σ est à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, il est bien connu que $\nu(\sigma)$ est un entier (c'est le degré de l'application $\sigma : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Plus généralement, on a le résultat élémentaire suivant :

LEMME 6. — *Si l'application σ n'est plate en aucun point de $[0, 2\pi]$, l'intégrale (généralisée) $\nu(\sigma)$ existe et $\nu(\sigma) + \frac{1}{2} \mu(\sigma)$ est un entier.*

Preuve. — Soit $\{\theta_1, \dots, \theta_q\}$ l'ensemble des zéros de σ ; nous supposons, ce qui n'est pas restrictif, que $0 < \theta_1 < \dots < \theta_q < 2\pi$. Posons $\mu_{\theta_i}(\sigma) = n_i$ pour $i = 1, \dots, q$, et plongeons $[0, 2\pi]$ dans \mathbb{C} . Si $\eta > 0$ est assez petit, il existe pour $i = 1, \dots, q$, une fonction continue inversible $\xi_i(z)$ sur le disque $\{z \in \mathbb{C} ; |z - \theta_i| \leq \eta\}$, telle que la fonction $f_i(z) = (z - \theta_i)^{n_i}$. $\xi_i(z)$ induise sur l'intervalle $[\theta_i - \eta, \theta_i + \eta]$ la fonction σ .

Si $\epsilon < \eta$, soit $\gamma_i(\epsilon)$ le demi-cercle centré en θ_i , de rayon ϵ , et situé dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Enfin, soit $I(\epsilon)$ le complémentaire dans $[0, 2\pi]$ de la réunion des intervalles $[\theta_i - \eta, \theta_i + \eta]$, $i = 1, \dots, q$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, la somme :

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_{I(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)} d\theta + \sum_{i=1}^q \int_{\gamma_i(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{f'_i(z)}{f_i(z)} dz \right]$$

est le degré d'une application continue de S^1 dans S^1 ; c'est un entier qui varie continûment avec ϵ et donc indépendant de ϵ . Cette somme s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{I(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)} d\theta + \frac{\mu(\sigma)}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^q \int_{\gamma_i(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\xi'_i(z)}{\xi_i(z)} dz$$

En outre :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{I(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\sigma'(\theta)}{\sigma(\theta)} d\theta = \nu(\sigma)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^q \int_{\gamma_i(\epsilon)} \operatorname{Im} \frac{\xi'_i(z)}{\xi_i(z)} dz = 0, \text{ d'où le résultat.}$$

Soit $f \in \mathcal{G}(X)$ telle que, $\forall x \in X$, $T_x f \neq 0$ et telle que f soit localement puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞ ; soit $[f]$ sa classe dans $G_p(X)$. D'après (2.3), tout élément de $G_p(X)$ est de cette forme. Si τ est une application C^∞ de S^1 dans X , plate en aucun point de S^1 , notons $[\tau] \in H_1(X, \mathbb{Z}/p)$ sa classe d'homologie. L'application f étant donnée, on peut déformer τ sans modifier la classe d'homologie en sorte que $f \circ \tau$ ne soit plate en aucun point de S^1 . D'après le lemme 6, l'expression $\nu(f \circ \tau) + \frac{1}{2} \mu(f \circ \tau)$ est alors définie et c'est un entier.

Supposons désormais p premier ; alors

$$H^1(X, \mathbb{Z}/p) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/p} (H_1(X, \mathbb{Z}/p), \mathbb{Z}/p).$$

L'homomorphisme ψ sera donc complètement déterminé par la proposition suivante :

PROPOSITION 7. — *Avec les hypothèses et notations précédentes, on a :*

$$\langle \psi([f]), [\tau] \rangle = \nu(f \circ \tau) + \frac{1}{2} \mu(f \circ \tau) \pmod{p}.$$

Preuve. — Considérons d'abord le cas $X = S^1$; $\tau = 1_{S^1}$. Si f est inversible, i.e. $f \in \mathcal{G}^*(S^1)$, on vérifie immédiatement que :

$$\langle \psi^*([f]), 1_{S^1} \rangle = \nu(f) \pmod{p}$$

Si f est quelconque, d'après le corollaire 4, $f = \varphi \cdot g^p$ où

$$\varphi \in \mathcal{G}^*(S^1) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{G}(S^1).$$

