

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN CONNES

## **Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 24, n° 4 (1974), p. 121-155

<[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1974\\_\\_24\\_4\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_121_0)>

© Annales de l'institut Fourier, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

**CARACTÉRISATION  
DES ESPACES VECTORIELS ORDONNÉS  
SOUS-JACENTS AUX ALGÈBRES  
DE VON NEUMANN**

par Alain CONNES

---

Soit  $M$  une algèbre de von Neumann (rappelons que  $M$  est en particulier une algèbre involutive), l'espace vectoriel  $M$ , muni de l'ordre correspondant au cône  $M_+ = \{y^*y, y \in M\}$  est l'espace vectoriel ordonné sous-jacent à  $M$ .

Le but de cet article est de caractériser la classe d'espaces vectoriels ordonnés ainsi obtenue. L'un des outils essentiels de cette caractérisation est la théorie de Tomita-Takesaki [10].

Dans [1] et [3], H. Araki et l'auteur ont associé indépendamment à tout vecteur totalisateur et séparateur  $\xi_0$  pour l'algèbre de von Neumann  $M$  dans  $\mathcal{H}$  le cône

$$\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} = \{\Delta_{\xi_0}^{1/4}M_+\xi_0\}^-,$$

où  $\Delta_{\xi_0}$  désigne l'opérateur modulaire ([10]) du triplet  $(\mathcal{H}, M, \xi_0)$ . De plus quand  $M$  est un facteur le double cône  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural} \cup -\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$  coïncide avec l'ensemble des vecteurs  $(M, J_{\xi_0})$  positifs au sens de Woronowicz [11]. Le résultat principal obtenu ci-dessous est la caractérisation des cônes  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$  par trois propriétés géométriques : autopolarité, homogénéité, orientabilité. Un cône  $\mathcal{H}^+$  dans  $\mathcal{H}$  est autopolaire quand  $\mathcal{H}^+ = \{\xi \in \mathcal{H}, \langle \xi, \eta \rangle \geq 0 \forall \eta \in \mathcal{H}^+\}$ . Un cône autopolaire  $\mathcal{H}^+$  est orientable quand le quotient par son centre de l'algèbre de Lie involutive du groupe des transformations linéaires du cône est une algèbre de Lie involutive complexe.

Un cône autopolaire  $\mathcal{H}^+$  est homogène quand pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$  l'opérateur  $P_F - P_{F^\perp}$  appartient à l'algèbre de Lie du cône, où  $P_F$  désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par  $F$  et  $F^\perp$  la face orthogonale à  $F$ .

Dans la première section nous caractérisons les formes hermitiennes positives non dégénérées  $s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle$  (où  $\varphi$  est un état normal fidèle sur  $M$ ) par la propriété d'autopolarité :  $s$  définit un isomorphisme de  $M_+$  sur une face de  $M_+^*$ , propriété qui ne met en jeu que l'espace ordonné sous-jacent à  $M$ .

Dans la deuxième section nous comparons les complétions  $\{M_+\}_s^-$  de  $M_+$  relatives aux diverses formes autopolaires  $s$  sur  $M$  et montrons l'unicité du cône  $\{M_+\}_s^-$  obtenu et l'égalité  $\{M_+\}_s^- = \mathcal{P}_{\xi_\varphi}^\perp$ . La notion de déphasage spatial (élément de  $M'$  associé à tout couple  $\xi_1, \xi_2$  de vecteurs totalisateurs et séparateurs pour  $M$  dans  $\mathcal{H}$ ) conduit aux résultats que nous avons annoncés dans [3]. En particulier pour  $(\mathcal{H}, M, \xi_0)$  donné, tout état normal  $\psi$  sur  $M$  s'écrit  $\psi = \omega_\xi$  pour un unique  $\xi \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$ .

Dans la troisième section nous montrons le principal résultat annoncé dans [3] : quand  $M$  est un facteur,  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$  détermine le couple  $(M, M')$ . Puis nous explicitons le groupe des transformations linéaires de  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$  (une telle transformation est nécessairement continue car  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$  est faiblement complet), ainsi que son algèbre de Lie : au centre près c'est l'algèbre de Lie des dérivations de  $M$ , ce qui détermine une orientation  $I_M$  de  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$  associée à  $M$ .

