ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES CHAUMAT

Adhérence faible étoile d'algèbres de fractions rationnelles

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 4 (1974), p. 93-120

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_93_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 93-120.

ADHÉRENCE FAIBLE ÉTOILE D'ALGÈBRES DE FRACTIONS RATIONNELLES

par Jacques CHAUMAT

Introduction.

Étant donnés un compact K du plan complexe **C** et une mesure μ non nulle sur K, on se propose de décrire dans ce papier $H^\infty(\mu)$: adhérence faible étoile [i.e. adhérence pour la topologie $\sigma[L^\infty(\mu), L^1(\mu)]$] dans $L^\infty(\mu)$ de l'algèbre R(K) des limites uniformes sur K de suites de fractions rationnelles d'une variable complexe à pôles hors de K. Plus précisément on montrera, entre autres choses, les résultats suivants :

Résultat 1. — Pour toute mesure μ non nulle, orthogonale à R(K), il existe un sous-ensemble E_μ de **C** non vide, mesurable Lebesgue tel que $H^\infty(\mu)$ soit isométriquement isomorphe à $H^\infty(\lambda_{E_\mu})$ où λ_{E_μ} désigne la restriction à E_μ de la mesure de Lebesgue plane λ.

Résultat 2. — Pour toute mesure μ non nulle sur K, il existe un sous-ensemble E_μ de **C** éventuellement vide, mesurable Lebesgue, et une mesure μ_s absolument continue par rapport à μ éventuellement nulle tels que $H^\infty(\mu)$ soit isométriquement isomorphe à $H^\infty(\lambda_{E_\mu}) \oplus L^\infty(\mu_s)$.

Résultat 3. — Si R(K) est une algèbre de Dirichlet sur la frontière topologique de K, pour toute mesure non nulle sur K il existe un ouvert de **C**, E_μ, éventuellement vide et une mesure μ_s absolument continue par rapport à μ éventuellement nulle tels que $H^\infty(\mu)$ soit isométriquement isomorphe à $H^\infty(E_\mu) \oplus L^\infty(\mu_s)$, où $H^\infty(E_\mu)$ désigne l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans E_μ.

Le point de départ de cette étude est contenu dans un théorème de L. Brown, A. Shields et K. Zeller [B_2 théorème 3] qui donne en substance le résultat suivant :

Si K est le disque unité $\overline{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1\}$ et μ est une mesure portée par une suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} |\alpha_n| = 1$, $H^\infty(\mu)$ est isométriquement isomorphe à $H^\infty(D)$ si et seulement si pour toute fonction f de $H^\infty(D)$ on a : $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} |f(\alpha_n)| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$. Dans le cas contraire, on a $H^\infty(\mu) = L^\infty(\mu)$.

Le travail s'organise de la manière suivante :

0. *Préliminaires.* A une mesure orthogonale à $R(K)$ non nulle on associe certains ensembles, en particulier l'ensemble E_μ du résultat 1. On étudie [lemme 00] brièvement leurs propriétés. Cela permet de donner l'énoncé d'un théorème [théorème 01] précisant le résultat 1.

1. *L'algèbre* $\overline{R}_\mu$. On définit une algèbre uniforme sur $\overline{E}_\mu$ l'adhérence de E_μ : l'algèbre $\overline{R}_\mu$ et on montre qu'elle a par rapport à l'ensemble E_μ des propriétés analogues à celles dont jouit $R(K)$ par rapport à l'ensemble Q des points non pics de K pour $R(K)$. En particulier, on donne pour $\overline{R}_\mu$ et E_μ un théorème de type A. M. Davie [D_1].

2. *L'algèbre* $H^\infty(\mu)$ *pour une mesure orthogonale.* On démontre le résultat 1 à l'aide des propriétés de l'algèbre $\overline{R}_\mu$, et obtient une caractérisation des fonctions de $\overline{R}_\mu$ en utilisant des travaux de T. W. Gamelin et J. Garnett [G_2].

3. *L'ensemble* C_μ. Pour une mesure orthogonale on donne une propriété de l'ensemble C_μ des points de $\mathbf{C}$ où la transformée de Cauchy de μ converge et n'est pas nulle, relativement à l'algèbre $H^\infty(\mu)$. [Théorème 01 et théorème 30.]

4. *L'algèbre* $H^\infty(\mu)$ *dans le cas général.* On démontre le résultat 2 et obtient le fait que $\overline{R}_\mu$ est dense de manière

ponctuelle bornée dans $H^\infty(\mu)$ [théorème 46] en utilisant la théorie des A-mesures selon B. Cole.

5. *Quelques exemples.* On démontre le résultat 3 et retrouve des résultats de D. Sarason [S_1] sur l'adhérence faible étoile des polynômes d'une variable complexe. [La méthode de démonstration est analogue bien que les travaux aient été conduits indépendamment.] On justifie ensuite à l'aide d'un exemple l'introduction de l'algèbre $\overline{R}_\mu$ dans la théorie générale.

6. *Appendice. Ensembles essentiel et inessentiel dans le spectre de* $H^\infty(\mu)$. On donne dans le cadre des algèbres uniformes sur des compacts métrisables une interprétation du résultat 2 à l'aide des notions d'ensembles essentiel et inessentiel [L].

N. B. — Dans tout ce papier, une mesure sera toujours une mesure borélienne régulière bornée à support compact.

0. Préliminaires.

Soit

— K un compact du plan complexe $\mathbf{C}$ tel que l'algèbre R(K) soit différente de l'algèbre C(K) des fonctions continues sur K. Étant donnée une mesure μ non identiquement nulle orthogonale à R(K) on note :

— E_μ le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ formé des points x ayant une mesure représentative μ_x réelle ou complexe pour R(K) [i.e. pour tout f de R(K) on a $f(x) = \int f\, d\mu_x$] absolument continue par rapport à μ et vérifiant $\mu_x\{x\} = 0$,

— C_μ le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ formé des points où la transformée de Cauchy $\hat{\mu}$ de μ existe et n'est pas nulle

$$\left[\text{i.e. } \int \frac{1}{|z-x|}\, d|\mu|(z) < +\infty \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(x) = \int \frac{1}{z-x}\, d\mu(z) \neq 0\right],$$

— S_μ le support de μ.

Lemme 00. — *a*) $C_\mu \subset E_\mu \subset K$;

b) *l'adhérence* $\overline{C}_\mu$ *de* C_μ *dans* $\mathbf{C}$ *contient* S_μ;

c) E_μ *est mesurable Lebesgue, de densité* 1 *en chacun de ses points.*

Démonstration. — Les propositions *a)* et *b)* sont bien connues : voir la section 8 du chapitre II de [G_1]. Pour démontrer la proposition *c)* on peut, tout d'abord, en utilisant la démonstration du théorème 2 dans [B_1] voir que, pour chaque x de E_μ, il existe un ensemble mesurable-Lebesgue de densité 1 au point x inclus dans E_μ. On peut alors facilement en déduire le fait que E_μ est mesurable Lebesgue [c.q.f.d.].

Remarquons que le lemme 00 donne trivialement le fait que C_μ et E_μ ne sont pas vides.

Considérons une fonction f de $H^\infty(\mu)$ et un point x de E_μ. Pour toute mesure μ_x réelle ou complexe représentative de x pour $R(K)$ et absolument continue par rapport à μ, on peut calculer $\int f\, d\mu_x$. Il est clair que cette intégrale ne dépend pas de la mesure choisie et que l'application de $H^\infty(\mu)$ dans $\mathbf{C}$ définie par $\hat{f}(x) = \int f\, d\mu_x$ est un homomorphisme de $H^\infty(\mu)$ dans $\mathbf{C}$. On a alors le théorème suivant qui contient le résultat 1.

THÉORÈME 01. — *L'application* T *définie par* $T(f) = \hat{f}$ *est un isomorphisme isométrique* de $H^\infty(\mu)$ *sur* $H^\infty(\lambda_{E_\mu})$. *Pour toute fonction* f *de* $H^\infty(\mu)$ *on a :* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in C_\mu} |\hat{f}(x)|$.

La première assertion du théorème sera démontrée dans 2, 1 étant consacré à l'introduction d'une algèbre de fonctions jouant un rôle essentiel dans la démonstration. La deuxième assertion du théorème sera démontrée dans 3.

[N. B. — Dans la suite, pour un point x de E_μ, μ_x désignera toujours une mesure complexe ou réelle représentative de x pour $R(K)$, absolument continue par rapport à μ, et vérifiant $\mu_x\{x\} = 0$.]