Ainsi :

$$\langle \psi([f]), 1_{S^1} \rangle = \langle \psi^*([\varphi]), 1_{S^1} \rangle = \nu(\varphi) \pmod{p} =$$

$$\nu(f) - p \nu(g) \pmod{p} = \nu(f) + \frac{p}{2} \mu(g) \pmod{p} =$$

$$\nu(f) + \frac{\mu(f)}{2} \pmod{p}.$$

Considérons le cas général. Soit $\mathcal{G}^\#$ le sous-faisceau de $\mathcal{E}^\#$ tel que, pour tout ouvert U de X :

$$\mathcal{G}^\#(U) = \{\varphi/\psi \in \mathcal{E}^\#(U) ; \varphi \circ \tau \text{ et } \psi \circ \tau \text{ ne sont plates en aucun point de } \tau^{-1}(U)\}$$

et soit $\mathcal{G}^{[p]}$ le faisceau puissance $p^{\text{ème}}$ de $\mathcal{G}^\#$. Posons :

$$G_p(X) = \text{coker } \{H^0(X, \mathcal{G}^\#) \xrightarrow{p} H^0(X, \mathcal{G}^{[p]})\}.$$

On a un diagramme commutatif où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p & \longrightarrow & \mathcal{G}^\# & \xrightarrow{p} & \mathcal{G}^{[p]} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p & \longrightarrow & \mathcal{G}^\# & \xrightarrow{p} & \mathcal{G}^{[p]} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

D'où un diagramme commutatif d'isomorphismes, le faisceau $\mathcal{G}^\#$ étant mou (vérification analogue à 2.2) :

$$\begin{array}{ccc} G_p(X) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X, \mathbb{Z}/p) \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ G_p(X) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X, \mathbb{Z}/p) \end{array}$$

En outre, l'application τ définit un morphisme τ^* des faisceaux $\mathbb{Z}/p, \mathcal{G}^\#, \mathcal{G}^{[p]}$ sur X dans les faisceaux $\mathbb{Z}/p, \mathcal{G}^\#, \mathcal{G}^{[p]}$ sur S^1 , respectivement. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_p(X) & \xrightarrow{\psi} & H^1(X, \mathbb{Z}/p) \\ \downarrow \tau^* & & \downarrow \tau^* \\ G_p(S^1) & \xrightarrow{\psi} & H^1(S^1, \mathbb{Z}/p) \end{array}$$

La commutativité du premier diagramme permet d'identifier $G_p(X)$ à $G_p(X)$; d'après la commutativité du second et la première partie de cette démonstration :

$$\begin{aligned} \langle \psi \circ \tau^*([f]), 1_{S^1} \rangle &= \langle \psi([f \circ \tau]), 1_{S^1} \rangle = \\ &= \nu(f \circ \tau) + \frac{1}{2} \mu(f \circ \tau) \text{ mod } p = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \langle \tau^*(\psi([f])), 1_{S^1} \rangle = \\ & \langle \psi([f]), [\tau] \rangle, \text{ c.q.f.d.} \end{aligned}$$

COROLLAIRE 8. — Soit $f \in \mathfrak{E}(X)$ telle que f ne soit plate en aucun point de X et telle que f soit localement puissance $p^{\text{ème}}$ d'une fonction C^∞ . Soit $(\tau_i)_{i \in I}$ une famille d'application C^∞ de S^1 dans X telle que les $[\tau_i]$ engendrent $H_1(X, \mathbf{Z}/p)$ et telle que, $\forall i \in I$, $f \circ \tau_i$ ne soit plate en aucun point de S^1 . Alors, f est globalement puissance $p^{\text{ème}}$ de fonction C^∞ si et seulement, $\forall i \in I$, l'entier $\nu(f \circ \tau_i) + \frac{1}{2} \mu(f \circ \tau_i)$ est divisible par p .

En particulier, si $p = 2$ et si f est à valeurs dans \mathbf{R}^+ , une condition nécessaire et suffisante pour que f admette globalement une racine carrée C^∞ est que pour tout $i \in I$, le nombre de $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\mu_\theta(f \circ \tau_i)$ ne soit pas divisible par 4, est un nombre pair.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Cl. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables. Chap. VII, *Ergebnisse Der Mathematik*, Band 71, Springer Verlag (1972).

Manuscrit reçu le 22 mai 1974
accepté par B. Malgrange.

Jean-Claude TOUGERON,
Université de Rennes I
Département de Mathématiques
Avenue du Général Leclerc
35000 - Rennes-Beaulieu.