GENEVIÈVE POURCIN

Sous-espaces privilégiés d'un polycylindre

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 1 (1975), p. 151-193

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_151_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 1 (1975), 151-193

SOUS-ESPACES PRIVILÉGIÉS D'UN POLYCYLINDRE

par Geneviève POURCIN

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soient U un ouvert de C^n et $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ un polycylindre dans U, i.e. un produit de n compacts convexes de C d'intérieur non vide. Soit $B(K, E)$ l'espace de Banach des fonctions continues de K dans un espace de Banach E qui sont analytiques sur $\overset{\circ}{K}$; on note $B(K)$ l'algèbre $B(K, C)$ on a alors

$$B(K, E) = B(K) \hat{\otimes}_\epsilon E$$

Pour tout faisceau analytique cohérent F sur U ón sait qu'il existe des résolutions finies libres de F au voisinage de K ; pour une telle résolution $\mathcal{L}.$ de F on note

$$B(K, \mathcal{L}.) = B(K) \otimes H^\circ(K \ \mathcal{L}.).$$

et on introduit l'espace

$$B(K, F) = \text{coker } (B(K, \mathcal{L}_1) \to B(K, \mathcal{L}_0)) \ ;$$

il ne dépend pas de la résolution choisie.

On rappelle que par définition ([1] § 7) K est F-privilégié si le complexe d'espaces de Banach $B(K, \mathcal{L}.)$ est exact direct ; il en est alors de même pour toute résolution. On peut définir de façon analogue une notion de privilège L^2 [4].

Enfin on note G_K^r l'espace analytique banachique des quotients de $B(K)^r$ admettant une résolution finie directe construit dans [1].

On obtient essentiellement trois résultats : un critère local de privilège pour les faisceaux analytiques cohérents (§ 3), la propriété universelle de G_K^r (§ 4) et la construction d'un espace de morphismes (§ 5) utilisé dans certain problème de modules.

Plus précisément on montre que pour qu'un B(K)-module (ne provenant pas nécessairement d'un faisceau analytique cohérent défini au voisinage de K) soit de résolution finie directe, il faut et il suffit que localement sur K il admette des résolutions finies et soit séparé (théorème 2.3 § 2 et 3). L'hypothèse locale s'exprimant commodément en termes de faisceaux, on est amené à introduire les $\underline{B}_K$-modules (§ 3) dont les faisceaux analytiques cohérents fournissent un cas particulier et à donner une généralisation du théorème de Dolbeault (§ 1) analogue à celle donnée par A. Douady ([1] § 6).

Ensuite on considère des situations relatives au-dessus d'un espace analytique banachique S, ce qui nécessite l'introduction d'une structure fonctée sur $S \times K$ (§ 4) ; on obtient alors une notion de S-anaplatitude pour certains sous-espaces fonctés de $S \times K$ et en reprenant la construction de [1] on donne alors la propriété universelle de G_K^r (§ 4-VI). Enfin au § 5 on considère un sous-espace foncté S-anaplat Y de $S \times K$ et un espace analytique X "relativement de présentation finie au-dessus de S", par exemple un espace S-anaplat à fibres de dimension finie, et on munit $\bigcup_{s \in S} \mathrm{MOR}\,(Y(s), X(s))$ d'une structure analytique universelle.

Cet article est la partie essentielle d'un ensemble de travaux utilisant les techniques de privilège [7]-[8]-[9] et est présenté comme thèse de doctorat ès-sciences mathématiques à la Faculté d'Orsay.

Je tiens à remercier A. Douady sans qui ces travaux n'auraient pas vu le jour et à lui exprimer ma reconnaissance pour l'intérêt des problèmes qu'il m'a posés et les nombreux conseils qu'il m'a toujours généreusement donnés.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à J.L. Verdier qui a su m'encourager à la rédaction de cet article.

Notations

– On rappelle qu'une suite exacte d'espaces de Banach

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

est stricte (resp. exacte directe) si l'image de g est fermée (resp. les noyaux et images de f et g sont facteurs directs).

– Si $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ est un polycylindre de C^n on note $\acute{K}$ la frontière topologique de K et $\dot{K} = \dot{K}_1 \times \ldots \times \dot{K}_n$ la frontière distinguée. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans K on note

$$I_x = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid x_i \in \dot{K}_i\}$$

et $\pi_x : K \to C^{I_x}$ la projection.

– Enfin $\overset{\circ}{K}$ désigne l'intérieur de K dans C^n mais pour tout polycylindre L contenu dans K et différent de K, $\overset{\circ}{L}$ désigne, sauf mention contraire, l'intérieur de L dans K.

1. LES FAISCEAUX $\underline{B}_{K,T}(E)$

Soient K un polycylindre compact de C^n et E un espace de Banach. Pour tout ouvert U de C^n on note $\underline{B}_K(U, E)$ l'espace des fonctions continues de $U \cap K$ dans E qui sont holomorphes sur $U \cap \overset{\circ}{K}$ et on munit cet espace de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts ; c'est un espace de Fréchet. Pour tout espace de Banach T on note

$$\underline{B}_{K,T}(U, E) = L(T, \underline{B}_K(U, E))$$

On définit ainsi un faisceau $\underline{B}_{K,T}(E)$ concentré sur K et on a en particulier

$$H^\circ(K, \underline{B}_{K,T}(E)) = L(T, B(K, E)).$$

Enfin on note respectivement $\underline{B}_{K,T}$ et $\underline{B}_K$ pour $\underline{B}_{K,T}(C)$ et $\underline{B}_K(C)$.

Remarque. – On rappelle qu'une suite d'espaces de Banach

$$0 \to E \to F \to G \to 0$$

est exacte directe si et seulement si pour tout espace de Banach T

$$0 \to L(T, E) \to L(T, F) \to L(T, G) \to 0$$

est une suite exacte. C'est pourquoi on introduit les faisceaux $B_{K,T}$ pour tout T ; ces faisceaux ne sont utilisés que dans la démonstration du théorème 2.4.

PROPOSITION 1.1. – *Pour tout polycylindre compact* L *dans* K, *on a* :

a) $H^{\circ}(L, \underline{B}_{K,T}(E)) = \varinjlim_{\alpha} L(T, B(L_\alpha, E))$

où $(L_\alpha)_\alpha$ *est un système fondamental de voisinage de* L *dans* K *formé de polycylindres compacts contenus dans* K

b) $\forall q > 0 \quad H^q(L, \underline{B}_{K,T}(E)) = 0$

On utilise la démonstration du théorème de Dolbeault faite dans ([1] § 6). Soit L un polycylindre et U un ouvert de C^n. Pour toute suite $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ on désigne par $\underline{Q}_{K,i_1, \ldots, i_p}(U, E)$ (resp. $Q_{i_1, \ldots, i_p}(L, E)$) l'espace des formes différentielles

$$f\, d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

où f est une fonction continue de $U \cap K$ (resp. L) dans E telle que pour toute suite $(j_1, \ldots, j_q)$ disjointe de $(i_1, \ldots, i_p)$ dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ la dérivée $\dfrac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \ldots \partial \bar{z}_{j_q}}$ au sens des distributions sur $U \cap \mathring{K}$ à valeurs dans E proviennent d'un élément de $\mathcal{C}(K \cap U, E)$ resp. $\mathcal{C}(L, E)$).

On munit $Q_{i_1} \ldots {}_{i_p}(L, E)$ de la norme

$$\|f\| = \sup_{\{j_1,\ldots,j_q\} \cap \{i_1,\ldots,i_p\} = \emptyset} \left\| \frac{\partial^q f}{\partial \bar{z}_{j_1} \ldots \partial \bar{z}_{j_q}} \right\|_L$$

$Q^{\circ}(L, E)$ correspond à la suite vide et on note

$$\forall p \in \{1, \ldots, n\} \qquad Q^p(L, E) = \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} Q_{i_1} \ldots {}_{i_p}(L, E)$$

$$Q^p(L) \quad = Q^p(L, C)$$

et on considère la différentielle

$$\forall p \qquad 0 \leqslant p \leqslant n-1 \qquad \bar{\partial} : Q^p(L, E) \to Q^{p+1}(L, E).$$

Etant donné que $\mathcal{C}(L, E) = \mathcal{C}(L) \hat{\otimes}_\epsilon E$ et que le foncteur $- \hat{\otimes}_\epsilon E$ est exact à gauche on a :

$$Q^p(L, E) = Q^p(L) \hat{\otimes}_\epsilon E.$$

On démontre alors comme dans ([1], § 6 théorème I) que le complexe d'espaces de Banach

$$0 \to B(L, E) \to Q^\circ(L, E) \to \dots \to Q^n(L, E) \to 0 \qquad (1)$$

est exact direct. Ceci permet de définir une résolution fine du faisceau $\underline{B}_{K,T}(E)$. En effet on note

$$\underline{Q}_{K,T,i_1,\dots,i_p}(U, E) = L(T, \underline{Q}_{K,i_1,\dots,i_p}(U, E))$$

$$\underline{Q}^p_{K,T}(U, E) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \underline{Q}_{K,T,i_1,\dots,i_p}(U, E)$$

et $\underline{Q}^p_{K,T}(E)$ les faisceaux ainsi définis. Alors, comme tout point de K possède un système fondamental de voisinage dans K formé de polycylindres, on déduit de la suite exacte directe (1) une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \underline{B}_{K,T}(E) \to \underline{Q}_{K,T}(E) \qquad (2)$$

Compte tenu de (1) et (2) on obtient déjà que

$$\forall q > 0 \qquad H^q(K, \underline{B}_{K,T}(E)) = 0$$

L 'assertion (a) résulte du fait que si U et V sont deux ouverts de K tels que

$$U \supset L_\alpha \supset V$$

les morphismes de restriction

$$\underline{B}_K(U, E) \to B(L_\alpha, E) \to \underline{B}_K(V, E)$$

sont continus.

On a de même

$$H^\circ(L, \underline{Q}^p_{K,T}(E)) = \varinjlim_{\alpha} L(T, Q^p(L_\alpha, E))$$

et l'assertion b) se déduit alors de (1).

COROLLAIRE 1.2. – *Pour tout polycylindre* L *dans* K *on a*

$$\forall q > 0 \qquad H^q(L, \underline{B}_K(E)) = 0$$

Ceci se déduit de l'assertion b) de la proposition 1 par un argument classique de limite projective. [6].

N.B. Dans le cas du privilège L^2, pour tout ouvert U on note $\mathcal{H}_K(U)$ l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur $\mathring{K} \cap U$ et de carré intégrable, muni de la norme L^2. On obtient ainsi un faisceau $\mathcal{H}_K$. Comme toute suite exacte courte d'espaces de Hilbert est directe, il est inutile d'introduire des faisceaux $\mathcal{H}_{K,T}$. Il est démontré dans ([4] II,1) à l'aide d'un résultat de Hörmander l'analogue de la proposition 1 pour les faisceaux $\mathcal{H}_K$.

2. B(K)-MODULES PRIVILEGIES.

DEFINITION 2.1. – *On appelle* B(K)*-module faiblement privilégié (resp. privilégié) un* B(K)*-module de Banach admettant une résolution finie (resp. finie directe), c'est-à-dire un* B(K)*-module* Y *tel qu'il existe une suite exacte de* B(K)*-modules*

$$0 \to B(K)^{r_p} \xrightarrow{d_p} \dots \xrightarrow{d_1} B(K)^{r_0} \to Y \to 0 \tag{3}$$

où Im d_1 *est fermée (resp. pour tout i,* d_i est direct).

Le théorème 2.4 ci-dessous montre l'équivalence du privilège et du privilège faible.

Par exemple si $\underline{F}$ est un faisceau analytique cohérent défini au voisinage de K pour lequel K est $\underline{F}$-privilégié, $Y = B(K, \underline{F})$ est un B(K)-module privilégié. De plus $B(K, \underline{F})$ détermine entièrement le $\underline{B}_K$-module $\underline{B}_K \otimes_{\mathcal{O}} \underline{F}$.