1. L'algèbre $\overline{R}_\mu$.

On note : R_μ l'ensemble des fonctions g d'une variable complexe de la forme $g(z) = \int \frac{g^*(x)}{x - z} d\lambda(x)$ où g^* appartient à l'ensemble $B(E_\mu)$ des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbf{C}$, à support compact, nulles λ_{E_μ} presque partout. (Rappelons que λ désigne la mesure de Lebesgue plane.)

C'est un ensemble de fonctions continues sur $\mathbf{C}$, nulles à l'infini. On note : $\overline{R}_\mu$ la fermeture de R_μ pour la norme de la convergence uniforme sur $\overline{E}_\mu$, l'adhérence de E_μ dans $\mathbf{C}$.

Le résultat clef de ce paragraphe pour la suite de ce travail est le corollaire 18; on l'obtient en montrant qu'on peut appliquer ici un argument de A. M. Davie $[D_1]$.

LEMME 10. — *$\overline{R}_\mu$ est une algèbre uniforme sur $\overline{E}_\mu$ qui contient $R(\overline{E}_\mu)$. Toute fonction de $\overline{R}_\mu$ est analytique dans l'intérieur de E_μ.*

Démonstration. — La seule chose non tout à fait évidente est le fait que $\overline{R}_\mu$ soit une algèbre, ce qui se voit aisément comme dans le lemme 11 chapitre V de $[G_4]$ [c.q.f.d.].

LEMME 11. — *a) $\overline{R}_\mu$ est inclus dans $H^\infty(\mu)$;*

b) pour toute fonction f de $\overline{R}_\mu$, tout point x de E_μ et toute mesure μ_x on a : $f(x) = \int f\, d\mu_x$.

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de montrer *a*) et *b*) pour les fonctions de R_μ. Pour démontrer la proposition *a*), remarquons tout d'abord que, si ν est une mesure orthogonale à $R(K)$ et absolument continue par rapport à μ, on a que $\hat{\nu}(x)$, la transformée de Cauchy de ν, existe et s'annule λ presque partout en dehors de E_μ; alors pour toute fonction g de R_μ on a :

$$\int g(z)\, d\nu(z) = \iint \frac{g^*(x)}{x - z}\, d\lambda(x)\, d\nu(z)$$
$$= -\int g^*(x)\hat{\nu}(x)\, d\lambda(x) = 0 \quad \text{[c.q.f.d.]}.$$

La démonstration de *b*) est une conséquence immédiate de la proposition suivante; elle est laissée au lecteur.

Proposition 12. — *Pour tout* x_0 *n'appartenant pas à* E_μ, *tout* x *appartenant à* E_μ *et toute mesure* μ_x *tels que :*

$$\int \frac{1}{|z - x_0|} d|\mu_x|(z) < +\infty,$$

on a : $\displaystyle\int \frac{1}{z - x_0} d\mu_x(z) = \frac{1}{x - x_0}.$

Démonstration. — La mesure $(z - x)\mu_x(z)$ est une mesure orthogonale à $R(K)$, absolument continue par rapport à μ. Donc

$$\int \frac{z - x}{z - x_0} d\mu_x(z) = \widehat{(z - x)\mu_x(z)}(x_0) = 0$$
$$= \int \frac{z - x_0 + x_0 - x}{z - x_0} d\mu_x(z) = 1 + (x_0 - x) \int \frac{1}{z - x_0} d\mu_x(z)$$

[c.q.f.d.].

Lemme 13. — *Pour toute fonction* f *de* $\overline{R}_\mu$ *et toute fonction* h *borélienne bornée sur* $\mathbf{C}$ *à support compact, si* $\tilde{f}$ *désigne un prolongement borélien borné de* f *à* $\mathbf{C}$, *la fonction* F *définie sur* $\mathbf{C}$ *par :* $F(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbf{C}} h(z) \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(\xi)}{z - \xi} d\lambda(z)$ *appartient à* $\overline{R}_\mu$.

Démonstration. — On a

$$F(\xi) = \int_{E_\mu} h(z) \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(\xi)}{z - \xi} d\lambda(z) + \int_{\mathbf{C}\setminus E_\mu} \frac{h(z)\tilde{f}(z)}{z - \xi} d\lambda(z)$$
$$- \tilde{f}(\xi) \int_{\mathbf{C}\setminus E_\mu} \frac{h(z)}{z - \xi} d\lambda(z).$$

Clairement les deux derniers termes de cette somme sont des fonctions de $\overline{R}_\mu$. Il suffit donc de montrer que la fonction F^1 définie sur $\mathbf{C}$ par $F^1(\xi) = \displaystyle\int_{E_\mu} h(z) \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(\xi)}{z - \xi} d\lambda(z)$ appartient à $\overline{R}_\mu$.

Il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de R_μ qui converge uniformément vers f sur $\overline{E}_\mu$. Clairement, la suite de fonctions $\{G_n^1\}_{n\in\mathbf{N}}$, où G_n^1 désigne pour tout entier n la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par $G_n^1(\xi) = \displaystyle\int_{E_\mu} h(z) \frac{g_n(z) - g_n(\xi)}{z - \xi} d\lambda(z)$, converge uniformément sur $\overline{E}_\mu$ vers F^1.

Or

$$\mathrm{G}_n^1(\xi) = \int_{\mathrm{E}_\mu} h(z) \frac{\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \frac{g_n^*(t)}{t-z}\, d\lambda(t) - \int_{\mathrm{C}} \frac{g_n^*(t)}{t-\xi}\, d\lambda(t)}{z-\xi}\, d\lambda(z)$$

$$= \int_{t\in\mathrm{C}} \int_{z\in\mathrm{E}_\mu} \frac{h(z) g_n^*(t)}{(z-t)(\xi-t)}\, d\lambda(t)\, d\lambda(z)$$

$$= \int_{\mathrm{C}} \frac{\displaystyle g_n^*(t) \int_{\mathrm{E}_\mu} \frac{h(z)}{z-t}\, d\lambda(z)}{\xi - t}\, d\lambda(t),$$

et la fonction k_n^* définie sur $\mathbf{C}$ par

$$k_n^*(t) = g_n^*(t) \int_{\mathrm{E}_\mu} \frac{h(z)}{z-t}\, d\lambda(z)$$

appartient à $\mathrm{B}(\mathrm{E}_\mu)$, donc la fonction G_n^1 est dans R_μ; en conséquence la fonction F^1 est dans $\overline{\mathrm{R}}_\mu$ [c.q.f.d.].

Lemme 14. — *Si f est une fonction de R_μ prolongeable analytiquement dans un voisinage d'un point z_0 de $\overline{\mathrm{E}}_\mu$, la fonction h définie sur $\overline{\mathrm{E}}_\mu$ par $h(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ pour $z \neq z_0$, et $h(z_0) = f'(z_0)$ appartient à R_μ.*

Démonstration. — La fonction f s'écrit $f(z) = \displaystyle\int \frac{f^*(x)}{x-z}\, d\lambda(x)$ avec f^* dans $\mathrm{B}(\mathrm{E}_\mu)$. Puisque la fonction f est analytique dans un voisinage du point z_0, la fonction f^* est nulle dans ce voisinage. [Cf. [G_1] chapitre II section 8]. En conséquence la fonction h^* définie par $h^*(z) = \dfrac{f^*(z)}{z-z_0}$ appartient à $\mathrm{B}(\mathrm{E}_\mu)$; donc la fonction h définie par $h(z) = \displaystyle\int \frac{h^*(x)}{x-z}\, d\lambda(x)$ appartient à R_μ. Or pour $z \neq z_0$ on a :

$$h(z) = \int \frac{f^*(x)}{(x-z_0)(x-z)}\, d\lambda(x)$$

$$= \frac{\displaystyle\int \frac{f^*(x)}{x-z}\, d\lambda(x) - \int \frac{f^*(x)}{x-z_0}\, d\lambda(x)}{z-z_0}$$

$$= \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Puisque les deux fonctions f et h sont analytiques dans un voisinage de z_0 on a $h(z_0) = f'(z_0)$. [c.q.f.d.]

THÉORÈME 15. — *Le spectre de* $\overline{\mathrm{R}}_\mu$ *est* $\overline{\mathrm{E}}_\mu$.

Démonstration. — [Théorème de Arens, page 31 [G_1]] [c.q.f.d.].

LEMME 16. — *Pour toute fonction* φ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *à support compact et toute fonction* f *de* $\overline{\mathrm{R}}_\mu$ *la fonction* $\mathrm{T}_\varphi(f)$ *définie sur* $\overline{\mathrm{E}}_\mu$ *par* $\mathrm{T}_\varphi(f)(\xi) = \varphi(\xi)f(\xi) + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathrm{E}_\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z)\frac{f(z)}{z-\xi}\,d\lambda(z)$ *appartient à* $\overline{\mathrm{R}}_\mu$.