Dans la quatrième section nous montrons que  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$  est homogène en mettant les faces fermées en bijection avec les projecteurs de  $M$ . Puis nous déterminons les orientations possibles de  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$  : quand  $M$  est un facteur et  $M \neq \mathbf{C}$  il y en a deux :  $I_M$  et  $I_M = -I_M$ , quand  $M$  est abélienne il n'y en a qu'une.

Enfin dans la cinquième section nous associons une algèbre de von Neumann à tout cône autopolaire homogène orienté  $\mathcal{H}^+$ . Quand  $\mathcal{H}^+$  est de genre dénombrable (cf. définition 5.8 ci-dessous) elle admet un vecteur totalisateur séparateur  $\xi_0$

tel que  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$ . Cela achève d'établir l'isomorphisme de la catégorie des algèbres de von Neumann avec celle des cônes autopolaires homogènes orientés et conduit à une caractérisation des algèbres de von Neumann comme espaces vectoriels ordonnés (Pb posé dans [8]).

### 1. Formes autopolaires sur l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann.

Soit  $E, E^+$  un espace vectoriel complexe ordonné (i.e.  $E^+$  est un cône convexe dans  $E$ ). On suppose que  $E^+$  est saillant et que  $E^+ - E^+ + iE^+ - iE^+ = E$ .

Pour  $\xi_1, \xi_2 \in E$ ,  $\xi_2 - \xi_1 \in E^+$  on écrit  $\xi_1 \leqslant \xi_2$ ; et pour toute famille  $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$  d'éléments de  $E$ , on note  $\vee \xi_\alpha$  (resp.  $\wedge \xi_\alpha$ ) le plus petit majorant (resp. plus grand minorant), s'il existe, de la famille  $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$ . L'élément  $\xi$  est une unité d'ordre quand  $\forall \eta \geqslant 0, \exists n > 0$  tel que  $\eta \leqslant n\xi$ . Soit  $E^*$  le dual algébrique de  $E$ ; on notera  $E_+^*$  le cône des formes linéaires positives sur  $E^+$ .

Soient  $E, E^+$  un espace vectoriel ordonné complexe,  $s$  une forme sesquilinearaire sur  $E$ ; nous notons  $s^*$  l'application de  $E$  dans  $E^*$  qui, à  $\xi \in E$  associe  $s\xi$ , défini par

$$s\xi(\xi') = s(\xi', \xi), \quad \forall \xi' \in E.$$

**DÉFINITION 1.1.** — *On appelle forme autopolaire sur l'espace vectoriel ordonné complexe  $E, E^+$  toute forme hermitienne positive non dégénérée  $s$  telle que l'image de  $E^+$  par  $s^*$  soit une face de  $E_+^*$ .*

On note alors  $\mathcal{H}_s$  l'espace de Hilbert complété de  $E$ ,  $\eta_s$  l'injection canonique de  $E$  dans  $\mathcal{H}_s$  et  $\mathcal{H}_s^+$  la fermeture de  $\eta_s(E^+)$ .

**PROPOSITION 1.2.** — *Soient  $E, s, \eta_s, \mathcal{H}_s^+$  comme ci-dessus.*

- a)  $\xi, \eta \in \mathcal{H}_s^+ \implies \langle \xi, \eta \rangle \geqslant 0$ .
- b)  $0 \leqslant \xi \leqslant \eta \implies \|\xi\| \leqslant \|\eta\|$ .
- c)  $\eta_s(E^+)$  est une face de  $\mathcal{H}_s^+$ .
- d)  $\eta_s(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 0, \forall x \in E$ .

e) Pour tout  $x \in E^+$  la forme linéaire  $s_x^*$  est normale au sens suivant: pour toute famille filtrante décroissante  $(y_\alpha)_{\alpha \in I}$  d'éléments de  $E^+$ , telle que  $\wedge y_\alpha = 0$ , on a  $s_x^*(y_\alpha) \rightarrow 0$  selon I.

f) Si  $x \in E^+$  est une unité d'ordre, la forme linéaire  $s_x^*$  est fidèle:

*Démonstration.* — Pour  $x, y \in E^+$  on a  $s(x, y) = s_y^*(x) \geq 0$ , les assertions a) et b) en résultent facilement.