Soient E et T deux espaces de Banach ; si $\mathcal{L}_i = \underline{O}_{C^n}^{r_i}$ on note

$$\underline{B}_K \mathcal{L}_i(E) = \underline{B}_K(E)^{r_i}$$

$$\underline{B}_{K,T} \mathcal{L}_i = \underline{B}_{K,T}(C)^{r_i}$$

On désigne par $\mathcal{L}.$ (resp. $\underline{B}_K\mathcal{L}.(E)$, $\underline{B}_{K,T}\,\mathcal{L}.$) le complexe de faisceaux sur $\dot{K}$ (resp. K) défini par (3), et par $B(K\,,\mathcal{L}.)$ la suite (3). On pose

$$\underline{B}_Y(E) = \operatorname{coker}\,[\underline{B}_K\mathcal{L}_1(E) \to \underline{B}_K\mathcal{L}_0(E)]$$

$$\underline{B}_{Y,T} \;= \operatorname{coker}\,[\underline{B}_{K,T}\,\mathcal{L}_1 \to \underline{B}_{K,T}\,\mathcal{L}_0\,]$$

Les faisceaux ainsi définis ne dépendent pas de la résolution choisie.

Enfin pour tout polycylindre M dans K on pose

$$B(M\,,\mathcal{L}.) = B(K\,,\mathcal{L}.) \underset{B(K)}{\otimes} B(M)$$

DEFINITION 2.2. – *Soit* $\underline{Y}$ *un* $\underline{B}_K$*-module. On dit que* $\underline{Y}$ *est localement* K*-privilégié si pour tout point* x *de* K *il existe un polycylindre* P *voisinage de* x *dans* K *et une résolution* $\underline{B}_K$*-libre finie* $\underline{L}.$ *de* $\underline{Y}$ *au voisinage de* P *telle que le complexe* $B(P\,,\underline{L}.)$ *qui s'en déduit soit exact direct.*

On se propose de démontrer les deux théorèmes suivants :

THEOREME 2.3

a) *Soit* Y *un* B(K)*-module. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

i) Y *est* K*-privilégié*

ii) Y *est faiblement* K*-privilégié*

et alors $\underline{B}_Y$ *est localement* K*-privilégié et* $H^\circ(K\,,\underline{B}_Y) = Y$.

b) *Soit* $\underline{Y}$ *un* $\underline{B}_K$-module. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

i) *le* B(K)-module $H^\circ(K\,,\underline{Y})$ *est* K*-privilégié et* $\underline{B}_{H^\circ(K,\underline{Y})} \doteq \underline{Y}$

ii) *le faisceau* $\underline{Y}$ *est localement* K*-privilégié.*

THEOREME 2.4. – *Soient* Y *un* B(K)-module *privilégié et* $B(K\,,\mathcal{L}.)$ *une résolution directe de* Y.

i) *Le complexe de faisceaux* $\underline{B}_K\mathcal{L}.(E)$ *est une résolution du* $\underline{B}_K$-module $\underline{B}_Y(E)$.

ii) $H^{\circ}(K, \underline{B}_Y(E)) = Y \hat{\otimes}_{\epsilon} E$

iii) $\forall\, q > 0 \qquad H^q(K, \underline{B}_Y(E)) = 0.$

Remarques

– On déduit du théorème 2.3 une correspondance biunivoque entre B(K)-modules privilégiés et $\underline{B}_K$-modules localement K-privilégiés ; on montrerait alors aisément à l'aide de la proposition 1.1 que l'on définit ainsi une équivalence de catégories.

– On rappelle que si

$$F_S \to G_S \to H_S$$

est un complexe de fibrés banachiques triviaux sur un espace topologique S et si en un point s_0 de S la suite

$$F \xrightarrow{f(s_0)} G \xrightarrow{g(s_0)} H$$

est exacte stricte (i.e. ker $g(s_0) = \mathrm{IM}\, f(s_0)$ et Im $g(s_0)$ fermée) il existe un voisinage U de s_0 dans S tel que pour tout s dans U la suite

$$F \xrightarrow{f(s)} G \xrightarrow{g(s)} H$$

est exacte stricte ([3] théorème 3.5.1).

Le plan de la démonstration des théorèmes 2.3 et 2.4 est le suivant : on démontre tout d'abord la proposition 2.5 ci-dessous, puis le théorème 2.4 ; la démonstration complète de 2.3 est donnée au § 3.

PROPOSITION 2.5. – *Soit* Y *un* B(K)*-module admettant une résolution finie* $B(K, \mathcal{L}.)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

i) *la suite exacte* $B(K, \mathcal{L}.)$ *est directe,*

ii) Y *est séparé,*

iii) *tout point* x *dans* K *possède un système fondamental de voisinages polycylindriques* (L_n) *dans* K *tel que pour tout* n, $Y \underset{B(K)}{\otimes} B(L_n)$ *soit* L_n*-privilégié.*

A) *Démonstration* de 2.5. – il est clair que (i) implique (ii).

1) *Montrons que (ii) implique (iii)* :

Soit a un point de $\overset{\circ}{K}$ et t dans $[0,1]$; on note K_t l'image de K par l'homothétie m_t :

$$m_t(x) = tx + (I - t)a$$

et $f_t = fom_t$ pour tout f dans B(K). Alors pour tout t on définit à partir de (3) un complexe d'espaces de Banach

$$0 \to B(K)^{r_p} \xrightarrow{(d_p)_t} \dots \xrightarrow{(d_0)_t} B(K)^{r_0} \tag{4}$$

qui est encore exact strict pour t assez voisin de 1 (Remarque 2.2).

LEMME 2.6.

α) *Pour t assez voisin de 1 dans* $[0,1]$ *le complexe d'espaces de Banach* $B(K_t, \mathcal{L})$ *est exact strict en degrés strictement positifs.*

β) *Le complexe de faisceaux* $\underline{B}_K \mathcal{L}.$ *est acyclique sur* $\overset{\circ}{K}$.

En effet on remarque que le complexe $B(K_t, \mathcal{L}.)$ est exact strict si et seulement si le complexe (4) l'est ; d'où l'assertion (α). La démonstration de (β) est identique à celle de ([1] § 8 lemme 1.b) : (β) résulte de (α), du fait que pour tout $t_0 < 1$

$$\underline{\mathcal{O}}(K_{t_0}) = \varinjlim_{t > t_0} B(K_t)$$

et du théorème A de H. Cartan.

Compte tenu du théorème d'existence des voisinages privilégiés et du fait que $\underline{B}_{Y|\overset{\circ}{K}}$ est un faisceau analytique cohérent, il résulte de l'assertion (β) du lemme que iii) est vrai en tout point de $\overset{\circ}{K}$.

Soient maintenant x un point de $\dot{K}$

$$K' = \prod_{i \in I_x} K_i$$

et K'' tel que $K = K' \times K''$. Alors

$$x = (x', x'') \quad \text{avec} \quad x'' \in \overset{\circ}{K}''.$$

Enfin pour tout $\underline{\mathcal{O}}$-module $\underline{F}$ on note $\underline{F}(x')$ sa restriction à $\{x'\} \times K''$.

LEMME 2.7.

α) *Le faisceau* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{Y}}(x')_{|\mathring{\mathrm{K}}''}$ *est analytique cohérent sur* $\mathring{\mathrm{K}}''$

β) *Le complexe de faisceaux* $\mathcal{L}.\ (x')_{|\mathring{\mathrm{K}}''}$ *est une résolution de* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{Y}}(x')_{|\mathring{\mathrm{K}}''}$

(α) résulte du fait que

$$\mathrm{B(K)} = \mathrm{B(K' \times K'')} = \mathrm{B(K', B(K''))}.$$

L'assertion (β) se démontre comme le lemme 2.6 (β) compte tenu de l'assertion ii) de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.8. – *Soient* E, F, G *trois espaces de Banach et* P *un polycylindre compact de* $\mathbf{C}^p$. *Soient* f (resp. g) *un élément de* B(P , L(E , F)) (resp. B(P , L(F , G)), $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *les applications induites par* f *et* g :

$$\mathrm{B(P, E)} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{B(P, F)} \xrightarrow{\tilde{g}} \mathrm{B(P, G)} \qquad (*)$$

et a *un élément de* P. *Alors*

i) *si* $\tilde{f}$ *est strict,* $f(a)$ *est strict*

ii) *si la suite* (*) *est exacte et si* $\tilde{f}$ *et* $\tilde{g}$ *sont stricts, la suite*

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f(a)} \mathrm{F} \xrightarrow{g(a)} \mathrm{G}$$

est exacte.

iii) *si* f *est dans* $\underline{\mathcal{O}}$(K , L(E , F)) *et si* χ *est un élément du dual* $\mathrm{F}^{\perp}$ *de* F *nul sur* Im $f(a)$, *alors pour tout* v *dans* Im f, $\chi \circ v$ *est* $\mathrm{O}(z - a)$.

Démonstration. – Soit h une fonction pic en a, c'est-à-dire un élément de B(P) tel que $h(a) = 1$ et

$$\forall s \neq a \quad |h(s)| < 1$$

Pour tout morphisme φ d'espaces de Banach on note $q(\varphi)$ sa conorme

$$q(\varphi) = \operatorname*{Inf}_{x} \frac{\|\varphi(x)\|}{d(x, \ker \varphi)}$$

On remarque que φ est strict si et seulement si $q(\varphi)$ est strictement positive. Il suffit donc de démontrer l'inégalité :

$$q(\widetilde{f}) \leqslant q(f(a)).$$

Soit $\epsilon > 0$ et u un élément de E tel que

$$d(u\,,\,\ker f(a)) = 1.$$

$$\|f(a).u\| < q(f(a)) + \epsilon$$

Pour tout entier n soit v l'élément de B(P) défini par

$$v_n(s) = h^n(s).u$$

Pour n assez grand

$$\|\widetilde{f}(v_n)\| \leqslant \|f(a).u\| + \epsilon$$

On déduit alors de l'inégalité

$$d(v_n\ ;\ \ker \widetilde{f}) \geqslant 1$$

que
$$q(f) \leqslant q(f(a)) + 2\epsilon.$$

Démontrons ii) : soit u un élément de ker $g(a)$; on considère la suite $(v_n)_n$ de B(P , F) définie par

$$v_n(s) = h^n(s).u$$

Il résulte du choix de h et du fait que $g(a).u = 0$ que

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{g}(v_n) = 0$$

Le morphisme $\widetilde{g}$ étant strict, on a alors

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n\,,\ker \widetilde{g}) = 0$$

ou encore
$$\lim_{n\to\infty} d(v_n\,,\mathrm{I}m\ \widetilde{f}) = 0$$

On en déduit alors que

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n(a)\,,\,\mathrm{I}m\ f(a)) = 0.$$

Etant donné que $v_n(a) = u$ et que Im $f(a)$ est fermé d'après i),

u est donc dans $\mathrm{I}m\, f(a)$; ce qui termine la démonstration de ii).

Enfin l'assertion iii) résulte du fait que l'élément $\chi \circ f$ de $\underline{\mathcal{O}}(\mathrm{K}, \mathrm{E}^1)$ est nul en a.

Pour terminer la démonstration de 2.5 on utilise le lemme suivant. Soit P un polycylindre compact.