Démonstration. — Si $\tilde{f}$ désigne un prolongement borélien borné de f à $\mathbf{C}$, on a en utilisant la formule de Green [page 29 [G_1]] :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_\varphi(f)(\xi) &= \varphi(\xi)\tilde{f}(\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z)\frac{\tilde{f}(z)}{z-\xi}\,d\lambda(z) \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}\setminus\mathrm{E}_\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z)\frac{\tilde{f}(z)}{z-\xi}\,d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z)\frac{\tilde{f}(z)-\tilde{f}(\xi)}{z-\xi}\,d\lambda(z) \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}\setminus\mathrm{E}_\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z)\frac{\tilde{f}(z)}{z-\xi}\,d\lambda(z);\end{aligned}$$

alors du fait du lemme 13 et de la définition de $\overline{\mathrm{R}}_\mu$ on a que $\mathrm{T}_\varphi(f)$ appartient à $\overline{\mathrm{R}}_\mu$ [c.q.f.d.].

On peut alors appliquer à l'algèbre $\overline{\mathrm{R}}_\mu$ et l'ensemble E_μ la version suivante d'un théorème de A. M. Davie [D_1] :

THÉORÈME 17. — *Soient* X *un compact du plan complexe* $\mathbf{C}$, Y *un sous-ensemble de* X *mesurable Lebesgue de mesure non nulle,* A(X) *une algèbre uniforme sur* X *tels que : pour toute fonction* φ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *à support compact et toute fonction* f *de* A(X) *la fonction* $\mathrm{T}_\varphi(f)$ *définie sur* X *par*

$$\mathrm{T}_\varphi(f)(\xi) = \varphi(\xi)f(\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{Y}} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(z)\frac{f(z)}{z-\xi}\,d\lambda(z)$$

appartienne à A(X). *Alors si* g *est une fonction de* $L^\infty(\lambda_Y)$, *limite ponctuelle* λ_Y *presque partout d'une suite bornée de fonctions de* A(X), *il existe une suite* $\{g_n\}_{n\in N}$ *de fonctions de* A(X) *telle que: a)* $\|g_n\|_X \leqslant \|g\|_\infty$ *et b)* $\{g_n\}_{n\in N}$ *converge vers* g *ponctuellement* λ_Y *presque partout.*

Démonstration. — Il suffit de récrire la démonstration de A. M. Davie [D_1] en remplaçant l'algèbre R(K) par A(X) et l'ensemble Q des points non pics de K pour R(K) par Y [c.q.f.d.].

On note $\tilde{R}_\mu$ la sous-algèbre de $L^\infty(\lambda_{E_\mu})$ formée des limites ponctuelles λ_{E_μ} presque partout de suites bornées de fonctions de $\overline{R}_\mu$.

Corollaire 18. — *a) L'algèbre* $\tilde{R}_\mu$ *est fermée dans* $L^\infty(\lambda_{E_\mu})$ *pour la topologie faible étoile.*

b) Toute fonction g *de* $\tilde{R}_\mu$ *est limite* λ_{E_μ} *presque partout d'une suite de fonctions de* R_μ, $\{g_n\}_{n\in N}$, *vérifiant* $\|g_n\|_{\overline{E}_\mu} \leqslant \|g\|_\infty$.

c) $H^\infty(\lambda_{E_\mu}) \subset \tilde{R}_\mu$.

Démonstration. — Le fait que $\tilde{R}_\mu$ soit fermée pour la topologie faible étoile est une conséquence immédiate du théorème 17 et du théorème de Krein-Šmulian [D_3]; [voir l'introduction de [G_2] et la démonstration du théorème 3 de [B_1] pour des démonstrations analogues]. La proposition *b*) est évidente; la proposition *c*) est une conséquence triviale de *a*) et du fait que $\overline{R}_\mu$ contient R(K) [lemme 10] [c.q.f.d.].

2. L'algèbre $H^\infty(\mu)$ pour une mesure orthogonale.

Dans ce paragraphe on démontre le résultat 1; plus précisément on obtient la première assertion du théorème 01, ce qui permet en utilisant les travaux de T. W. Gamelin et J. Garnett [G_2] de donner deux caractérisations des fonctions de $\overline{R}_\mu$.

Lemme 20. — *Toute fonction* f *de* $H^\infty(\mu)$ *vérifiant* $\hat{f}(x) = 0$ λ_{C_μ}*-presque partout, est identiquement nulle.* (La définition de C_μ se trouve dans la partie 0.)

Démonstration. — Considérons la mesure $f\mu$. On a par hypothèse que $\int \frac{f(z)}{z-x}\, d\mu(z) = 0$ λ_{C_μ}-presque partout. Si x n'appartient pas à C_μ et si $\int \frac{1}{|z-x|}\, d|\mu|(x) < +\infty$ on a qu'il existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ de fractions rationnelles à pôles hors de $\mathrm{K} \cup \{x\}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \int \frac{f_n(z)}{z-x}\, d\mu(z) = \int \frac{f(z)}{z-x}\, d\mu(z);$$

or on a :

$$0 = \int \frac{f_n(z)-f_n(x)}{z-x}\, d\mu(z) = \int \frac{f_n(z)}{z-x}\, d\mu(z) - f_n(x)\hat{\mu}(x)$$
$$= \int \frac{f_n(z)}{z-x}\, d\mu(z);$$

donc $\int \frac{f(z)}{z-x}\, d\mu(z) = 0$. En conséquence, la transformée de Cauchy de $f\mu$ est nulle λ presque partout, ce qui implique le fait que $f\mu$ est identiquement nulle [c.q.f.d.].

On va pouvoir maintenant définir une « bonne » application de $\mathrm{H}^\infty(\lambda_{\mathrm{E}_\mu})$ dans $\mathrm{H}^\infty(\mu)$ de la manière suivante : soit f une fonction de $\mathrm{H}^\infty(\lambda_{\mathrm{E}_\mu})$; du fait du corollaire 18 il existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ de fonctions de R_μ vérifiant $\|f_n\|_{\overline{\mathrm{E}}_\mu} \leqslant \|f\|_\infty$ qui converge vers f ponctuellement λ_{E_μ}-presque partout. Considérons f^+, un point adhérent à la suite $\{f_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ pour la topologie faible étoile. On a, par le *a*) du lemme 11, que f^+ appartient à $\mathrm{H}^\infty(\mu)$, et par le *b*) du lemme 11 que λ_{E_μ}-presque partout, $\hat{f}^+(x) = f(x)$. En conséquence du lemme 20, f^+ est unique. Notons T^+ l'application de $\mathrm{H}^\infty(\lambda_{\mathrm{E}_\mu})$ dans $\mathrm{H}^\infty(\mu)$ définie par $\mathrm{T}^+(f) = f^+$; clairement, c'est un homomorphisme d'algèbre, de norme inférieure ou égale à 1. De plus, puisque $\hat{f}^+(x) = f(x)$, λ_{E_μ}-presque partout, c'est une isométrie. Alors, en appliquant le théorème de Krein-Šmulian [D_3] à l'image par T^+ de $\mathrm{H}^\infty(\lambda_{\mathrm{E}_\mu})$ on obtient qu'elle est fermée dans $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ pour la topologie faible étoile, et par conséquent qu'elle est égale à $\mathrm{H}^\infty(\mu)$. Il suffit de se rappeler que pour toute fonction f de $\mathrm{H}^\infty(\lambda_{\mathrm{E}_\mu})$, on a $\hat{f}^+(x) = f(x)$ λ_{E_μ}-presque partout pour obtenir le théorème suivant (première assertion du théorème 01, résultat 1).

THÉORÈME 21. — *L'application* T *est un isomorphisme isométrique de* $H^\infty(\mu)$ *sur* $H^\infty(\lambda_{E_\mu})$.

La démonstration précédente donne en outre le résultat suivant d'approximation ponctuelle bornée.

COROLLAIRE 22. — *a) Pour toute fonction* f *de* $H^\infty(\mu)$, *il existe une suite* $\{f_n\}_{n\in N}$ *de fonctions de* R_μ *vérifiant*

$$\|f_n\|_{\overline{E}_\mu} \leqslant \|f\|_\infty$$

qui converge vers f *ponctuellement* μ*-presque partout;*

b) $R_\mu \subset H^\infty(\lambda_{E_\mu})$ *et* $\tilde{R}_\mu = H^\infty(\lambda_{E_\mu})$.

On va donner maintenant une réciproque au lemme 11 et à la partie *b*) du corollaire 22.

THÉORÈME 23. — *Étant donnée une fonction définie sur* $\overline{E}_\mu$ *les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

a) f *appartient à* $\overline{R}_\mu$;

b) f *est continue sur* $\overline{E}_\mu$ *et appartient à* $H^\infty(\lambda_{E_\mu})$;

c) f *est continue sur* $\overline{E}_\mu$, *appartient à* $H^\infty(\mu)$ *et pour tout* x *de* E_μ *et toute mesure* μ_x *vérifie* $f(x) = \int f\, d\mu_x$.