Soient  $x \in E^+$  et  $\xi \in \mathcal{H}_s^+$  tels que  $\xi \leq \eta_s(x)$ . Pour tout  $y \in E$  posons  $\psi(y) = \langle \eta_s(y), \xi \rangle$ . On a  $\psi \in E_+^*$ ,  $\psi \leq s_x^*$  donc il existe un  $X \in E^+$  tel que  $s_X^* = \psi$ . Ainsi  $\eta_s(X) = \xi$  d'où c).

Soit  $x \in E$  tel que  $\eta_s(x) \geq 0$ . Comme  $E^+$  engendre  $E$  il existe des  $x_j \in E^+$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , tels que

$$x = x_1 - x_2 + i(x_3 - x_4),$$

de plus  $\eta_s$  étant injective on a  $x_3 - x_4 = 0$ . On a

$$\eta_s(x) \leq \eta_s(x_1)$$

donc d'après (c) il existe  $X \in E^+$  tel que  $\eta_s(x) = \eta_s(X)$  d'où  $x = X \geq 0$ .

Montrons e). Le convexe  $[0, \eta_s(y)]$  est faiblement compact d'après (b), pour tout  $y \in E^+$ . On peut donc supposer que  $\eta_s(y_\alpha)$  converge faiblement vers un  $\xi \geq 0$  quand  $\alpha \rightarrow \infty$ . Soit [voir c)]  $X \in E^+$  tel que  $\eta_s(X) = \xi$ ; d'après d) on a  $X \leq y_\alpha$  pour tout  $\alpha$ , donc  $X = 0$  et  $\xi = 0$ .

L'assertion f) est immédiate.

**THÉORÈME 1.3.** — Soient  $M, M_+$  l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre de von Neumann  $M$  et  $1$  l'unité de  $M$ .

Pour toute forme linéaire positive normale fidèle  $\varphi$  sur  $M$ , il existe une forme autopolaire unique  $s$  telle que  $s_i^* = \varphi$ .

*Remarque 1.4.* — L'élément  $1$  de  $M^+$  est une unité d'ordre ( $\forall x \geq 0, \exists n$  tel que  $x \leq n1$ ); le théorème 1.3 reste valable pour toute unité d'ordre  $h$  de  $M_+$ , car l'application  $x \rightarrow h^{-1/2}xh^{-1/2}$  est de manière évidente un automorphisme d'ordre de  $(M, M_+)$ , remplaçant  $h$  par  $1$ .

Nous employons les notations usuelles de la théorie de

Tomita-Takesaki. A  $\varphi$  correspondent  $\mathcal{H}_\varphi$ ,  $\pi_\varphi$ ,  $\xi_\varphi$ ,  $\Delta_\varphi$ ,  $J_\varphi$ ,  $S_\varphi$ ,  $D_\varphi^\#$  (cf. [10]).

**LEMME 1.5.** — Soit  $\varphi$  une forme linéaire positive normale fidèle sur l'algèbre de von Neumann  $M$ ; alors la forme sesquilinearéaire  $s$  vérifiant

$$(1) \quad s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle$$

est une forme autopolaire sur  $M$  telle que  $s_i^* = \varphi$ .