Soient E et F deux espaces de Banach. Pour tout ouvert U dans P on note E_U (resp. F_U) le fibré trivial de fibre E (resp. F) sur U. On appelle *morphisme de fibrés banachiques de* E_U *dans* F_U toute application de U dans L(E , F) continue sur U et analytique sur $\mathrm{U} \cap \overset{\circ}{\mathrm{P}}$. On démontre alors de manière analogue à ([2] § III) le

LEMME 2.9. – *Soient* E, F, G *trois espaces Banach et*

$$\mathrm{E}_\mathrm{P} \xrightarrow{f} \mathrm{F}_\mathrm{P} \xrightarrow{g} \mathrm{G}_\mathrm{P}$$

deux morphismes de fibrés analytiques banachiques sur P *tels que* $g \circ f = 0$. *Soit* x *un point de* P *tel que*

$$\mathrm{E} \xrightarrow{f(x)} \mathrm{F} \xrightarrow{g(x)} \mathrm{G}$$

soit exact direct.

Alors il existe un voisinage de U *de* x *dans* P *tel que*

a) $\mathrm{E}_\mathrm{U} \to \mathrm{F}_\mathrm{U} \to \mathrm{G}_\mathrm{U}$ *est une suite exacte scindée de morphismes de fibrés*

b) *Pour tout polycylindre* L *dans* U *la suite*

$$\mathrm{B}(\mathrm{L}, \mathrm{E}) \to \mathrm{B}(\mathrm{L}, \mathrm{F}) \to \mathrm{B}(\mathrm{L}, \mathrm{G})$$

est exacte directe.

Fin de la démonstration de : ii) implique iii). – Il suffit de montrer l'existence d'un système fondamental $\mathcal{V}$ de voisinages de x dans K formé de polycylindres L tels que le complexe d'espaces de Banach $\mathrm{B}(\mathrm{L}, \mathcal{L}.)$ soit exact.

Soit $\mathcal{S}$ un système fondamental de voisinages $\underline{\mathrm{B}}_\mathrm{Y}(x')_{|\overset{\circ}{\mathrm{K}}''}$-privilégiés de x'' dans K''. Pour tout L'' dans $\mathcal{S}$ il résulte de l'assertion (β) du lemme 2.7 que le complexe $\mathrm{B}(\mathrm{L}'', \mathcal{L}.(x'))$ est exact direct. On déduit des données (3) un complexe de fibrés banachiques $\mathrm{B}(\mathrm{L}'', \mathcal{L}.)$ au-dessus de K' dont la fibre en un point quelconque y' de K' est $B(L'', \mathcal{L}.(y'))$. Ce complexe étant exact direct en x', il résulte du lemme 2.9 l'existence d'un voisinage U de x' dans K' sur lequel le complexe de fibrés est exact direct et tel que pour tout polycylindre L' dans U le complexe d'espaces de Banach

$$B(L', B(L'', \mathcal{L}.)) = B(L' \times L'', \mathcal{L}.)$$

soit exact direct.

Il suffit alors de prendre pour $\mathcal{V}$ l'ensemble des polycylindres voisinages de x dans K et de la forme $L = L' \times L''$ avec

$$L' \subset U \qquad L'' \in \mathcal{S}$$

2) *Montrons : iii) implique i) :*

Lemme 2.10. – *Si* Y *est localement* K*-privilégié, (i.e. si 2.5 iii) est vrai) alors*

α) *le complexe de faisceaux* $\underline{B}_{K,T}\mathcal{L}.$ *est acyclique*

β) *pour tout ouvert* V

$$\underline{B}_{Y,T}(V) = L(T, \underline{B}_Y(V)).$$

γ) Y *est séparé.*

– Soient $x \in K$ et (L_α) un système fondamental de voisinages de x dans K pour lequel les complexes d'espaces de Banach $B(L_\alpha, \mathcal{L}.)$ sont exacts directs. Posons

$$Y_\alpha = \operatorname{coker}\,[B(L_\alpha, \mathcal{L}_1) \to B(L_\alpha, \mathcal{L}_0)] \qquad (5)$$

Y_α est un espace de Banach et pour tout Banach T le complexe

$$L(T, B(L_\alpha, \mathcal{L}.)) \to L(T, Y_\alpha) \to 0$$

est exact.

De plus on a 1.1

$$(\underline{B}_{K,T}\mathcal{L}.)_x = \varinjlim_{\alpha} L(T, B(L_\alpha, \mathcal{L}.)) \qquad (6)$$

d'où l'assertion (α).

– Démontrons (β) : soit $\underline{G}$ le faisceau défini par

$$\underline{G}(V) = L(T , \underline{B}_Y(V))$$

pour tout ouvert V. Il suffit de vérifier que le morphisme naturel de faisceaux

$$\underline{B}_{Y,T} \to \underline{G}$$

est un isomorphisme sur les fibres. Soient $x \in K$ et $(L_\alpha)_\alpha$ comme ci-dessus ; on déduit de (6) et de la suite exacte

$$(\underline{B}_{K,T}\mathcal{L}_1)_x \to (\underline{B}_{K,T}\mathcal{L}_0)_x \to (\underline{B}_{Y,T})_x \to 0$$

que

$$(\underline{B}_{Y,T})_x = \varinjlim_{\alpha} L(T , Y_\alpha)$$

Il reste à montrer que

$$\underline{G}_x = \varinjlim_{\alpha} L(T , Y_\alpha)$$

Or pour tout α on a un morphisme de restriction

$$L(T , Y_\alpha) \to L(T , \underline{B}_Y(\mathring{L}_\alpha))$$

et du fait que 1.2

$$\forall\, q > 0 \qquad H^q(\mathring{L}_\alpha , \underline{B}_K) = 0$$

On a aussi par restriction, pour tout L_β contenu dans $\mathring{L}_\alpha$ un morphisme

$$L(T , \underline{B}_Y(\mathring{L}_\alpha)) \to L(T , Y_\beta)$$

L'assertion résulte alors du fait que

$$\underline{G}_x = \varinjlim_{\alpha} L(T , \underline{B}_Y(\mathring{L}_\alpha))$$

– Démontrons (γ) : il résulte de l'assertion (α) et de la proposition 1.1 que $H^\circ(K , \underline{B}_Y) = Y$. Soit alors $(L_\alpha)_\alpha$ une famille de polycylindres dans K dont les intérieurs recouvrent K et tels que les complexes $B(L_\alpha , \mathcal{L}.)$ soient exacts directs. On a un diagramme commutatif d'applications continues :

$$\begin{tikzcd}
Y = H^\circ(K\,,\underline{B}_Y) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & \prod\limits_\alpha H^\circ(\overset{\circ}{L}_\alpha\,,\underline{B}_Y) \\
\Pi\, Y_\alpha \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

où les Y_α sont définis par (5) et *i, j, k* sont les restrictions ; *i* est injective car $\underline{B}_Y$ est un faisceau, donc *j* est injective. Comme $\Pi\, Y_\alpha$ est séparé et *j* continue, on en déduit que Y est séparé.

Fin de la démonstration de 2.5. – Compte tenu de l'assertion (γ) du lemme 2.10, il suffit de montrer que si Y est un B(K)-module privilégié la suite exacte $B(K\,,\mathcal{L}.)$ est directe. Etant donné que pour tout ouvert V contenant K

$$\underline{B}_Y(V) = H^\circ(K\,,\underline{B}_Y) = Y$$

on déduit de l'assertion (β) du lemme 2.10 que

$$H^\circ(K\,,\underline{B}_{Y,T}) = L(T\,,Y)$$

Il résulte alors de l'assertion (α) du lemme 2.10 et de la proposition 1.1 que pour tout espace de Banach T le complexe $0 \to L(T\,,B(K\,,\mathcal{L}.)) \to L(T\,,Y) \to 0$ est exact et par conséquent

$$0 \to B(K\,,\mathcal{L}.) \to Y \to 0$$

est exact direct.

B) Démonstration du théorème 2.4.

Soient Y un B(K)-module privilégié et E un espace de Banach. Il résulte du théorème 2.4 que tout point de K possède un système fondamental de voisinages $(L_\alpha)_\alpha$ tels que $B(L_\alpha\,,\mathcal{L}.)$ soit exact direct. Les complexes

$$B(L_\alpha\,,\mathcal{L}.(E)) = B(L_\alpha\,,\mathcal{L}.)\,\hat{\otimes}_\epsilon\, E$$

sont dont exacts directs. L'assertion i) est alors une conséquence de l'assertion (a) de la proposition 1.1. Les assertions ii) et iii) se déduisent alors de i), de la proposition 1.1 et du fait que $B(K\,,\mathcal{L}.)$ est exact direct.

Mentionnons pour terminer ce § une propriété bien agréable des B(K)-modules privilégiés :

PROPOSITION 2.11.

a) *Soit* Y *un* B(K)*-module privilégié. Le morphisme*

$$\rho \; : \; H^{\circ}(K\,,\underline{B}_Y(E)) \to H^{\circ}(\mathring{K}\,,\underline{B}_Y(E))$$

est injectif continu d'image dense.

b) *Soit* $\underline{F}$ *un faisceau analytique cohérent défini au voisinage de* K ; *les morphismes de restriction*

$$\rho \; : B(K\,,\underline{F}) \to \underline{F}(\mathring{K})$$

$$\rho' \; : \underline{F}(K) \quad \to B(K\,,\underline{F})$$

sont injectifs continus d'image dense.

En effet soit a un point de K et $m \, : \, [0,1] \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ défini par

$$m(t\,,x) = tx + (I - t)a$$

Soit $K_t = m_t K$ et $B(K\,,\mathcal{L}.(E))_t$ le complexe

$$0 \to B(K\,,E)^{r_p} \xrightarrow{d_p^E om} \ldots \xrightarrow{d_1^E om} B(K\,,E)^{r_0}$$

où $d_i^E = d_i \hat{\otimes}_\epsilon I_E$. On définit ainsi un complexe de fibrés $m^*B(K\,,\mathcal{L}.(E))$ sur [0,1] dont les fibres sont les $B(K\,,\mathcal{L}.(E))_t$ et qui est exact direct pour $t = 1$ donc sur un voisinage de 1 dans [0,1]. Notons Q le fibré localement trivial défini par

$$Q = \mathrm{coker}\,[m^*B(K\,,\mathcal{L}_1(E)) \to m^*B(K\,,\mathcal{L}_0(E))]$$

Soit alors f un élément de $H^{\circ}(K\,,\underline{B}_Y(E))$ tel que $\rho(f) = 0$; m^*f définit une section s de Q nulle pour $t < 1$ donc

$$f = s(1) = 0$$

et ρ est injective d'où (a), les autres assertions étant évidentes.

"Démontrons" (b) : on obtient l'injectivité de ρ en appliquant (a) à $Y = B(K\,,\underline{F})$. La démonstration de l'injectivité de ρ' est analogue à celle de (a).

3. B_K-MODULES LOCALEMENT PRIVILEGIES.

Cas particulier des faisceaux analytiques cohérents définis au voisinage de K.

On se propose de mettre en évidence le caractère local des notions introduites au § 2.

Remarques

1) Soit $\underline{Y}$ un $\underline{B}_K$-module localement K-privilégié 2.2 ; par définition tout point x de K possède un voisinage polycylindrique P tel que le B(P)-module $B(P) \underset{H^\circ(P, \underline{B}_K)}{\otimes} H^\circ(P, \underline{Y})$ est P-privilégié.

Il résulte donc de 2.4 que pour un tel polycylindre P et toute autre résolution $\underline{L}'.$ de $\underline{Y}$ sur P, le complexe $B(P, \underline{L}'.)$ est exact direct et tout point de P possède un système fondamental de voisinages $(P_n)_n$ où les P_n sont des polycylindres tels que $B(P_n, \underline{L}.)$ soit exact direct.

2) Soit $\underline{Y}$ un $\underline{B}_K$-module admettant localement des résolutions $\underline{B}_K$-libres finies. Il résulte facilement de la démonstration du théorème des matrices holomorphes inversibles donnée dans [1] et de la proposition 1.1 que $\underline{Y}$ admet une résolution $\underline{B}_K$-libre finie $\underline{L}.$ sur K telle que le complexe

$$H^\circ(K, \underline{L}.) \to H^\circ(K, \underline{Y}) \to 0$$

soit acyclique.