Démonstration. — On a : *a*) implique *c*) et *c*) implique *b*) [lemme 11 et corollaire 22 *b*]. Pour montrer que *b*) implique *a*) il suffit de montrer que le théorème 54 dans [G_2] s'applique à l'algèbre $\overline{R}_\mu$ et la mesure λ_{E_μ}; ce qui est facile à voir en suivant l'application que T. W. Gamelin et J. Garnett font de ce théorème au cas de R(K) et de la mesure de Lebesgue restreinte à l'ensemble Q des points non pics de K pour R(K) [lemmes 61, 2, 3 [G_2]] et en remplaçant R(K) par $\overline{R}_\mu$ et Q par E_μ [c.q.f.d.].

3. L'ensemble C_μ.

Dans ce paragraphe, en utilisant la démonstration de A. M. Davie [D_1] on montre le théorème suivant [théorème 01, deuxième assertion] qui précise le lemme 20.

THÉORÈME 30. — *Pour toute fonction f de $H^\infty(\mu)$ on a:*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in C_\mu} |\hat{f}(x)|.$$

La démonstration se fait par l'absurde et se décompose en plusieurs lemmes.

LEMME 31. — *Supposons que le théorème 30 soit faux; alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact F et une suite de fonctions $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ dans la boule unité de $\overline{R}_\mu$ vérifiant:*

a) $|\mu|(F) > 0$ [$|\mu|$ *désignant la variation totale de* μ];

b) il n'y a pas de mesure orthogonale à $R(K)$ *non nulle dont le support soit inclus dans* F;

c) $|g_n(x) - 1| < \varepsilon$ *pour tout entier n et tout x de F;*

d) la suite $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge ponctuellement sur E_μ vers une fonction g vérifiant $|g(x)| < \varepsilon$ pour tout x de C_μ.

[Les conclusions de ce lemme sont très analogues à celles du premier pas de la démonstration de A. M. Davie [D1], son obtention étant plus facile.]

Démonstration. — Si le théorème 30 est faux, il existe une fonction f de $H^\infty(\mu)$ vérifiant $\|f\|_\infty = 1$ et $\sup_{x \in C_\mu} |\hat{f}(x)| < 1$. Choisissons un entier p tel que $(\sup_{x \in C_\mu} |\hat{f}(x)|)^p < \varepsilon$. On peut alors trouver une constante complexe k de module 1, et un compact F_1 de $|\mu|$-mesure non nulle tels que, pour tout x de F_1, on ait $|kf^p_{(x)} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après la partie *a)* du corollaire 22 et le théorème d'Egoroff, il existe une suite $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de la boule unité de $\overline{R}_\mu$, et un compact F_2 inclus dans F_1, de $|\mu|$-mesure non nulle, tels que $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers kf^p ponctuellement μ-presque partout, et converge vers kf^p uniformément sur F_2. Clairement, il existe un entier n_0 tel que la suite $\{g_n\}_{\mathbf{N}+n_0}$, le compact F_2 et la fonction $g = kf^p$ vérifient les conditions *a)*, *c)* et *d)*. Il est facile de construire un sous-compact F de F_2 de $|\mu|$-mesure non nulle, d'intérieur vide, et de complémentaire connexe dans $\mathbf{C}$; un tel compact vérifie évidemment *b)* du fait du théorème de Mergelyan [G1, page 48] [c.q.f.d.].

On note P_μ l'ensemble des fonctions f d'une variable complexe de la forme $f(z) = \int \frac{f^*(x)}{x - z} d\lambda(x)$ où f^* appartient à l'ensemble $B(C_\mu)$ des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbf{C}$ à support compact, nulles λ_{C_μ} presque partout.

On note $\overline{P}_\mu$ la fermeture de P_μ pour la norme de la convergence uniforme sur $\overline{C}_\mu$, l'adhérence de C_μ dans $\mathbf{C}$. Clairement, $\overline{P}_\mu$ contient $\overline{R}_\mu$, et, les lemmes et théorème 10, 3, 6 sont vrais pour $\overline{P}_\mu$. De plus, on peut remplacer la partie *a*) du lemme 11 par le lemme suivant :

Lemme 32. — *Pour toute fonction f de $\overline{P}_\mu$ la mesure $f.\mu$ est orthogonale à l'algèbre* $R(K)$.

Démonstration. — D'après la partie *b*) du lemme 00, il suffit de montrer le lemme pour les fonctions f de P_μ. Soit g une fraction rationnelle à pôles hors de K; pour tout point x_0 appartenant à $\mathbf{C}$, qui n'est pas un pôle de g, et tel que $\int \frac{1}{|z - x_0|} d|\mu|(z) < +\infty$ on a :

$$\int \frac{g(z)}{z - x_0} d\mu(z) = \int \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0} d\mu(z) + g(x_0) \int \frac{1}{z - x_0} d\mu(z) = g(x_0)\hat{\mu}(x_0).$$

En conséquence, la transformée de Cauchy de la mesure $g\mu$ est nulle λ presque partout hors de C_μ. Donc

$$\int g(z)f(z)\, d\mu\,(z) = \int g(z) \int \frac{f^*(x)}{x - z} d\lambda\,(x)\, d\mu(z) = -\int f^*(x)\widehat{g\mu}(x)\, d\lambda\,(x) = 0 \quad \text{[c.q.f.d.]}.$$

En suivant A. M. Davie [D_1] considérons maintenant pour chaque $\delta > 0$ une partition de l'unité de $\mathbf{C}$ formée par des fonctions $\{\varphi_k\}$ telles que : 1) le support de φ_k est inclus dans un disque D_k fermé de rayon δ; 2) tout point x de $\mathbf{C}$ est inclus dans au plus 25 disques D_k; 3) $|\text{Grad}\, \varphi_k| \leqslant \frac{8}{\delta}\cdot$ Soit

$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ le sous-ensemble de $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ formé des fonctions φ_k pour lesquelles $D_k \cap F$ n'est pas vide [F est le compact construit dans le lemme 31]; alors $\sum_{i=1}^{r} \varphi_i$ est égale à 1 sur le compact de F. Pour chaque entier n et chaque $\delta > 0$ considérons la fonction $H_{\delta, n}$ définie sur $\overline{E}_\mu$ par :

$$H_{\delta, n}(\xi) = \sum_{i=1}^{r} \left[\varphi_i(\xi) g_n(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{z}}(z) \frac{g_n(z)}{z - \xi} \, d\lambda\,(z)\right]^3$$

[les fonctions g_n étant celles construites dans le lemme 31].

On a le lemme suivant :

LEMME 33. — *Il existe des constantes absolues* A_2 *et* $A_3 < 1$ *telles que pour tout* $\delta > 0$ *il existe un entier* $n(\delta)$ *tel que :*

a) pour tout ξ *de* $\overline{E}_\mu$ $|H_{\delta, n(\delta)}(\xi)| \leqslant A_2 \min\left(1, \dfrac{\delta}{d(\xi, F)}\right)$,
où $d(\xi, F)$ *désigne la distance euclidienne de* ξ *à* F ;

b) pour tout ξ *de* F $|1 - H_{\delta, n(\delta)}(\xi)| < A_3$;

c) la mesure $H_{\delta, n(\delta)}\mu$ *est orthogonale à* $R(K)$.

Démonstration. — Pour obtenir *a*) et *b*) il suffit d'utiliser le lemme 31 et la deuxième étape de la démonstration de A. M. Davie [D_1]; pour *c*) il suffit d'appliquer les lemmes 10, 16 et 32.

Choisissons maintenant une suite $\{\delta_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0; et considérons la suite de fonctions $\{H_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ définie par $H_j = H_{\delta_j, n(\delta_j)}$. Du fait du lemme 33 cette suite est bornée sur $\overline{C}_\mu$, elle a donc un point adhérent H^* dans $L^\infty(\mu)$ pour la topologie faible étoile. Du fait du lemme 33 H^* est nulle μ-presque partout hors de F; du fait des lemmes 33 et 31 H^* n'est pas identiquement nulle; du fait du lemme 33 la mesure $H^*\mu$ est orthogonale à $R(K)$; ce qui est absurde du fait du lemme 31 [c.q.f.d.].

4. L'algèbre $H^\infty(\mu)$ dans le cas général.

Dans ce paragraphe, on étudie le cas d'une mesure μ quelconque; on obtient le résultat 2 par une « décomposition » de μ et on étend le résultat d'approximation ponctuelle bornée énoncé dans le corollaire 22 en utilisant la théorie des « A-mesures » selon B. Cole [il n'existe pas, à ma connaissance, de publication de B. Cole sur ce sujet].