*Démonstration.* — Il est clair que  $s$  est hermitienne, positive et non dégénérée car  $\Delta_\varphi$  est positif et non singulier. Soit  $l$  l'application de  $\pi_\varphi(M)_+$  sur la face de  $\varphi$  dans  $M_*$ , qui à  $y \in \pi_\varphi(M)_+$  associe la forme linéaire  $z \rightarrow \langle \pi_\varphi(z) \xi_\varphi, y \xi_\varphi \rangle$ . Comme  $J_\varphi \pi_\varphi(M) + J_\varphi = \pi_\varphi(M)_+$ , on voit que l'application qui à  $x \geq 0$  associe  $l(J_\varphi \pi_\varphi(x) J_\varphi)$  est un isomorphisme de  $M_+$  sur la face de  $\varphi$  dans  $M_*$ . On vérifie que cette application n'est autre que  $s^*$  grâce à l'égalité :

$$\langle \pi_\varphi(z) \xi_\varphi, J_\varphi \pi_\varphi(x) J_\varphi \xi_\varphi \rangle = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(z) \xi_\varphi, \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle$$

pour tout  $x, z \in M_+$ .

Rappelons qu'un isomorphisme de Jordan  $\alpha$  de l'algèbre  $M_1$  sur l'algèbre  $M_2$  est une bijection linéaire de  $M_1$  sur  $M_2$ , avec  $\alpha(xy + yx) = \alpha(x)\alpha(y) + \alpha(y)\alpha(x)$  pour tous  $x, y \in M$ . Rappelons un lemme connu [7].

**LEMME 1.6.** — Soient  $M_1$  et  $M_2$  des algèbres de von Neumann,  $\alpha$  une bijection linéaire de  $M_1$  sur  $M_2$  telle que  $\alpha(M_1^+) = M_2^+$  et  $\alpha(1) = 1$ ; alors  $\alpha$  est un isomorphisme de Jordan de  $M_1$  sur  $M_2$ .

Dans la suite de la démonstration du théorème 1.3, nous désignons par  $s$  une forme autopolaire sur  $M$ , par  $\varphi$  la forme linéaire positive normale fidèle  $\varphi = s_i^*$  et par  $t$  la forme autopolaire associée à  $\varphi$  par (1).

**LEMME 1.7.** — Il existe un automorphisme de Jordan  $\alpha$  de  $M$  tel que

$$(2) \quad s(x, y) = t(x, \alpha(y))$$

pour tous  $x, y \in M$ .

*Démonstration.* — En effet l'application  $(t^*)^{-1}s^*$  de  $M_+$  dans  $M_+$  a un sens car  $s^*(M_+) = \text{Face de } \varphi$  dans

$$M_*^+ = t^*(M_+).$$

On applique alors le lemme 1.6 en utilisant l'égalité  $s_1^* = t_1^*$ .

**LEMME 1.8.** — *Il existe un unitaire  $U \in \mathcal{L}(D_\varphi^\#)$  tel que*

$$(3) \quad s(x, y) = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, U \pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rangle \quad \forall x, y \in M.$$

*Démonstration.* — Il faut prouver que l'application

$$\pi_\varphi(y) \xi_\varphi \rightarrow \pi_\varphi(\alpha(y)) \xi_\varphi$$

de  $\pi_\varphi(M) \xi_\varphi$  dans  $\pi_\varphi(M) \xi_\varphi$  est isométrique pour la norme du domaine  $D_\varphi^\#$  de  $S_\varphi$ . Il suffit donc de montrer que pour tout  $x \in M$  avec  $x = x^*$ , on a

$$\| \pi_\varphi(\alpha(x)) \xi_\varphi \|_{\#} = \| \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \|_{\#}, \text{ i.e. } \| \pi_\varphi(\alpha(x)) \xi_\varphi \| = \| \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \|$$

On a

$$\begin{aligned} \| \pi_\varphi(\alpha(x)) \xi_\varphi \|_{\#}^2 &= \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(\alpha(x))^2 \xi_\varphi \rangle = \langle \xi_\varphi, \pi_\varphi(\alpha(x^2)) \xi_\varphi \rangle \\ &= s(1, x^2) = s(x^2, 1) = \varphi(x^2) = \| \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \|^2. \end{aligned}$$