On munit $H^\circ(K, \underline{Y})$ de la topologie quotient de $H^\circ(K, L_o)$; elle ne dépend pas de la résolution choisie. Enfin $\underline{Y}$ étant cohérent sur $\overset{\circ}{K}$, $H^\circ(\overset{\circ}{K}, \underline{Y})$ est canoniquement muni d'une topologie de Fréchet.

THEOREME 3.1. – *Soit* $\underline{Y}$ *un* $\underline{B}_K$*-module admettant localement des résolutions libres finies. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *le morphisme de restriction*

$$H^\circ(K, \underline{Y}) \to H^\circ(\overset{\circ}{K}, \underline{Y})$$

est injectif continu.

ii) $H^\circ(K, \underline{Y})$ *est un* $B(\underline{K})$*-module privilégié et* $\underline{B}_{H^\circ(K,\underline{Y})}$-$\underline{Y}$

iii) $\underline{Y}$ *est un* $\underline{B}_K$*-module localement privilégié.*

iv) *pour tout* x *dans* K *il existe une résolution* $\underline{L}.$ *de* $\underline{Y}$ *au voisinage de* x *telle que* $\underline{L}.(\Pi_x(x))$ *soit acyclique en* x.

équivalence de i) et ii) : $H^\circ(\overset{\circ}{K}, \underline{Y})$ étant un Fréchet, il résulte de i) que $H^\circ(K, \underline{Y})$ est séparé donc privilégié d'après 2.5, d'où ii). La réciproque est une conséquence immédiate de la proposition 2.11. L'équivalence de ii) et iii) résulte de 2.5.

équivalence de iii) et iv) : Soit x un point de K ; on note

$$K' = \prod_{i \in I_x} K_i \qquad K'' = \prod_{i \notin I_x} K_i$$

et $x = (x', x'') \in K' \times K''$.

Montrons que iii) implique iv) : soit $\underline{L}.$ une résolution de $\underline{Y}$ sur un voisinage de x et $(P_n)_n$ un système fondamental de voisinages de x formé de polycylindres $P_n = P'_n \times P''_n$ tels que les complexes $B(P_n, \underline{L}.)$ soient exacts directs. On déduit alors de la proposition 2.8 que les complexes $B(P''_n, \underline{L}.(x'))$ sont exacts et iv) résulte alors du fait que

$$\underline{L}.(x')_{x''} = \lim_{\overrightarrow{n}} B(P''_n, \underline{L}.(x')).$$

Montrons que iv) implique iii) : soit $\underline{L}.$ une résolution de $\underline{Y}$ sur un voisinage $P = P' \times P''$ de x dans K telle que $\underline{L}.(x')$ soit une résolution du faisceau cohérent $\underline{Y}(x')_{|\overset{\circ}{P}''}$. Il résulte du théorème des voisinages privilégiés [1] l'existence d'un système fondamental (P''_n) des voisinages de x'' dans P'' tel que pour tout n, $B(P'', \underline{L}.(x'))$ soit exact direct.

L'assertion se déduit alors du lemme 2.9 appliqué au complexe de fibrés $B(P''_n, \underline{L}.)$ sur P'.

Remarque. – Si $\underline{Y}$ est localement K-privilégié, pour tout point x de K et toute résolution $\underline{L}.$ de $\underline{Y}$ au voisinage de x, $\underline{L}.(\pi_x(x))$ est acyclique.

Démonstration du théorème 2.3.

a) Y vérifie les hypothèses de 2.5, d'où l'équivalence de i) et ii).

Il résulte alors de 2.4 l'existence d'une résolution de $\underline{B}_Y$ sur K ; on déduit ensuite de 2.5 iii) que $\underline{B}_Y$ est localement K-privilégié et de 2.4 que $H^\circ(K, \underline{B}_Y) = Y$.

L'assertion b) résulte du théorème 3.1.

Cas des faisceaux analytiques cohérents. – Soit U un ouvert relativement compact contenant K et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur U. Pour tout entier p soit

$$K^{(p)} = \{x \in K \mid \text{Card } I_x \geqslant p\}$$

$K^{(1)} = K$ est la frontière topologique et $K^{(n)} = \ddot{K}$ la frontière distinguée. Soit

$$\underline{S}_p(\underline{F}) = \{x \in U \mid \text{prof}_x \underline{F} \leqslant p\}$$

On sait que $\underline{S}_p(\underline{F})$ est un sous-ensemble analytique de U de dimension $\leqslant p$.

Enfin on dit que $\underline{F}$ est localement K-privilégié si tout point de K possède un système fondamental de voisinages dans K formé de polycylindres privilégiés pour $\underline{F}$ au sens de [1].

Remarque. – Dans le cas du privilège L^2, compte tenu du N.B. du § 1, la démonstration des assertions ci-dessous est rigoureusement la même ; elle est laissée au lecteur. Si $\mathcal{O}^r \to \mathcal{O}^s \to \underline{F} \to 0$ est une présentation de $\underline{F}$ au voisinage de K on note

$$H(K, \underline{F}) = \text{coker}\,[H^0(K, \mathcal{H}^r_K) \to H^0(K, \mathcal{H}^s_K)]$$

THEOREME 3.2. – *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tout entier p, $0 \leqslant p \leqslant n$, on a*

$$S_p(\underline{F}) \cap K^{(p+1)} = \emptyset$$

ii) *pour tout x dans* K, $\underline{F}$ *est π_x-plat en x.*

iii) $\underline{F}$ *est localement* K-*privilégié.*

iv) K *est* $\underline{F}$-*privilégié.*

v) $\underline{B}_K \underset{\underline{O}_u}{\otimes} \underline{F}$ *est* K-*privilégié.*

vi) *le morphisme de restriction* $B(K, \underline{F}) \to H^0(\overset{\circ}{K}, \underline{F})$ *est injectif continu.*

vi') *le morphisme de restriction* $H(K, \underline{F}) \to H^0(\overset{\circ}{K}, \underline{F})$ *est injectif continu.*

vii) $B(K, \underline{F})$ *est séparé.*

vii') $H(K, \underline{F})$ *est séparé.*

Démonstration du théorème 3.2

A) Equivalence de i) et ii).

Il est évident que ii) implique i). La réciproque utilise le lemme suivant :

LEMME ([5], III 5). – *Soit* V *un ouvert de* $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$ *et* $\pi : V \to \mathbf{C}^p$ *la projection. Soit* $\underline{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* V *et* Z *l'ensemble analytique de non* π*-platitude de* $\underline{F}$. *Soit* $k \geqslant 0$.

On suppose que la profondeur de $\underline{F}$ *est supérieure à* $p + k$ *en tout point de* V. *Alors les fibres de* π_Z *sont de dimension strictement supérieure à* k *en chacun de leurs points.*

Montrons que i) implique ii). La démonstration se fait par récurrence descendante sur Card I_x. On déduit de i) que $\underline{F}$ est libre au voisinage de $K^{(n)}$, donc vérifie ii) pour tout point x de $K^{(n)}$.

Supposons ii) démontré pour tout point de $K^{(p+1)}$ et soit x vérifiant

$$\text{Card } I_x = p.$$

On note

$$K' = \prod_{i \in I_x} K_i \quad , \quad K'' = \prod_{i \notin I_x} K_i$$

et π au lieu de π_x. Soit s un élément de $K'^{(p)}$ et y un élément de $\{s\} \times K''$. Si Card I_y est supérieur ou égal à $(p + 1)$, on déduit de l'hypothèse de récurrence que $\underline{F}$ est Π_y-plat en y, donc a fortiori Π-plat. Par conséquent, si Z désigne le sous-ensemble de U de non Π-platitude de $\underline{F}$, la fibre de Z en s ne rencontre pas $K''^{(1)}$ et est donc de dimension au plus 0 dans K''. Il résulte alors de l'hypothèse et du lemme que Z ne rencontre pas $\{s\} \times K''$.

B) *Montrons que ii) implique iii)*

C'est une conséquence de "platitude et privilège" et du théorème d'existence des voisinages privilégiés [1]. En effet soit

$$x = (x', x'') \in K'^{(p)} \times \overset{\circ}{K}'' \subset C^p \times C^{n-p}.$$

$\underline{F}$ étant π_x-plat, pour tout polycylindre L'' contenu dans K'' et $\underline{F}(x')$-privilégié, il existe un voisinage V de x' tel que pour tout polycylindre L' contenu dans V, $L' \times L''$ soit $\underline{F}$-privilégié ([1] § 7 proposition 6).

C) *Démonstration de : iii) implique iv)*

LEMME 3.3. – *Si* K *est localement* $\underline{F}$*-privilégié, le* B(K)*-module* B(K , $\underline{F}$) *admet une résolution finie.*

En effet soit $\mathcal{L}.$ une résolution du faisceau $\underline{F}$ au voisinage de K ; il suffit de montrer que B(K , $\mathcal{L}.$) est exact. Compte tenu de la proposition 1.1 il suffit de montrer que le complexe $\underline{B}_K\mathcal{L}.$ est acyclique, ce qui résulte de l'hypothèse par un argument identique à celui du lemme 2.10 (α).

Il résulte alors de 2.5 appliqué au B(K)-module B(K , $\underline{F}$) que iii) implique iv).

L'équivalence de iv) --- vii) résulte du théorème 3.1.

D) *Démonstration de : vii) implique i).*

La démonstration se fait par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant trivial. Supposons donc le théorème vrai en dimension strictement inférieure à n. Quitte à restreindre U on se donne

$$\mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to \underline{F} \to 0$$

une présentation de $\underline{F}$ sur U. Soit $K = K' \times K'' \subset C \times C^{n-1}$ et a un point de $\overset{\circ}{K}'$. On déduit de l'assertion i) de la proposition 2.8 et de l'hypothèse de récurrence que, pour tout entier p

$$0 \leqslant p < n-1 \qquad S_p(\underline{F}(a)) \cap K''^{(p+1)} = \emptyset. \tag{1}$$

$$\underline{F}(a)\ (K'') \to B(K'', \underline{F}(a)) \text{ est injective.} \tag{2}$$

Nous allons montrer que $\underline{F}$ est pr_1-plat en tout point de $\{a\} \times K''$ et alors le théorème résulte de (1) et du fait que

$$\forall x \in \{a\} \times K'' \qquad \mathrm{prof}_x \underline{F} = \mathrm{prof}_x \underline{F}(a) + 1$$

Pour montrer que $\underline{F}$ est pr_1-plat en tout point de $\{a\} \times K''$, il suffit de montrer que $(z-a) \,.\, I_{\underline{F}(K)} : \underline{F}(K) \to \underline{F}(K)$ est injective. Soit donc $\widetilde{u}$ un élément non nul de $\underline{F}(K)$, montrons

$$(z-a)\ \widetilde{u} \neq 0.$$

Soit u un élément de $B(K, \mathcal{L}_0)$ déduit de $\widetilde{u}$; notons

$$f : B(K, \mathcal{L}_1) \to B(K, \mathcal{L}_0)$$

$$f_a : B(K'', \mathcal{L}_1(a)) \to B(K'', \mathcal{L}_0(a))$$

et u_a l'élément de $B(K'', \mathcal{L}_0(a))$ défini par u ; il résulte de (2) et du fait que $\widetilde{u}$ est non nul que u_a n'est pas dans $\operatorname{Im} f_a$. Puisque $\operatorname{Im} f_a$ est fermée, il existe un élément χ de $F^{\perp}$ nul sur $\operatorname{Im} f_a$ et tel que

$$\chi(u_a) \neq 0.$$

Soit alors $(h_n)_n$ une suite de $\mathcal{O}(K')$ convergeant dans $B(K')$ vers un élément h et telle que, au voisinage de a,

$$h_n(z) = 0(z-a)$$

$$h(z) = 0(\sqrt{z-a})$$

pour un détermination donnée de $\sqrt{z-a}$ sur K (*).