Considérons le sous-espace vectoriel fermé de $L^1(\mu)$: $R(K)^\perp \cap L^1(\mu)$ formé des mesures orthogonales à $R(K)$ et absolument continues par rapport à μ. On peut voir [appendice] qu'il existe une mesure $\mu_\perp$ dans $R(K)^\perp \cap L^1(\mu)$ telle que tout autre mesure ν de $R(K)^\perp \cap L^1(\mu)$ soit absolument continue par rapport à $\mu_\perp$; écrivons la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à $\mu_\perp$: $\mu = g\mu_\perp + \mu_s$, avec μ_s singulière par rapport à $\mu_\perp$ et g dans $L^1(\mu_\perp)$; clairement les mesures $g\mu_\perp$ et $\mu_\perp$ sont mutuellement absolument continues, et μ_s est singulière par rapport à toutes les mesures de $R(K)^\perp \cap L^1(\mu)$. En conséquence, on a le lemme suivant :

Lemme 40. — *$H^\infty(\mu)$ est isométriquement isomorphe à $H^\infty(\mu_\perp) \oplus L^\infty(\mu_s)$.*

Pour donner une description complète de $H^\infty(\mu)$, et obtenir le résultat 2 il suffit maintenant d'utiliser et d'interpréter d'une manière intrinsèque $E_{\mu_\perp}$. Considérons pour cela l'ensemble E_μ comme il a été défini dans les préliminaires mais ici associé à une mesure μ non nécessairement orthogonale. Il est à peu près évident que les deux ensembles E_μ et $E_{\mu_\perp}$ sont égaux : l'inclusion $E_{\mu_\perp} \subset E_\mu$ est triviale; pour montrer l'autre inclusion : $E_\mu \subset E_{\mu_\perp}$, prenons un point x de E_μ et une mesure μ_x représentative de x pour $R(K)$ absolument continue par rapport à μ et vérifiant $\mu_x\{x\} = 0$; alors la mesure $(z - x)\mu_x$ est orthogonale à $R(K)$, est absolument continue par rapport à μ donc par rapport à $\mu_\perp$; de plus, du fait que $\mu_x\{x\} = 0$ la mesure μ_x est absolument continue par rapport à la mesure $(z - x)\mu_x$ donc par rapport à $\mu_\perp$ ce qu'il fallait démontrer. En conséquence, on a le théorème suivant :

Théorème 41. — *$H^\infty(\mu)$ est isométriquement isomorphe à $H^\infty(\lambda_{E_\mu}) \oplus L^\infty(\mu_s)$.*

Introduisons comme dans la partie 1 l'algèbre R_μ associée à l'ensemble E_μ, et définissons $\overline{R}_\mu$ comme la fermeture de R_μ

pour la norme de la convergence uniforme sur $\overline{E}_\mu \cup S_\mu$ [S_μ désignant comme dans les préliminaires le support de μ]. Remarquons que si μ est orthogonale à R(K) alors $\overline{E}_\mu$ contient S_μ. On retrouve alors la définition donnée pour $\overline{R}_\mu$ dans la partie 1. On va donner maintenant quelques informations sur la mesure μ_s relativement à l'algèbre $\overline{R}_\mu$ [qui sont des variations sur la théorie des A-mesures selon B. Cole] pour obtenir une extension de la partie *a*) du corollaire 22.

LEMME 42. — *Le support de toute mesure orthogonale à* $\overline{R}_\mu$ *est inclus dans* $\overline{E}_\mu$.

Démonstration. — Soit ν une telle mesure. On a pour toute fonction f de R_μ

$$\int f\, d\nu = 0 = \iint \frac{f^*(x)}{x-z}\, d\lambda\,(x)\, d\nu\,(z) = \int f^*(x)\hat{\nu}(x)\, d\lambda\,(x).$$

Or f^* parcourt l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur $\mathbf{C}$ à support compact, nulles λ_{F_μ}-presque partout; donc $\hat{\nu}$ est nulle λ presque partout sur $\mathbf{C}\setminus E_\mu$ [c.q.f.d.].

Remarque. — Ce lemme permet de décrire $\overline{R}_\mu$ comme étant l'algèbre de toutes les fonctions continues sur $\overline{E}_\mu \cup S_\mu$ dont les restrictions à $\overline{E}_\mu$ appartiennent à $\overline{R}_{\mu_\perp}$; on a alors que le théorème 23 s'étend au cas général sur la mesure μ sans en changer un mot.

Tout ce qui suit devient évident si E_μ est vide. On supposera donc E_μ non vide.

LEMME 43. — *Soit* ν *une mesure orthogonale à* $\overline{R}_\mu$ *non nulle. Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite bornée de fonctions de* $\overline{R}_\mu$ *qui converge* λ_{F_μ}*-presque partout vers* 0, *alors elle converge vers* 0 *dans* $L^\infty(\nu)$ *pour la topologie faible étoile.*

On dira qu'une mesure vérifiant les conclusions du lemme 43 est une « A-mesure » [au sens de B. Cole].

Démonstration. — On se contentera de donner un plan de cette démonstration voisine de celle du théorème 30 : d'abord un raisonnement par l'absurde analogue à celui fait pour obtenir le lemme 31; on a alors les mêmes conclusions que dans le lemme 31; puis une deuxième étape identique [c.q.f.d.].

LEMME 44. — *La mesure* μ_s *est singulière par rapport à toute mesure orthogonale à* $\overline{R}_\mu$.

Démonstration. — Supposons le contraire. Il existe une fonction h non nulle de $L^1(\mu_s)$ et une mesure ν orthogonale à $\overline{R}_\mu$ non nulle telles que la mesure $h\mu_s$ soit absolument continue par rapport à la mesure ν. Or, il est clair qu'une mesure absolument continue par rapport à une « A-mesure » et une « A-mesure ». En conséquence, la forme linéaire l définie sur $\overline{R}_\mu$ par $l(f) = \int fh\, d\mu_s$ se prolonge en une forme linéaire sur $H^\infty(\lambda_{E_\mu})$ continue pour la topologie faible-étoile. De la partie 2 on en déduit que l peut être considérée comme une forme linéaire sur $H^\infty(\mu_\perp)$ continue pour la topologie faible-étoile. [Il est facile de voir que l'image par T^+ d'un sous-espace de $H^\infty(\lambda_{E_{\mu_\perp}})$ fermé pour la topologie faible-étoile, est fermé pour la topologie faible-étoile dans $H^\infty(\mu_\perp)$]. Il existe donc une fonction g de $L^1(\mu_\perp)$ telle que pour toute fonction f de $\overline{R}_\mu$ on ait $l(f) = \int fg\, d\mu_\perp$; alors la mesure $h\mu_s - g\mu_\perp$ est orthogonale à $\overline{R}_\mu$ donc à $R(K)$; elle est absolument continue par rapport à la mesure μ et non singulière par rapport à la mesure μ_s, ce qui est absurde du fait de la construction de μ_s et $\mu_\perp$ [c.q.f.d.].

Remarquons que $\overline{R}_\mu$ n'a qu'un nombre au plus dénombrable de parties de Gleason non triviales [voir théorème 3.1, page 146 [G_1] pour un résultat analogue] et qu'une mesure orthogonale à $\overline{R}_\mu$ non nulle ne peut être singulière par rapport à toute mesure représentative [voir théorème 8.5, page 47 [G_1]]. Alors, on peut appliquer à $\overline{R}_\mu$ un résultat de B. Cole [communication orale] pour obtenir le

LEMME 45. — *Il existe un ensemble* F *de type* F_σ [i.e. *union dénombrable de compacts*] *tel que* $|\mu_s|(\mathbf{C} \setminus F) = 0$, *et pour toute mesure* ν *orthogonale à* $\overline{R}_\mu$ $|\nu|(F) = 0$.

On a alors une généralisation de la partie *a*) du corollaire 22 dans le théorème suivant :

THÉORÈME 46. — *Toute fonction f de $H^\infty(\mu)$ est limite ponctuelle μ-presque partout d'une suite $\{f_n\}_{n\in N}$ de fonctions de R_μ vérifiant, pour tout n :* $\|f_n\|_{\bar{E}_\mu \cup S_\mu} \leqslant \|f\|_\infty$.

Démonstration. — [Cf. [D_2] et [S_2]].

Pour conclure, on peut faire les remarques suivantes qui précisent la nature topologique de l'ensemble E_μ.

PROPOSITION 47. — *L'intérieur de S_μ est contenu dans E_μ.*

Démonstration. — Supposons l'intérieur de S_μ non vide et fixons un point x_0 de l'intérieur de S_μ. Le sous-espace vectoriel M_{x_0} de $L^\infty(\mu)$ formé des fonctions qui sont holomorphes dans l'intérieur de S_μ, et nulles au point x_0 est fermé pour la topologie faible étoile, et ne contient pas la fonction « 1 ». Donc il existe une fonction h de $L^1(\mu)$ orthogonale à M_{x_0} et vérifiant $\int h\, d\mu = 1$. Puisque toute fonction de R(K) nulle au point x_0 est dans M_{x_0}, la mesure $h\mu$ est une mesure représentative de x_0 pour R(K). Si $\mu\{x_0\} = 0$ on en déduit que x_0 appartient à E_μ. Si

$$\mu\{x_0\} \neq 0$$

il suffit de refaire le raisonnement avec la mesure

$$\mu' = - \mu\{x_0\}\delta_{x_0} + \mu$$

dont le support a même intérieur, qui est absolument continue par rapport à μ, et qui vérifie $\mu'\{x_0\} = 0$ [c.q.f.d.].

On obtient en corollaire de cette proposition le raffinement suivant :

COROLLAIRE 48. — *L'intérieur de $\overline{E}_\mu \cup S_\mu$ est contenu dans E_μ.*

Démonstration. — Considérons la mesure $\mu' = \lambda_{E_\mu} + |\mu|$; le support $S_{\mu'}$ de μ' est égal à $\overline{E}_\mu \cup S_\mu$ car d'après la partie *c*) du lemme 00 le support de λ_{E_μ} est $\overline{E}_\mu$. En conséquence du fait de la proposition 47 l'intérieur de $\overline{E}_\mu \cup S_\mu$ est inclus dans $E_{\mu'}$; de plus il est assez facile de voir que $E_{\mu'}$ est égal à E_μ [c.q.f.d.].

5. Quelques exemples.

1) R(K) *est une algèbre de Dirichlet:* [i.e. l'ensemble des parties réelles de fonctions de R(K) est uniformément dense dans l'ensemble des fonctions continues sur la frontière *b*K de K, à valeurs réelles]. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 50. — *Si* R(K) *est une algèbre de Dirichlet et si* μ *est une mesure orthogonale à* R(K) *alors :*

a) $R(\overline{E}_\mu) = \overline{R}_\mu$ *est une algèbre de Dirichlet.*

b) E_μ *est l'intérieur de* $\overline{E}_\mu$.

c) $H^\infty(\mu)$ *est isométriquement isomorphe à* $H^\infty(E_\mu)$ *l'algèbre des fonctions analytiques et bornées dans* E_μ.

La démonstration de ce théorème utilise les résultats obtenus par T. W. Gamelin et J. Garnett [G_3] sur les algèbres de Dirichlet et une méthode analogue à celle développée par D. Sarason dans [S_2] pour étudier l'adhérence faible étoile des polynômes d'une variable complexe, les travaux ayant été conduits indépendamment.

Notons O_i, $i \in I \subset N \setminus \{0\}$ les composantes connexes bornées de $\mathbf{C} \setminus S_\mu$, O_0 la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus S_\mu$, $\mathcal{H}$ l'ensemble des compacts H de la forme

$$H = \left(S_\mu \cup \bigcup_{i \in F \subset I} O_i\right) \cap K$$

et pour lesquels on a : 1) R(H) est une algèbre de Dirichlet, 2) R(H) est inclus dans $H^\infty(\mu)$.

LEMME 51. — *L'ensemble* $\mathcal{H}$ *est non vide et inductif pour la relation inclusion.*

Démonstration. — Pour montrer que $\mathscr{H}$ n'est pas vide il suffit de considérer le compact $H_0 = \left(S_\mu \cup \bigcup_{i \in I} O_i\right) \cap K$ qui n'est rien d'autre que $K \setminus O_0$.

Clairement H_0 vérifie 2); le fait qu'il vérifie 1) est une conséquence du corollaire 12.7 de [G$_3$].

Montrons que $\mathscr{H}$ est inductif : considérons $\mathscr{H}_1$ un sous-ensemble de $\mathscr{H}$ non vide totalement ordonné par inclusion; notons $H^1 = \bigcap_{H \in \mathscr{H}_1} H$; il est facile de voir qu'il existe une suite $\{H_n\}_{n \in N}$ de compacts de $\mathscr{H}_1$ décroissante telle que $H^1 = \bigcap_{n \in N} H_n$. Du fait du corollaire 12.6 de [G$_3$] $R(H^1)$ est une algèbre de Dirichlet; on en conclut [ce qui reste à vérifier étant évident] que H^1 appartient à $\mathscr{H}$ [c.q.f.d.].

Remarque. — Si H est un compact de $\mathscr{H}$ alors E_μ est inclus dans l'intérieur H^0 de H, car les points de E_μ sont évidemment dans H et non pic pour $R(H)$.

LEMME 52. — *Étant donné* H *un compact de* $\mathscr{H}$ *ou bien* A) *pour toute fonction* f *analytique bornée dans* H^0 *on a :*

$$\sup_{x \in H^0} |f(x)| = \sup_{x \in E_\mu} |f(x)|;$$

ou bien B) *il existe une composante connexe* O_i *de* $\mathbf{C} \setminus S_\mu$ *telle que* $O_i \cap H^0$ *ne soit pas vide et* $H \setminus O_i$ *appartienne à* $\mathscr{H}$.

Démonstration. — Supposons que A) soit faux. Il existe alors une fonction f analytique et bornée dans H^0 telle que $\sup_{x \in H^0} |f(x)| > \sup_{x \in E_\mu} |f(x)|$. Par « le principe du maximum » on voit qu'il existe un ouvert connexe $\mathcal{O}$ non vide inclus dans H^0 ne contenant aucun point de E_μ et dont l'adhérence coupe la frontière de H. Puisque $\overline{E}_\mu \supset S_\mu$, $\mathcal{O}$ est inclus dans une et une seule composante connexe O_i de $\mathbf{C} \setminus S_\mu$. Considérons le compact $H' = H \setminus O_i$; par le corollaire 12.7 de [G$_3$], $R(H')$ est une algèbre de Dirichlet. Du fait de la définition de E_μ les fractions rationnelles à pôles dans O_i appartiennent à $H^\infty(\mu)$ donc $R(H')$ est inclus dans $H^\infty(\mu)$; on a alors B) [c.q.f.d.].

LEMME 53. — *Supposons qu'il existe un compact* L *appartenant à* $\mathscr{H}$ *et ayant la propriété* A); *alors* $H^\infty(\mu)$ *est isométriquement isomorphe à* $H^\infty(L^0)$ *et* $E_\mu = L^0$.

Démonstration. — Pour démontrer la première partie du lemme, on peut procéder comme dans la partie 2 en remplaçant $H^\infty(\lambda_{E_\mu})$ par $H^\infty(L^0)$ et le corollaire 18 par le théorème 12.3 ii) de [G_3] et le théorème 11.1 de [G_1], chapitre VIII qui donnent en substance le fait que pour toute fonction f de $H^\infty(L^0)$ il existe une suite $\{f_n\}_{n\in N}$ de fonctions de R(L) qui converge ponctuellement vers f dans L^0 et qui vérifie $\|f_n\|_L \leqslant \sup\limits_{x\in L^0}|f(x)|$.

Démontrons la deuxième partie du lemme. On sait déjà que E_μ est inclus dans L^0. Considérons un point x_0 de L^0, et $H_0^\infty(L^0)$ le sous-ensemble de $H^\infty(L^0)$ formé des fonctions nulles au point x_0; en reprenant les notations de la partie 2, pour conclure, il suffit de montrer que $T^+(H_0^\infty(L^0))$ est fermé dans $H^\infty(\mu)$ pour la topologie faible étoile, ce qui se voit aisément [cf. [B_2], théorème 3 pour un raisonnement analogue] [c.q.f.d.].

LEMME 54. — *Il existe un compact unique* L *appartenant à* $\mathscr{H}$ *et vérifiant la propriété* A).

Démonstration. — L'unicité provient du fait que nécessairement on a $L = \overline{E}_\mu$. L'existence provient des lemmes 51 et 52 et du lemme de Zorn [c.q.f.d.].

Pour conclure la démonstration du théorème 50 il suffit de vérifier que $\overline{R}_\mu = R(E_\mu)$: on sait que $\overline{R}_\mu$ contient $R(\overline{E}_\mu)$, que $\overline{R}_\mu$ est formée de fonctions continues sur $\overline{E}_\mu$ analytiques sur E_μ (car E_μ est égal à son intérieur), et que $R(\overline{E}_\mu)$ est égal à l'algèbre de toutes les fonctions analytiques dans E_μ en continues sur $\overline{E}_\mu$ [corollaire 93, page 49 [G_1]] donc $R(\overline{E}_\mu) = \overline{R}_\mu$.