Il résulte de (2.8-iii) appliqué à χ et à h.u que h.u n'est pas dans $\operatorname{Im} f$. On ne peut donc avoir $(z-a)\widetilde{u} = 0$ car sinon la suite $(h_n u)_n$ serait dans $\operatorname{Im} f$ qui est fermée.

Et le théorème est démontré.

4. STRUCTURE FONCTEE SUR S × K ET PROPRIETE UNIVERSELLE DE LA GRASSMANIENNE G'_K

I. Structure fonctée associée à une B(K)-algèbre privilégiée.

DEFINITION 4.1. – *On appelle* B(K)*-algèbre privilégiée toute algèbre quotient de* B(K) *qui est un* B(K)*-module privilégié.*

(*) Par exemple, soit $(a_n)_n$ une suite convergeant vers a sur une demi-droite de CK ; on peut choisir une détermination de $\sqrt{z-a}$ et $\sqrt{z-a_n}$ sur K de sorte que $h_n(z) = \dfrac{z-a}{\sqrt{z-a_n}}$ réponde à la question.

Soit Y une B(K)-algèbre privilégiée ; on note $|Y|$ le support du faisceau $\underline{B}_Y$ et pour tout espace de Banach E et toute section f de $B_Y(E)$ on note $|f|$ l'application continue sous-jacente de $|Y|$ dans E.

Soit $B(K, \mathcal{L}.)$ une résolution de Y

$$B(K, \mathcal{L}.) : O \to B(K)^{r_p} \to \ldots \to B(K) \to Y \to O$$

le complexe $B(K, \mathcal{L}.)$ est exact direct ainsi que $B(K, \mathcal{L}.(E))$ pour tout espace de Banach E.

DEFINITION 4.2. – *Soit* U *un ouvert d'un espace de Banach* E. *Pour tout ouvert* V *de* K *on pose*

$$\underline{B}_Y(V, U) = \{f \in H^0(V, \underline{B}_Y(E)) \ ; \ |f| \ (|Y| \cap V) \subset U\}$$

et on appelle $\underline{B}_Y(U)$ *le faisceau d'ensembles ainsi défini.*

On se propose de montrer que l'on peut ainsi définir un foncteur $U \to \underline{B}_Y(U)$ sur la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques et à valeurs dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur K. La démonstration se fait comme dans ([1] § 3 n° 1) et utilise essentiellement le lemme suivant qui n'est qu'une variante de ([1] lemme 1 loc.cit.). Soit $f_1, \ldots, f_p$ un système de générateurs de l'idéal I tel que $Y = B(K)/I$; on note f l'élément $(f_1, \ldots, f_p)$ de $B(K)^p$.

LEMME 4.3. – *Soient* Ω *un ouvert de* $K \times C^p$ *contenant* $Y \times \{0\}$ *et* η *une application continue de* Ω *dans* E *qui est analytique sur* $\Omega \cap (\overset{\circ}{K} \times C^p)$ *et nulle sur* $K \times \{0\} \cap \Omega$.

Il existe un voisinage V *de* $|Y|$ *dans* K *tel que pour tout* x *dans* V $(x, f(x)) \in \Omega$ *et que la fonction* g *définie par* $g(x) = \eta\ (x, f(x))$ *ait une image nulle par la restriction*

$$H^0(V, \underline{B}_K(E)) \to H^0(V, \underline{B}_Y(E))$$

On définit ainsi un espace foncté $\underline{Y} = (|Y|, \underline{B}_Y(\ ))$ dit associé à la B(K)-algèbre privilégiée Y. On dit aussi que $\underline{Y}$ est un *espace foncté K-privilégié.* Enfin pour tout couple d'espaces fonctés $(\underline{Y}, \underline{Z})$ on note $MOR(\underline{Y}, \underline{Z})$ l'ensemble des morphismes d'espaces fonctés de $\underline{Y}$ dans $\underline{Z}$.

D'autre part tout espace de Banach est muni de sa structure fonctée canonique, et l'espace annelé associé à $\underline{Y}$ est $(|\underline{Y}|\ ,\ \underline{B}_Y)$.

PROPOSITION 4.5. – *Soit* Y *un espace foncté* K-*privilégié.*

a) *Pour tout espace de Banach* E *l'ensemble* $\mathrm{MOR}(\underline{Y}\ , E)$ *s'identifie à* $H^0(K\ , \underline{B}_Y(E))$.

b) *Si* E *est de dimension finie,* $\mathrm{MOR}(\underline{Y}\ , E)$ *est l'ensemble des morphismes d'espaces annelés de* $(|Y|\ \underline{B}_Y)$ *dans* E.

a) résulte de la définition des structures fonctées ; la démonstration est analogue à celle de ([1] § 3 n° 2 proposition 1).

b) montrons que $H^0(K\ , \underline{B}_Y(E))$ s'identifie à l'ensemble des morphismes d'espaces annelés de $(|Y|\ , \underline{B}_Y)$ dans E. Soit f un élément de $H^0(K\ , \underline{B}_Y(E))$; d'après 2.4 il se relève en un élément f de $B(K\ , E) = B(K) \hat{\otimes}_\epsilon E$. Cet élément f définit canoniquement un morphisme d'espaces annelés de $(K\ , \underline{B}_K)$ dans E et par restriction un morphisme $\varphi(f)$ de $\underline{Y}$ dans E.

L'application $\varphi\ :\ H^0(K\ , \underline{B}_Y(E)) \to \mathrm{MOR}(\underline{Y}\ , E)$ ainsi définie est bijective ; en effet soit $g = (g'\ , g'')\ :\ (|Y|\ , \underline{B}_Y(\mathcal{E}.)) \to (E\ , \underline{O}_E)$ un morphisme d'espaces annelés et soit $\psi(g)$ l'image de l'identité de E par

$$g''(E)\ :\ H^0(E\ , \underline{O}_E(E)) \to H^0(|Y|\ , \underline{B}_Y(E))$$

Puisque $(|Y|)\ , \underline{B}_Y)_{|\overset{\circ}{K}}$ est un espace analytique la restriction de $\psi(g)$ à $\overset{\circ}{K} \cap Y$ détermine le morphisme g sur $\overset{\circ}{K} \cap Y$ ([1] § 3 n° 2 proposition 1). Il résulte alors de 2.11 que

$$\psi\ :\ \mathrm{MOR}(\underline{Y}\ , E) \to H^0(K\ , \underline{B}_Y(E))$$

et φ sont deux bijections réciproques.

COROLLAIRE 4.6. – *Soit* $\underline{Y}$ *un espace foncté* K-*privilégié. Soient* E *et* F *daux espaces de Banach (resp. de dimension finie),* U *un ouvert de* E *et* $g\ :\ U \to F$ *une application analytique. Soit* $X = g^{-1}(0)$.

L'ensemble des morphismes de $\underline{Y}$ *dans* X *s'identifie à l'ensemble des morphismes (resp. des morphismes d'espaces annelés) de* $\underline{Y}$ *dans* U *tel que* $gof = 0$.

La démonstration est analogue à celle de ([1] § 3 n° 2 proposition 2). Par recollement on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.6'. — *Soient* Y *un espace foncté* K*-privilégié et* X *un espace analytique de dimension finie.* MOR(Y , X) *est l'ensemble des morphismes d'espaces annelés de* Y *dans* X.

II. Définition d'une structure fonctée canonique sur S x K.

Dans tout ce qui suit K est un polycylindre compact de C^n et $(S, \underline{O}_S)$ un espace analytique banachique. On sait étendre le foncteur $\underline{O}_S$ à la catégorie des espaces de Fréchet et applications linéaires continues ([4] § 7).

DEFINITION 4.7. — *Pour tout espace de* Banach E *on note* $\underline{B}_{S\times K}(E)$ *le préfaisceau sur* $S \times K$ *défini à partir de*

$$\underline{B}_{S\times K}(S' \times \mathring{L}, E) = \underline{O}_S(S', \underline{B}_K(\mathring{L}, E))$$

pour tout ouvert S' *de* S *et tout polycylindre* L *de* K , $\mathring{L}$ *désignant l'intérieur de* L *dans* K. *On note* $\underline{B}_{S\times K}$ *le préfaisceau d'algèbres* $\underline{B}_{S\times K}(C)$.

PROPOSITION 4.8.

i) *Le préfaisceau* $\underline{B}_{S\times K}(E)$ *est un faisceau.*

ii) $\forall q > 0 \quad H^q(\{s\} \times K, \underline{B}_{S\times K}(E)) = 0$.

iii) $\underline{O}_{S\times \mathring{K}}$ *est la restriction de* $\underline{B}_{S\times K}$ *à* $S \times \mathring{K}$.

Démonstration. — Soient L un polycylindre dans K et (L_n) une suite croissante de polycylindres compacts recouvrant $\mathring{L}$; alors

$$\underline{B}_K(\mathring{L}, E) = \varprojlim_n B(L_n, E)$$

les morphismes $B(L_n, E) \to B(L_{n-1}, E)$ étant denses, et par conséquent

$$\underline{O}_S(S', \underline{B}_K(\mathring{L}, E)) = \varprojlim_n \underline{O}_S(S', B(L_n, E)).$$

— L'assertion i) résulte alors du fait que $\underline{B}_K(E)$ est un faisceau, que pour tout L , $S' \to \underline{O}_S(S', \underline{B}_K(\mathring{L}))$ est un faisceau et de ([3] § 7 lemme 5).

– On démontre de même que les préfaisceaux $\underline{Q}^{p}_{S\times K}(E)$ définis à partir de

$$S' \times \mathring{L} \mapsto \underline{O}_S(S', \underline{Q}^p(\mathring{L}, E)) = \varprojlim_n \underline{O}_S(S' ; Q^p(L_n, E))$$

sont des faisceaux (les notations étant celles du § 1). Il résulte alors de l'assertion a) de la proposition 1.1 et de la suite exacte directe $Q^{\cdot}(K, E)$ une résolution fine $\underline{Q}^{\cdot}_{S\times K}(E)$ de $\underline{B}_{S\times K}(E)$ telle que le complexe $H^0(\{s\} \times K, \underline{Q}^{\cdot}_{S\times K}(E))$ soit exact, d'où ii).

– L'assertion iii) résulte du fait que pour tout polycylindre L contenu dans $\mathring{K}$ on a un diagramme commutatif canonique ([1] § 5).

$$\begin{tikzcd}
\underline{O}_{S\times C^n}(S \times L) \arrow[dd, "\text{res.}"'] \arrow[dr] & \\
& \underline{O}_S(S, B(L)) \arrow[dl] \\
\underline{O}_{S\times C^n}(S \times \mathring{L}) &
\end{tikzcd}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition.

D'autre part, à toute section f du faisceau $\underline{B}_{S\times K}(E)$ sur un ouvert W correspond une application sous-jacente $|f| = W \to E$. Alors pour tout ouvert U de E on note $\underline{B}_{S\times K}(U)$ le sous-faisceau d'ensembles de $\underline{B}_{S\times K}(E)$ formé des sections à valeurs dans U. En particulier pour tout ouvert S' de S et tout polycylindre L de K, on a

$$\underline{B}_{S\times K}(S' \times \mathring{L}, U) = \{f \in \underline{O}_S(S', \underline{B}_K(\mathring{L}, E)) \mid |f|(|S'|) \subset \underline{B}_K(\mathring{L}, U)\}.$$

Soit (L_n) une suite croissante de polycylindres telle que

$$\mathring{L} = \bigcup_n L_n$$

$(B(L_n, U))_n$ est un système projectif dans la catégorie des ouverts d'espaces de Banach, les flèches étant les restrictions ; on déduit alors de la structure fonctée de S un système projectif d'ensembles $(\underline{O}_S(S', B(L_n ; U))_n$ tel que

$$\underline{B}_{S\times K}(S' \times \mathring{L}, U) = \varprojlim_n \underline{O}_S(S', B(L_n, U))$$

Soient maintenant V un ouvert d'un espace de Banach F et

$\varphi : U \to V$ une application analytique. Il lui correspond un système projectif de morphismes

$$(B(L_n , U) \xrightarrow{\varphi_n} B(L_n , V))$$

dans la catégorie des ouverts d'espaces de Banach et applications analytiques, d'où un système projectif d'applications

$$(\underline{O}_S(S', B(L_n , U)) \xrightarrow{(\varphi_n)^*} \underline{O}_S(S', B(L_n , V))$$

et par conséquent une application

$$\varphi^* : \underline{B}_{S\times K}(S' \times \overset{\circ}{L} , U) \to \underline{B}_{S\times K}(S' \times \overset{\circ}{L} , V).$$

On montre alors aisément que $(S \times K , \underline{B}_{S\times K}(.))$ est une structure fonctée sur $S \times K$.

Remarques. – Soient $f : S \to T$ un morphisme d'espaces analytiques banachiques et E un espace de Banach. Pour tout polycylindre L dans K on a alors un morphisme

$$f_E : \underline{O}_T(B(L , E)) \to f_* \underline{O}_S(B(L , E))$$

d'où par passage aux limites projectives un morphisme de faisceaux

$$\underline{B}_{T\times K}(E) \to f_* \underline{B}_{S\times K}(E).$$

On associe ainsi canoniquement à f un morphisme d'espaces fonctés

$$\tilde{f} : (S \times K , \underline{B}_{S\times K}(.)) \to (T \times K , \underline{B}_{T\times K}(.))$$

– Enfin pour tout $\underline{B}_{S\times K}$-module de présentation finie $\underline{F}$ on note $\underline{F}_S$ ou $\tilde{f}^* \underline{F}$ le $\underline{B}_{S\times K}$-module image réciproque de $\underline{F}$ par f.

III. $\underline{B}_{S\times K}$-modules S-anaplats.

Soient K un polycylindre compact de $\mathbf{C}^n$ et S un espace analytique banachique. Pour tout $\underline{B}_{S\times K}$-module F de présentation finie èt tout point s de S on note $\underline{F}(s)$ le faisceau sur K tel que

$$\underline{F}(s)_x = \underline{F}_{s,x} \otimes_{\underline{B}_{S\times K,s,x}} \underline{B}_{K,x}$$

Enfin on note $B(K)^r_S$ le fibré trivial sur S de fibre $B(K)^r$.

DEFINITION 4.9. — *On dit qu'un* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{S\times K}}$*-module* $\underline{\mathrm{F}}$ *est* S*-anaplat en* (s, x) *s'il existe au voisinage de* (s, x) *une résolution* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{S\times K}}$*-libre finie* $\underline{\mathrm{L}}.$ *de* $\underline{\mathrm{F}}$ *pour laquelle* $\underline{\mathrm{L}}.(s)$ *est exact au voisinage de* x *et si le* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{K}}$*-module* $\underline{\mathrm{F}}(s)$ *est localement* K*-privilégié* (3.1) *en* x.

Alors pour toute résolution libre finie $\underline{\mathrm{L}}.$ de $\underline{\mathrm{F}}$, $\underline{\mathrm{L}}.(s)$ est exact au voisinage de x. De plus on remarque que si x est dans $\mathring{\mathrm{K}}$, $\underline{\mathrm{F}}$ est S-anaplat en (s, x) au sens de [1].

D'autre part il résulte du théorème des matrices holomorphes inversibles de H. Cartan généralisé dans ([1] § 3 théorème 2) que si $\underline{\mathrm{F}}$ admet localement des résolutions finies, $\underline{\mathrm{F}}$ admet des résolutions finies au voisinage de $\{s\} \times \mathrm{K}$.

Il résulte alors des théorèmes 2.5 et 3.1 que $\underline{\mathrm{F}}$ est S-anaplat au-dessus de s_0 si et seulement si il existe une résolution $\underline{\mathrm{L}}.$ de $\underline{\mathrm{F}}$ au voisinage de $\{s_0\} \times \mathrm{K}$ pour laquelle le complexe $\mathrm{H}^0(\mathrm{K}, \underline{\mathrm{L}}.(s_0))$ est exact strict. Ce complexe est alors exact direct et pour s assez voisin de s_0, $\underline{\mathrm{F}}$ est S-anaplat en s et les espaces de Banach $\mathrm{H}^0(\mathrm{K}, \underline{\mathrm{F}}(s))$ sont les fibres d'un fibré analytique banachique localement trivial sur S noté $\mathrm{B}(\mathrm{K}, \underline{\mathrm{F}})$.

PROPOSITION 4.10.

a) *Soient* $\underline{\mathrm{F}}$ *et* $\underline{\mathrm{G}}$ *deux* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{S\times K}}$*-modules* S*-anaplats,* $\underline{\mathrm{L}}. \to \underline{\mathrm{F}}$ *et* $\underline{\mathrm{M}}. \to \underline{\mathrm{G}}$ *deux résolutions de* $\underline{\mathrm{F}}$ *et* $\underline{\mathrm{G}}$ *sur un voisinage de* $\{s\} \times \mathrm{K}$. *Alors tout morphisme* $f : \underline{\mathrm{F}} \to \underline{\mathrm{G}}$ *se relève au voisinage de* $\{s\} \times \mathrm{K}$ *en un morphisme* $f. : \underline{\mathrm{L}}. \to \underline{\mathrm{M}}.$

b) *Si* $\underline{\mathrm{F}} \xrightarrow{f} \underline{\mathrm{G}} \xrightarrow{g} \underline{\mathrm{H}}$ *est un complexe de* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{S\times K}}$*-modules* S*-anaplats en* (s, x) *tel que*

$$\underline{\mathrm{F}}(s) \xrightarrow{f(s)} \underline{\mathrm{G}}(s) \xrightarrow{g(s)} \underline{\mathrm{H}}(s)$$

soit exact au voisinage de x *et si coker* $g(s)$ *est localement* K*-privilégié au voisinage de* x, *il existe un voisinage de* (s, x) *sur lequel* $\underline{\mathrm{F}} \xrightarrow{f} \underline{\mathrm{G}} \xrightarrow{g} \underline{\mathrm{H}}$ *est exact.*

c) *Pour tout morphisme* $f : \mathrm{T} \to \mathrm{S}$ *d'espaces analytiques banachiques et tout* $\underline{\mathrm{B}}_{\mathrm{S\times K}}$*-module* $\underline{\mathrm{F}}$ S*-anaplat,* $\tilde{f}^* \underline{\mathrm{F}}$ *est* T*-anaplat.*

— a) est une conséquence classique de l'assertion ii) de la proposition 4.8.

– Soit $\underline{L}.$ (resp. $\underline{M}.$, $\underline{N}.$) une résolution de $\underline{F}$ (resp. $\underline{G}$, $\underline{H}$) sur un voisinage de (s, x) de la forme $U \times P$ où P est un polycylindre privilégié pour $\underline{F}(s)$, $\underline{G}(s)$, $\underline{H}(s)$ et coker $g(s)$. On déduit des données et de a) un complexe

$$\underline{L}. \xrightarrow{f.} \underline{M}. \xrightarrow{g.} \underline{N}.$$

et il en résulte un complexe de fibrés banachiques

$$B(P, \underline{F}) \to B(P, \underline{G}) \to B(P, \underline{H}).$$

Ce complexe est exact direct en s donc sur un voisinage de s. On en déduit alors que

$$H^0(\{s\} \times P, \underline{F}) \to H^0(\{s\} \times P, \underline{G}) \to H^0(\{s\} \times P, \underline{H})$$

est exact ; l'assertion b) résulte alors de l'assertion ii) de la proposition 4.8 et du théorème A qui s'en déduit.

– c) résulte alors du fait que si $\underline{L}. \to \underline{F}$ est une résolution de $\underline{F}$ $\mathcal{F}^* \underline{L}.$ est acyclique d'après b).

IV. Structure fonctée associée à une $\underline{B}_{S \times K}$-algèbre S-anaplate.

Soient Y une $\underline{B}_{S \times K}$-algèbre S-anaplate et E un espace de Banach. Soient s un point de S et

$$\underline{B}^r_{S \times K} \xrightarrow{d} \underline{B}_{S \times K} \to Y \to O$$

un début de résolution Y sur un voisinage ouvert U de s. On déduit de d un morphisme de faisceaux de $\underline{B}_{S \times K}$-modules

$$d(E) : \underline{B}^r_{U \times K}(E) \to \underline{B}_{U \times K}(E)$$

et on note

$$\underline{B}_Y(E)_U = \text{coker } d(E).$$

Il résulte de la proposition 4.8 que les faisceaux ainsi définis au voisinage de chaque point de S ne dépendent pas des résolutions choisies et se recollent en un faisceau noté $\underline{B}_Y(E)$ sur $S \times K$ et concentré sur le support de Y. On démontre alors à l'aide d'un lemme analogue au lemme 4.3 que $\underline{Y} = (|Y|, \underline{B}(.))$ est une structure fonctée dite associée à la $\underline{B}_{S\times K}$-algèbre S-anaplate Y ; on dit aussi que l'espace foncté $\underline{Y}$ est S-anaplat.

V. K-fibrés privilégiés sur S.

4.11. – Soit Z un fibré analytique en B(K)-modules de Banach sur S. On dit que Z est K-*privilégié* si pour tout *s* dans S il existe un voisinage U de *s* et une résolution finie de Z sur U par des fibrés triviaux

$$(*)\ O \to B(K)_U^{r_p} \to \dots \to B(K)_U^{r_0} \to Z_U \to O$$

– Alors au voisinage de chaque point de S la suite (*) est scindée et Z est localement trivial.

Si $\underline{F}$ est un $\underline{B}_{S\times K}$-module S-anaplat le fibré $B(K, \underline{F})$ est K-privilégié. Réciproquement on se propose d'associer à tout fibré K-privilégié Z sur S un $\underline{B}_{S\times K}$-module S-anaplat. Compte tenu de (4.8) on a

$$\underline{O}_S(U, B(K)) = H^0(U \times K, \underline{B}_{S\times K})$$

et par conséquent, pour tout ouvert U de S sur lequel existe une résolution de Z du type (*), il correspond canoniquement à une telle résolution un complexe de $\underline{B}_{S\times K}$-modules

$$\underline{L}.\ :\ O \to \underline{B}_{S\times K}^{r_p} \to \dots \xrightarrow{d} \underline{B}_{S\times K}^{r_0}$$

défini sur U × K. Soit $\underline{F}$ = coker *d* ; il résulte du lemme ci-dessous que les faisceaux ainsi construits se recollent sur S × K.

LEMME.

i) *Le complexe* $\underline{L}$. *est acyclique sur* U × K.

ii) $\underline{F}$ *ne dépend que* Z_U.

iii) $\underline{F}$ *est* S-*anaplat.*

iv) $B(K, \underline{F}) = Z_U$.

Montrons i) : pour tout *s* dans U, $Z(s) = H^0(K, \underline{F}(s))$ est K-privilégié donc localement K-privilégié (2.4) ; tout point *x* de K possède donc un système fondamental de voisinage (L_n) formé de polycylindres dans K tels que $\underline{O}_{S,s}$ $(B(L_n , \underline{L}.(s)))$ soit exact. L'assertion i) résulte alors du fait que

$$\underline{L}._{s,x} = \varinjlim_{n} \underline{O}_{S,s} (B(L_n , \underline{L}.(s))).$$

Montrons ii) : par construction le faisceau sur U défini par $V \mapsto \underline{F}(V \times K)$ est le faisceau des sections analytiques de Z_U et ne dépend donc que de Z_U. On déduit alors ii) de (4.8 ii)) par un argument classique.

iii) est une conséquence immédiate de i) et du fait que Z est K-privilégié et iv) résulte alors des définitions.