Pour une mesure quelconque on obtient alors le résultat 3 :

THÉORÈME 55. — *Si* R(K) *est une algèbre de Dirichlet et si* μ *est une mesure sur* K *alors il existe un ensemble* E_μ *ouvert (éventuellement vide) et une mesure* μ_s *absolument continue* *par rapport à* μ *(éventuellement nulle) tels que* $H^\infty(\mu)$ *soit isométriquement isomorphe à* $H^\infty(E_\mu) \oplus L^\infty(\mu_s)$.

Remarque. — On peut décrire alors $\overline{R}_\mu$ comme étant l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{E}_\mu \cup S_\mu$ et analytiques à l'intérieur. [Voir la remarque qui suit le lemme 42 et le corollaire 48.]

2) *Un contre exemple.* — Au vu du théorème 50 on peut se poser la question suivante : pour une mesure μ non nulle, orthogonale à $R(K)$ l'algèbre $R(\overline{E}_\mu)$ est-elle toujours dense de manière ponctuelle bornée dans $H^\infty(\mu)$? L'exemple suivant prouve qu'il n'en est rien; on note $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, $\overline{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1\}$, $D_+ = \{z \in \mathbf{C}\ |z| < 1$ et Réel $z > 0\}$. Considérons le compact K_1 obtenu en enlevant à $\overline{D}$ une suite de disques ouverts $(D_i)_{i\in \mathbf{N}}$ de rayon r_i, disjoints, inclus dans D_+, en sorte que $D_+ \setminus \bigcup_i D_i$ soit d'intérieur vide que 0 ne soit pas un pont pic pour $R(K_1)$ et que $\sum_{i=0}^{+\infty} r_i < +\infty$. Le compact K sera obtenu en ajoutant à K_1 une suite de disques fermés $(\overline{D}'_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de rayon $\frac{r_i}{2}$ tels que pour tout i, $\overline{D}'_i$ soit inclus dans D_i et « tangent intérieurement » à D_i. La mesure μ sera la somme des mesures « dz » sur la frontière de chacun des disques $\overline{D}'_i$ et de la mesure dz sur la frontière de $D_- = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1$ et Réel $z < 0\}$; elle est clairement une mesure orthogonale à $R(K)$. Il est facile de voir que E_μ est égal à$D_- \cup \bigcup_{i\in\mathbf{N}} D'_i$ et par conséquent que $\overline{E}_\mu = K$.

Prouvons maintenant que 0 est un point pic pour $\overline{R}_\mu$: puisque 0 n'est pas point pic pour $R(K)$, on sait [B_1] que la part de Gleason P de 0 pour $R(K)$ est de densité de Lebesgue 1 au point 0; or clairement P est incluse dans $D_- \cup (D_+ \setminus \bigcup_{i\in\mathbf{N}} D_i)$, donc $P \cap D_+$ est de densité de Lebesgue $\frac{1}{2}$ au point 0 et ne contient aucun point de E_μ. Pour chaque $\delta > 0$ considérons la fonction f_δ définie par

$$f_\delta(z) = \frac{1}{\delta} \int_{P\cap D_+ \cap \{x\in\mathbf{C},\, x<\delta\}} \frac{\exp(i \text{ Argument } x)}{x - z}\, d\lambda(x);$$

c'est une fonction de R_μ qui vérifie $\|f_\delta\| \leqslant 2\pi$ (trivialement) et

$$f(0) = \int_{P \cap D^+ \cap \{x \in \mathbf{C} : |x| < \delta\}} \frac{1}{|x|} \, d\lambda(x)$$
$$\geqslant \frac{1}{\delta^2} \lambda(P \cap D^+ \cap \{x \in \mathbf{C} : |x| < \delta\}).$$

Puisque f est analytique en dehors du disque de centre O et de rayon δ et nulle à l'infini on a

$$|f(z)| \leqslant 2\pi \text{ Minimum}\left(1, \frac{\delta}{|z|}\right).$$

En conséquence [th. 11.1, chap. II, [G_1] O est un point pic pour $\overline{R}_\mu$. Cela montre déjà que $\overline{R}_\mu$ est différent de $R(\overline{E}_\mu)$.

Supposons que $R(\overline{E}_\mu)$ est dense de manière ponctuelle bornée dans $H^\infty(\mu)$: pour toute fonction f de $H^\infty(\mu)$ il existe une suite $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $R(\overline{E}_\mu)$, bornée, qui converge μ presque partout vers f; alors il existe une constante $k > 0$ telle que pour toute fonction f de $H^\infty(\mu)$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $R(\overline{E}_\mu)$ bornée par $k\|f\|_\infty$ qui converge μ presque partout vers f [théorème de l'application ouverte]; en conséquence si x et y sont deux points de E_μ on a :

$$\|x - y\|_{[H^\infty(\mu)]^*} = \sup_{\substack{f \in H^\infty(\mu) \\ \|f\|_\infty \leqslant 1}} |f(x) - f(y)| \leqslant k\|x - y\|_{R(\overline{E}_\mu)^*}.$$

Du fait de la partie a) du corollaire 22 on a :

$$\|x - y\|_{\overline{R}_\mu^*} = \|x - y\|_{[H^\infty(\mu)]^*} \text{ donc } \|x - y\|_{\overline{R}_\mu^*} \leqslant k\|x - y\|_{R(\overline{E}_\mu)^*}.$$

Considérons l'ensemble $P_1 = \left\{x \in \overline{E}_\mu : \|x - 0\|_{R(\overline{E}_\mu)^*} \leqslant \frac{1}{2k}\right\}$. On sait qu'un tel ensemble est de densité de Lebesgue 1 au point 0 [B_1]; alors il existe une suite (x_n) de points de $P_1 \cap D_-$ qui converge vers 0; on a d'une part

$$\|x_n - 0\|_{R(\overline{E}_\mu)^*} \leqslant \frac{1}{2k}$$

pour tout n, donc $\|x_1 - x_n\|_{\overline{R}_\mu^*} \leqslant 1$ pour tout n et par conséquent $\|x_1 - 0\|_{\overline{R}_\mu^*} \leqslant 1$, et d'autre part, puisque 0 est point pic pour $\overline{R}_\mu$, $\|x_1 - 0\|_{\overline{R}_\mu^*} = 2$ ce qui est absurde [c.q.f.d.].

6. Appendice : Ensembles essentiel et inessentiel du spectre de $H^\infty(\mu)$.

On abandonne le contexte des algèbres de fractions rationnelles pour interpréter dans un cadre plus général la décomposition décrite dans le théorème 41. Le but de cet appendice étant de décrire le lien qui existe entre cette décomposition et la décomposition du spectre de $H^\infty(\mu)$ en ensemble essentiel et inessentiel.

Rappelons tout d'abord les définitions d'ensembles essentiel et inessentiel dans le spectre d'une algèbre uniforme, et la définition de $H^\infty(\mu)$.

DÉFINITIONS 61. — *Soient* A *une algèbre uniforme sur un compact* X, M_A *son spectre* [*i.e. l'ensemble des idéaux maximaux de* A] *muni de la topologie de Gelfand, et* I *le plus grand idéal de l'algèbre des fonctions continues sur* M_A *à valeurs complexes, contenu dans* A. *On appelle ensemble essentiel du spectre de* A *l'ensemble* E *des idéaux maximaux de* A *contenant* I; *on appelle ensemble inessentiel le complémentaire de* E *dans* M_A.

[Cf. [L], pages 64-67 pour de plus amples informations sur les ensembles E, $M_A \setminus E$ et sur l'idéal I.]

DÉFINITION 62. — *Étant données une algèbre uniforme* B *sur un compact* Y *et une mesure* μ *non nulle sur* Y *on appelle* $H^\infty(\mu)$ *l'adhérence de* B *dans* $L^\infty(\mu)$ *pour la topologie faible étoile* [i.e. la topologie $\sigma[L^\infty(\mu), L^1(\mu)]$].

Remarquons que $H^\infty(\mu)$ est une algèbre uniforme sur son spectre [G_1, page 11]. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 63. — *Étant données une algèbre uniforme* B *sur un compact métrisable* Y *et une mesure* μ *non nulle sur* Y, *il existe une mesure* $\mu_\perp$ *orthogonale à* B *absolument continue* *par rapport à* μ *et une mesure* μ_s *singulière par rapport à* $\mu_\perp$ *absolument continue par rapport à* μ *telles que :*

1) $H^\infty(\mu)$ *soit isométriquement isomorphe à la somme directe de* $H^\infty(\mu_\perp)$ *et de* $L^\infty(\mu_S)$.