– Enfin on remarque que si $\underline{F}$ est un $\underline{B}_{S\times K}$-module S-anaplat, le faisceau associé au fibré $B(K , \underline{F})$ est égal à $\underline{F}$. On a ainsi défini une correspondance biunivoque entre les fibrés K-privilégiés et les $\underline{B}_{S\times K}$-modules S-anaplats dont on montrerait aisément qu'elle est une équivalence de catégories ; en effet il résulte de la proposition 4.10 la proposition suivante :

PROPOSITION 4.12.

a) *Soient* Z *et* Z' *deux fibrés* K*-privilégiés sur* S *et* $\underline{L}.$ (*resp.* $L'.$) *une résolution de* Z (*resp.* Z') *sur un ouvert de* S. *Alors tout morphisme de fibrés* $f : Z \to Z'$ *se relève localement sur* S *en un morphisme* $f. : \underline{L}. \to \underline{L}'.$.

b) *Si* $Z = Z'$ *les résolutions* $\underline{L}.$ *et* $\underline{L}'.$ *sont homotopes.*

Enfin il résulte de la construction ci-dessus que si $f : T \to S$ est un morphisme d'espaces analytiques et Z un K-fibré privilégié sur S, si $\underline{F}$ désigne le $\underline{B}_{S\times K}$-module anaplat associé à Z, alors le fibré K-privilégié sur T associé à $\widetilde{f}^* \underline{F}$ est l'image réciproque f^*Z du fibré Z.

VI. Propriété universelle de la grassmanienne G_K^r.

Soit G_K^r l'espace analytique banachique des quotients séparés de $B(K)^r$ admettant une résolution finie donc directe d'après (2.3).

Cet espace est construit dans ([1] § 4).

Soit R_K le fibré canonique quotient du fibré trivial $B(K)^r_{G^r_K}$.

Ce fibré est K-privilégié (4.11) ; on note $\underline{R}_K$ le $\underline{B}_{G^r_K \times K}$-module G^r_K-anaplat associé à R_K.

Il résulte de ([1] § 8 n° 5) que pour tout espace analytique banachique S, les morphismes analytiques de S dans G^r_K sont en correspondance biunivoque avec les classes d'isomorphismes de K-fibrés privilégiés sur S.

On obtient donc le théorème suivant :

THEOREME 4.13. – *Pour tout espace analytique* S *et tout* $\underline{B}_{S\times K}$-*module* $\underline{F}$ S-*anaplat et quotient de* $\underline{B}_{S\times K}$, *il existe un morphisme unique* $f : S \to G^r_K$ *tel que*

$$\tilde{f}^* \underline{R}_K = \underline{F}$$

f *est l'unique morphisme tel que* $f^* R_K$ *soit le* K-*fibré privilégié associé à* $\underline{F}$.

En résumé pour tout espace analytique banachique S, on a correspondance biunivoque entre :

– les morphismes de S dans G^r_K,

– les classes d'isomorphismes de K-fibrés privilégiés sur S quotients de $B(K)^r_S$,

– les classes d'isomorphismes de $\underline{B}_{S\times K}$-modules S-anaplats et quotients de $\underline{B}^r_{S\times K}$.

5. L'ESPACE $\underline{\mathrm{MOR}}_S(Y, X)$

Dans tout ce paragraphe S est un espace analytique banachique.

DEFINITION 5.1. – *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme d'espaces analytiques banachiques. On dit que* X *est relativement de présentation finie au-dessus de* S *si pour tout* x *dans* X *il existe*

– *un voisinage ouvert* X' *de* x *dans* X,

– un voisinage ouvert S′ *de* $f(x)$,

– un ouvert U *de* $S' \times C^p$, *un morphisme* $h : U \to C^q$ *et un* S′-*isomorphisme de* X′ *sur* $h^{-1}(0)$.

On dit qu'un tel ouvert X′ *est un ouvert de coordonnées de* X.

Soient K un polycylindre compact de C^n et Y un sous-espace foncté S-anaplat de $S \times K$ associé à une $\underline{B}_{S\times K}$-algèbre $\underline{B}_Y$ (§ 4-IV). Soit $X \to S$ un espace relativement de présentation finie au-dessus de S.

On note $MOR_S(Y, X)$ l'ensemble des S-morphismes d'espaces fonctés de Y dans X.

Soit F_X le foncteur contravariant sur la catégorie des espaces analytiques au-dessus de S qui à tout $T \to S$ associe

$$F_X(T) = MOR_T(Y_T, X_T).$$

On se propose de montrer que ce foncteur est représentable.

I. Cas où $X = S \times C^p$.

Il résulte de la structure fonctée de Y que

$$MOR(Y, C^p) = H^0(|Y|, \underline{B}_Y)^p$$

de même

$$\forall s \in S \qquad MOR(Y(s), C^p) = H^0(K, \underline{B}_Y(s))^p$$

et est aussi l'ensemble des morphismes d'espaces annelés de $Y(s)$ dans C^p (4.5).D'autre part notons $B(K, Y)$ le S-fibré analytique banachique associé à Y et $\underline{H}_S(B(K, Y))$ le faisceau des sections de ce fibré.

PROPOSITION 5.2. – *Le* S-*fibré* $B(K, Y)^p$ *représente le foncteur* $F_{S\times C^p}$.

En effet soient s un point de S et

$$\underline{B}^r_{S\times K} \to \underline{B}_{S\times K} \to \underline{B}_Y \to O$$

un début de résolution de $\underline{B}_Y$ au voisinage de $\{s\} \times K$; il résulte de (4.8) que

$$H^0(\{s\} \times K , \underline{B}_Y) = \mathrm{coker}\ (\underline{O}_{S,s}(B(K)^r) \to \underline{O}_{S,s}(B(K))$$

On déduit alors de la suite exacte directe de fibrés banachiques

$$B(K)^r_S \to B(K)_S \to B(K , Y) \to O$$

que

$$H^0(\{s\} \times K , \underline{B}_Y) = \underline{H}_{S,s}(B(K , Y))$$

et par conséquent

$$\mathrm{MOR}(Y , C^p) = \mathrm{MOR}_S(S , B(K , Y)^p). \tag{1}$$

D'autre part, si $f : T \to S$ est un morphisme d'espaces analytiques banachiques, $f^* Y$ est T-anaplat (4.10) et

$$B(K , f^* Y) = f^* B(K , Y). \tag{2}$$

On déduit alors de (1) et (2) que

$$\begin{aligned} \mathrm{MOR}(Y_T , C^p) &= \mathrm{MOR}_T(T , B(K , f^* Y)^p) = \mathrm{MOR}_T(T , f^* B(K, Y)^p) \\ &= \mathrm{MOR}_S(T , B(K , Y)^p) \end{aligned} \tag{3}$$

d'où la proposition.

On note

$$m : Y_{B(K,Y)^p} \to C^p$$

le morphisme universel ; il correspond à l'identité de $B(K , Y)^p$ dans l'égalité (3) écrite pour $T = B(K , Y)^p$.

II. Cas où X est un ouvert de coordonnées.

Soit U un ouvert de $S \times C^p$. On note $B(K,Y,U)$ l'ouvert de S-fibré $B(K , Y)^p$ formé des couples (s , f) tels que

$$- s \in S$$

$$- f \in H^0(K , \underline{B}_Y(s)^p)$$

$$- |f| (|Y(s)|) \subset U(s)$$

Soit m_U la restriction du morphisme m au-dessus de $B(K , Y , U)$.

On déduit alors de (5.2) le

COROLLAIRE 5.3. – *Le couple* $(B(K, Y, U), m_U)$ *représente le foncteur* F_U.

Soient $h : U \to C^q$ un morphisme et $X = h^{-1}(0)$. Pour tout T, h induit une application

$$F_U(T) = MOR_T(Y_T, U_T) \to MOR_T(Y_T, T \times C^q) = F_{S\times C^q}(T)$$
$$f \to hof$$

On en déduit un morphisme de foncteurs $h : F_U \to F_{S\times C^q}$ et par conséquent un S-morphisme

$$h_* : B(K, Y, U) \to B(K, Y)^q.$$

Soit alors $\underline{MOR}_S(Y, X)$ l'espace analytique $h_*^{-1}(0)$; on note

$$m_X : Y \times_S \underline{MOR}_S(Y, X) \to X \times_S \underline{MOR}_S(Y, X)$$

le morphisme induit par m_U ; on déduit alors de (5.3) la

PROPOSITION 5.4. – *Le couple* $(MOR_S(Y, X), m_X)$ *représente le foncteur* F_X.

On remarque que compte tenu de (4.6) l'ensemble sous-jacent à l'espace $\underline{MOR}_S(Y, X)$ est l'ensemble des couples (s, f) où s est un point de S et f un morphisme d'espaces annelés de $Y(s)$ dans $X(s)$.

III. L'espace des petits morphismes.

Soit $X \xrightarrow{\pi} S$ un espace relativement de présentation finie au-dessus de S.

DEFINITION 5.5. – *Soit* $f : T \to S$ *un morphisme d'espaces analytiques ; on appelle petit morphisme de* Y_T *dans* X_T *tout* T*-morphisme* $g : Y_T \to X_T$ *tel que pour tout* t *dans* T, *l'image par* g *de* $Y(f(t))$ *soit contenue dans un ouvert de coordonnées de* X *(5.1). On note* $F_X^0(T)$ *leur ensemble.*

On définit ainsi un foncteur F_X^0 sur la catégorie des espaces analytiques au-dessus de S et on se propose de montrer que ce foncteur est représentable.

PROPOSITION 5.6. – *Soient* X_1 *et* X_2 *deux ouverts de coordonnées de* X ; *soient*

$$S_1 = \pi(X_1) \qquad S_2 = \pi(X_2).$$

i) *Si* X_1 *est contenu dans* X_2, *l'unique morphisme*

$$f : \mathrm{MOR}_{S_1}(Y_{S_1}, X_1) \to \mathrm{MOR}_{S_2}(Y_{S_2}, X_2)$$

tel que $f^* m_{X_1} = m_{X_2}$ *est un plongement ouvert.*

ii) $X_1 \cap X_2$ *est un ouvert de coordonnées de* X *au-dessus de* $S_1 \cap S_2$.

i) résulte de (5.4) : en effet soit M l'ouvert de $\mathrm{MOR}_{S_2}(Y_{S_2}, X_2)$ formé des couples (s, f) tels que $f(Y(s))$ soit contenu dans X_1 : on déduit de la propriété universelle de $\mathrm{MOR}_{S_1}(Y_{S_1}, X_1)$ un morphisme $g : M \to \mathrm{MOR}_{S_1}(Y_{S_1}, X_1)$ qui est réciproque de f.

ii) soient U un ouvert de $S \times \mathbf{C}^p$ et $i : X_1 \to U$ un plongement fermé ; soit V un ouvert de U tel que $i^{-1}(V) = X_1 \cap X_2$; i induit un plongement fermé de $X_1 \cap X_2$ dans V.

Soit maintenant $\mathfrak{X}$ la famille des ouverts de coordonnées de X. On pose

$$|M_S^0(Y, X)| = \bigcup_{\substack{X' \in \mathfrak{X} \\ S' = \pi(X')}} |\mathrm{MOR}_{S'}(Y_{S'}, X')|$$

Il résulte de (5.5) que les structures analytiques des espaces $\underline{\mathrm{MOR}}_{S'}(Y_{S'}, X')$ se recollent sur $|M_S^0(Y, X)|$ ainsi que les morphismes $m_{X'}$.