2) *Le spectre* $M_{H^\infty(\mu)}$ *de* $H^\infty(\mu)$ *soit homéomorphe à l'union disjointe des spectres* $M_{H^\infty(\mu_\perp)}$ *de* $H^\infty(\mu_\perp)$ *et* $M_{L^\infty(\mu_s)}$ *de* $L_\infty(\mu_s)$, *les ensembles essentiel et inessentiel du spectre de* $H^\infty(\mu)$ *étant homéomorphes respectivement à* $M_{H^\infty(\mu_\perp)}$ *et* $M_{L^\infty(\mu_s)}$.

[N. B. — Toutes les mesures sont boréliennes régulières bornées à support compact.]

Au cours de la démonstration de ce théorème on fera un usage répété du résultat technique suivant :

LEMME 64. — *Étant données une mesure* μ *non nulle et une famille* F *de fonctions de* $L^1(\mu)$ *finie ou dénombrable, il existe une fonction* f^+ *combinaison convexe des fonctions de* F *telle que pour toute fonction* f *de la famille* F *la mesure* $f\mu$ *soit absolument continue par rapport à la mesure* $f^+\mu$.

Démonstration. — L'idée est très simple pour une famille F de deux fonctions f_1 et f_2 : on peut écrire la décomposition de Lebesgue de $f_2\mu$ par rapport à $f_1\mu$: $f_2\mu = hf_1\mu + k\mu$; considérons alors pour tout réel α, $0 < \alpha < 1$ la fonction $f_\alpha^+ = (1-\alpha)f_1 + \alpha f_2 = ((1-\alpha) + \alpha h)f_1 + \alpha k$; pour presque tout α par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $]0, 1[$ l'ensemble $E_\alpha = \{x : (1-\alpha) + \alpha h(x) = 0\}$ est μ-mesurable et de $|\mu|$-mesure nulle; pour un tel α il est clair que la fonction f_α^+ fait l'affaire.

Pour une famille F finie, il suffit de procéder par une itération. Pour une famille F dénombrable, on procède par récurrence en utilisant à chaque étape l'idée précédente en prenant quelques précautions techniques évidentes pour pouvoir passer à la limite; les détails sont inintéressants [c.q.f.d.].

Pour rendre la lecture de ce paragraphe indépendante du reste du papier on redonne ici la démonstration de la première assertion du théorème 63 [cf. lemme 40].

Démonstration de 63. — 1) Considérons $B^\perp \cap L^1(\mu)$ l'ensemble des mesures sur Y orthogonales à l'algèbre B et absolument continues par rapport à μ. C'est un sous-espace fermé de $L^1(\mu)$. Du fait que Y est métrisable, $L^1(\mu)$ est séparable; il existe donc une famille F de fonctions de $B^\perp \cap L^1(\mu)$ finie ou dénombrable dense dans $B^\perp \cap L^1(\mu)$. En utilisant le lemme 64 on voit qu'il existe une fonction f^+ de $B^\perp \cap L^1(\mu)$ telle que pour toute fonction f de F la mesure $f\mu$ soit absolument continue par rapport à la mesure $f^+\mu$. Puisque la famille F est dense dans $B^\perp \cap L^1(\mu)$ il est clair que la mesure $\mu_\perp = f^+\mu$ est telle que toute mesure de $B^\perp \cap L^1(\mu)$ est absolument continue par rapport à $\mu_\perp$.

Écrivons alors la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à $\mu_\perp$: $\mu = g\mu_\perp + \mu_s$ avec μ_s singulière par rapport à $\mu_\perp$ et g dans $L^1(\mu_\perp)$; clairement les mesures $g\mu_\perp$ et $\mu_\perp$ sont mutuellement absolument continues, et la mesure μ_s est singulière par rapport à toutes les mesures $B^\perp \cap L^1(\mu)$; on a alors immédiatement la première assertion du théorème 63 [c.q.f.d.].

Démonstration de 63. — 2) Considérons pour cela les idéaux auto-adjoints de $H^\infty(\mu)$. Clairement il y en a, et, puisqu'une somme d'idéaux auto-adjoints est un idéal auto-adjoint, il existe un plus grand idéal auto-adjoint. De plus, l'adhérence faible étoile d'un idéal auto-adjoint étant un idéal auto-adjoint, le plus grand idéal auto-adjoint est fermé pour la topologie faible étoile : notons I cet idéal et E le sous-ensemble de $M_{H^\infty(\mu)}$ formé des idéaux maximaux contenant I. Alors, il est évident que I est [modulo la représentation de Gelfand] égal à l'ensemble des fonctions continues sur $M_{H^\infty(\mu)}$ nulles sur E; par conséquent I est un idéal de l'algèbre $C(M_{H^\infty(\mu)})$ des fonctions continues sur $M_{H^\infty(\mu)}$ a valeurs complexes. De plus puisque tout idéal fermé de l'algèbre $C(M_{H^\infty(\mu)})$ est auto-adjoint, I est le plus grand idéal de $C(M_{H^\infty(\mu)})$ inclus dans $H^\infty(\mu)$.

En utilisant le lemme 64 et le fait que I est auto-adjoint, on voit qu'il existe une fonction f^+ non négative dans I telle que pour toute fonction f de I la mesure $f\mu$ soit absolument continue par rapport à la mesure $f^+\mu$. Écrivons la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à $f^+\mu$; on a $\mu = hf^+\mu + \mu_\sigma$ avec h dans $L^1(f^+\mu)$ et μ_σ singulière par rapport à $f^+\mu$. De la construction de f^+ on a que toutes les fonctions de I sont nulles μ_σ presque partout; en fait il est assez facile de montrer que I est égal à l'ensemble des fonctions de $L^\infty(\mu)$ nulles μ_σ-presque partout.

On a alors d'une part que I contient l'ensemble des fonctions de $L^\infty(\mu)$ nulles $\mu_\perp$ presque partout donc μ_σ est absolument continue par rapport à $\mu_\perp$, d'autre part que $\mu_\perp$ est orthogonale à I donc absolument continue par rapport à μ_σ; en conséquence I est égal à l'ensemble des fonctions de $L^\infty(\mu)$ nulles $\mu_\perp$ presque partout ce qui donne 2) immédiatement [c.q.f.d.].

Note complémentaire.

On peut développer, en utilisant les idées contenues dans les parties 1, 2 et 5 (cas où R(K) est une algèbre de Dirichlet une théorie analogue dans le cadre suivant : étant donné un ouvert U borné du plan complexe **C** et une mesure μ non nulle sur l'adhérence $\overline{U}$ de U dans **C**, si $H^\infty(\mu)$ désigne l'adhérence faible étoile dans $L^\infty(\mu)$ de l'algèbre A(U) des fonctions continues sur $\overline{U}$ et analytiques dans U on a alors, en particulier, le

Résultat 4. — Pour toute mesure μ orthogonale à A(U) il existe un ouvert $\mathcal{O}_\mu$ de **C**, non vide, tel que $H^\infty(\mu)$ soit isométriquement isomorphe à $H^\infty(\lambda_{\mathcal{O}_\mu})$.

BIBLIOGRAPHIE

[B_1] A. BROWDER, Point derivations on function algebras, *J. Functional Analysis*, 1 (1967), 22-27.

[B_2] L. BROWN, A. SHIELDS and K. ZELLER, On absolutely convergent exponential sums, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 96 (1960), 162-183.

[D_1] A. M. DAVIE, Bounded Limits of analytic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 32 (1972), 127-133.

[D_2] A. M. DAVIE, Bounded Approximation and Dinchlet Sets, *J. Functionnal Analysis*, 6 (1970), 460-467.

[D_3] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, Linear operator. Part. I: General theory. Interscience, New York, 1958.

[G_1] T. W. GAMELIN, Uniform algebras. *Prentice Hall Series in Modern Analysis*, 1969.

[G_2] T. W. Gamelin and J. Garnett, Bounded approximation by rational functions (à paraître).

[G_3] T. W. Gamelin and J. Garnett, Pointwise bounded approximation and Dirichlet algebras, *J. Functional Analysis*, 8 (1971), 360-404.

[G_4] J. Garnett, Analytic capacity and measure, *Lecture Notes in Mathematics*, 297, Springer-Verlag.

[L] G. M. Leibowitz, Lectures on Complex Functions Algebras. Scott Foresman and Co (1970), 64-67.

[S_1] D. Sarason, Weak star density of polynomials, *J. Reine Angew. Math.*, 252 (1972), 1-15.

[S_2] D. Sarason, A remark on the weak star topology of l^∞, *Studia Math.*, 30 (1968), 355-359.

Manuscrit reçu le 28 novembre 1973
accepté par J. P. Kahane.

Jacques Chaumat
Bâtiment de Mathématiques 425
Université de Paris XI
91405 Orsay.