On note $M_S^0(Y, X)$ l'espace universel obtenu, Z_S^0 l'espace foncté $M_S^0(Y, X)$-anaplat image réciproque de Y par le morphisme canonique $M_S^0(Y, X) \to S$ et $m_X : Z_S^0 \to M_S^0(Y, X) \times_S X$ le petit morphisme obtenu en recollant les $m_{X'}$. Il résulte alors de (5.4) et de (5.6) que le couple $(M_S^0(Y, X), m_X)$ représente le foncteur F_X^0.

On a donc la

PROPOSITION 5.7. – *Soient* $T \to S$ *un morphisme d'espaces analytiques et* $f : Y_T \to X_T$ *un petit morphisme. Il existe un* S*-morphisme unique.*

$$g : T \to M_S^0(Y, X)$$

tel que

$$g^* m_X = f.$$

IV. Cuirasses Y-privilégiées.

Soit K un polycylindre et Y un $\underline{B}_K$-module privilégié. On appelle cuirasses Y-privilégiées de K la donnée de

– un ensemble fini d'indices I et deux familles (K_i) et (K_i') indexées sur I de polycylindres Y-privilégiés dans K,

– pour tout couple (i, j) de $I \times I$ une famille finie $(K_{ija})_{a \in A_{ij}}$ de polycylindres Y-privilégiés tels que

a) $\forall i \in I \qquad K_i' \subset \overset{\circ}{K}_i$

b) $K = \bigcup_{i \in I} K_i'$

c) pour tout (i, j) on a

$$K_i' \cap K_j' \subset \bigcup_{a \in A_{ij}} \overset{\circ}{K}_{ija} \subset K_i \cap K_j$$

Soient maintenant S un espace analytique banachique, $\underline{Y}$ un espace foncté S-anaplat et Q une cuirasse de K. L'ensemble S_1 des points s de S pour lesquels Q est $Y(s)$-privilégiée est un ouvert de S.

Pour tout i, j, a on note

$$Y_i = \underline{Y}_{|S_1 \times K_i} \qquad Y_i' = \underline{Y}_{|S_1 \times K_i'}$$

$$Y_{ija} = \underline{Y}_{|S_1 \times K_{ija}}$$

Z_i° l'espace $M_S^0(Y_i, X)$-anaplat universel et $m_i : Z_i^0 \to X \times_S M_S^0(Y_i, X)$ le petit morphisme universel. On définit de même $Z_I'^0, m_i', \ldots$

On déduit alors de la proposition 6.1 des morphismes

$$h_0^i : M_S^0(Y_i , X)_{|S_1} \to \prod_{j,a} M_S^0(Y_{ija} , X)_{|S_1}$$

$$h_1^i : M_S^0(Y_i , X)_{|S_1} \to \prod_{j,a} M_S^0(Y_{jia} , X)_{|S_1}$$

tels que

$$(p_{j,a}^r . h_0^i)^* m_{ija} = m_i \qquad \text{au dessus de } S_1 \times K_{ija}$$

ainsi que les égalités analogues avec h_1^i. Soit alors $\underline{M}^Q$ le noyau de la double flèche

$$(\prod_i h_0^i , \prod_i h_1^i) : \prod_{i \in I} M_S^0(Y_i , X) \rightrightarrows \prod_{i,j,a} M_S^0(Y_{ija} , X)$$

et soit $\underline{Z}$ l'image réciproque de $\underline{Y}$ par le morphisme canonique $\underline{M}^Q \to S$.

Il résulte alors de la construction ci-dessus que les morphismes $m_{i|Y_i'}$ se recollent en un petit $\underline{M}^Q$-morphisme

$$\underline{m} : \underline{Z} \to \underline{M}^Q \times_S X.$$

DEFINITION 5.8. – *Soient* T *un espace analytique au-dessus de* S *et* $f : \underline{Y}_T \to X_T$ *un* T*-morphisme. On dit que* f *est petit relativement à* Q *si pour tout* t *dans* T, Q *est* $Y_T(t)$*-privilégié et si pour tout* i *dans* I *l'image par* f *de* $\underline{Y}_T(t) \cap K_i$ *est contenue dans un ouvert de coordonnées de* X.

Soit M_1 l'ensemble des points t de $\underline{M}^Q$ tels que Q soit $\underline{Z}(t)$-privilégiée ; c'est un ouvert de $\underline{M}^Q$ et la restriction de $\underline{m}$ à M_1 définit un morphisme petit relativement à Q

$$m_1 : \underline{Z}_{|M_1} \to M_1 \times_S X.$$

LEMME 5.9. – *Pour tout espace analytique* T *au-dessus de* S_1 *et tout morphisme* $f : \underline{Y}_T \to X_T$ *petit relativement à* Q, *il existe un morphisme canonique* $\varphi(f) : T \to M_1$ *tel que*

a) $\varphi(f)^* m_1 = f$

b) *pour tout morphisme* $k : T' \to T$

$$\varphi(f_{T'}) = \varphi(f) \circ k$$

Pour tout i dans I, on déduit de la proposition 5.7 un morphisme $\varphi_i(f) : T \to M^0_S(Y_i, X)$; le morphisme $\prod_i \varphi_i(f)$ se factorise en un morphisme $\varphi(f) : T \to M_1$ d'où a). L'assertion b) résulte de la fonctorialité des $\varphi_i(f)$.

V. Une cure d'amaigrissement pour M_1.

(Méthode éprouvée et infaillible dûe à ([1] § 9) dont nous suivons scrupuleusement le mode d'emploi !)

En appliquant le lemme (5.9) au cas où $T = M_1$ et où f est l'identité de $\underline{Z}_{M_1}$, on obtient un morphisme $\theta : M_1 \to M_1$ tel que $\theta \circ \theta = \theta$ et que pour tout T-morphisme petit relativement à Q $f : Y_T \to X_T$ on ait

$$\varphi(f) = \theta \circ \varphi(f).$$

Soit alors M^Q le noyau de la double flèche

$$(\theta , I_{M_1}) : M_1 \rightrightarrows M_1 .$$

De plus on déduit de $\underline{Z}$ et de $\underline{m}$ un espace M^Q-anaplat Z^Q et un morphisme $m^Q : Z^Q \to M^Q \times_S X$ petit relativement à Q. Le triplet (M^Q , Z^Q , m^Q) est universel ; plus précisément on a :

PROPOSITION 5.10. – *Pour tout espace analytique* T *au-dessus de* S *et tout* T-*morphisme* $f : \underline{Y}_T \to X_T$, *petit relativement à* Q *il existe un* S-*morphisme unique* $\varphi : T \to M^Q$ *tel que*

$$\varphi^* m^Q = f.$$

VI. Construction de l'espace universel $MOR_S(\underline{Y} , X)$.

LEMME 5.11. – *Pour tout* S-*morphisme* $f : \underline{Y} \to X$ *et tout point* s *de* S *il existe une cuirasse* Q *de* K *et un voisinage* S_1 *de* s *dans* S *tel que* $f_{|S_1}$ *soit petit relativement à* Q.

La démonstration est immédiate compte tenu de (2.3).

Il résulte donc du lemme (5.11) que l'ensemble $\mathrm{MOR}_S(\underline{Y}, X)$ est la réunion des ensembles sous-jacents aux espaces M^Q pour toute cuirasse Q. On déduit alors de la proposition (5.10) l'existence et l'unicité :

– d'un espace analytique banachique $\underline{\mathrm{MOR}}_S(\underline{Y}, X)$ au-dessus de S

– d'un morphisme $\mathcal{M} : y \to \underline{\mathrm{MOR}}_S(\underline{Y}, X) \times_S X$

où y désigne l'image réciproque de $\underline{Y}$ par le morphisme canonique $\underline{\mathrm{MOR}}_S(\underline{Y}, X) \to S$, tels que pour toute cuirasse Q, $|M^Q|$ soit ouvert dans $\underline{\mathrm{MOR}}_S(\underline{Y}, X)$ et que

$$(\underline{\mathrm{MOR}}_S(\underline{Y}, X), y, \mathcal{M})_{|\,|M^Q|} = (M^Q, Z^Q, m^Q).$$

Il est clair que le triplet $(\underline{\mathrm{MOR}}_S(\underline{Y}, X), y, \mathcal{M})$ représente le foncteur F_X. On a donc le théorème suivant :

THEOREME 5.12. – *Pour tout espace analytique* T *au-dessus de* S *et tout* T-*morphisme* $f : \underline{Y}_T \to X_T$, *il existe un* S-*morphisme unique* $h : T \to \underline{\mathrm{MOR}}_S(Y, X)$ *tel que*

$$h^* \mathcal{M} = f.$$

En particulier on a

$$F_X(T) = \mathrm{MOR}_T(\underline{Y}_T, X_T) = \underline{\mathrm{MOR}}_S(T, \underline{\mathrm{MOR}}_S(\underline{Y}, X))$$

VII. L'espace universel $\underline{M}_S(K, X)$.

Soit S un espace analytique banachique et X un espace analytique au-dessus de S relativement de présentation finie. Soient G_K la grassmannienne des quotients séparés de B(K) admettant une résolution finie et $\underline{R}_K$ l'espace foncté G_K-anaplat universel (§ 5). On pose

$$\underline{M}_S(K, X) = \underline{\mathrm{MOR}}_{S\times G_K}, (S \times \underline{R}_K, X \times G_K)$$

et on note y_X et $\mathcal{M}_X$ l'espace et le morphisme universels associés à $\underline{M}_S(K, X)$. On déduit alors de la propriété universelle de (G_K, R_K) (4.12) et de (5.12) le théorème suivant.

THEOREME 5.13. – *Pour tout morphisme d'espaces analytiques* $h : T \to S$, *tout sous-espace foncté* $\underline{Y}$ *de* $T \times K$ *et tout* T-*morphisme* $f : \underline{Y} \to X_T$ *il existe un S-morphisme unique*

$$k : T \to M_S(K, X)$$

tel que

$$k^* y_X = \underline{Y}$$

$$k^* \mathcal{M}_X = f$$

En effet soit $h_1 : T \to G_K$ le morphisme tel que

$$h_1^* \underline{R}_K = \underline{Y}.$$

Alors le morphisme $(h, h_1) : T \to S \times \underline{G}_K$ fait de T un espace au-dessus de $S \times G_K$. Il suffit donc d'appliquer le théorème (5.12) au triplet $(T, \underline{Y}, f)$.

Remarque. – L'ensemble sous-jacent à l'espace $\underline{M}_S(K, X)$ est l'ensemble des triplets (s, Y, f) où s est un point de S, Y un sous-espace privilégié de K (§ 4.I) et f un morphisme d'espaces annelés (4.5) de Y dans $X(s)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. DOUADY, Le problème des modules, *Ann. Inst. Fourier,* 16,1, (1966), 1-95.

[2] A. DOUADY, Platitude et privilège, *L'enseignement Mathématique,* Monographie n° 17.

[3] R. DOUADY, Petites perturbations d'une suite exacte, *Séminaire Nice,* 1966.

[4] DOUADY, FRISCH, HIRSCHOWITZ, Recouvrements privilégiés, *Ann. Inst. Fourier,* 22,4 (1972), 59-96.

[5] FRISCH, GUENOT, Prolongements de faisceaux analytiques cohérents, *Invent. Math.,* 7 (1968).

[6] H. CARTAN, Faisceaux analytiques cohérents, *Cours C.I.M.E.*, (1963).

[7] G. POURCIN, Polycylindres privilégiés, *C.R. Acad. Sc.*, t. 272, 795-798.

[8] G. POURCIN, Déformations de singularités isolées, *Astérisque* n° 16.

[9] G. POURCIN, Théorème de Douady au-dessus de s, *Ann. Sci. Norm. Sup. di Pisa*, XXIII, III (1969).

Manuscrit reçu le 22 mars 1974
accepté par B. Malgrange.

Geneviève POURCIN,
411 Prado – E7
13008 – Marseille.