**LEMME 1.9.** — *Soit  $P_\varphi$  la restriction à  $D_\varphi^\#$  de l'opérateur  $\Delta_\varphi^{1/2}(1 + \Delta_\varphi)^{-1}$ . Alors  $P_\varphi$  et  $P_\varphi U$  sont des opérateurs positifs de  $D_\varphi^\#$  dans  $D_\varphi^\#$ , et  $U = 1$ .*

*Démonstration.* — Comme  $0 \leq t(1 + t^2)^{-1} \leq 1/2$  pour  $t \geq 0$ ,  $P_\varphi$  a un sens; de plus pour  $\xi \in D_\varphi^\#$  on a

$$\langle P_\varphi \xi, \xi \rangle_{\#} = \langle P_\varphi \xi, \xi \rangle + \langle \Delta_\varphi^{1/2} P_\varphi \xi, \Delta_\varphi^{1/2} \xi \rangle \geq 0.$$

Pour  $\xi_1$  et  $\xi_2$  dans  $D_\varphi^\#$  on a  $\langle P_\varphi \xi_1, \xi_2 \rangle_{\#} = \langle \Delta_\varphi^{1/2} \xi_1, \xi_2 \rangle$ . Ainsi pour  $x \in M$  on a

$$\langle \Delta_\varphi^{1/2} \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, U \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(x) \xi_\varphi, P_\varphi U \pi_\varphi(x) \xi_\varphi \rangle_{\#}$$

et comme le premier membre de cette égalité est positif, on a montré que  $P_\varphi U$  qui est un opérateur borné, est positif de  $D_\varphi^\#$  dans  $D_\varphi^\#$ .

L'unicité de la décomposition polaire, dans l'espace  $D_\varphi^\#$ , montre que  $U = 1$  et achève la démonstration du théorème 1.3 en utilisant l'égalité (3).

*Remarque 1.10.* — Soient  $s$  une forme autopolaire sur l'algèbre de von Neumann  $M$ ,  $A$  une bijection linéaire de  $M$  sur  $M$  telle que  $A(M_+) = M_+$ ; alors la forme

$$(x, y) \rightarrow s(Ax, Ay)$$

est autopolaire. Nous étudierons en 2.8 une réciproque de ce fait.

**2. Comparaison des formes autopolaires  
sur l'espace vectoriel ordonné associé à une algèbre  
de von Neumann.**

**THÉORÈME 2.1.** — Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux formes autopolaires sur l'algèbre de von Neumann  $M$ ;  $\mathcal{H}_{s_1}$ ,  $\mathcal{H}_{s_1}^+$ ;  $\mathcal{H}_{s_2}$ ,  $\mathcal{H}_{s_2}^+$  les espaces de Hilbert ordonnés associés.

Il existe une isométrie  $U$  de  $\mathcal{H}_{s_1}$  sur  $\mathcal{H}_{s_2}$  telle que

$$U\mathcal{H}_{s_1}^+ = \mathcal{H}_{s_2}^+.$$

La démonstration utilise plusieurs lemmes qui ont leur intérêt propre.

**LEMME 2.2.** — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans l'espace  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  des vecteurs totalisateurs et séparateurs pour  $M$ ,  $\mathcal{H}_4$  un espace de Hilbert de dimension 4, de base  $\varepsilon_{ij}$   $i, j = 1, 2$ ,  $F$  le facteur engendré dans  $\mathcal{H}_4$  par les  $e_{ij}$ ,  $e_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{jk}\varepsilon_{il}$ ,  $F'$  le facteur engendré par les  $f_{ij}$  où

$$f_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{il}\varepsilon_{kj}.$$

Soient  $\mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_4$ ,  $\eta_0 = \xi_1 \otimes \varepsilon_{11} + \xi_2 \otimes \varepsilon_{22}$ ,  $P = M \otimes F$  et  $U_{ij}$  l'isométrie de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  telle que  $U_{ij}\xi = \xi \otimes \varepsilon_{ij}$ ,  $\forall \xi \in \mathcal{H}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Le vecteur  $\eta_0$  est totalisateur et séparateur pour  $P$  dans  $\mathcal{H}$  et l'involution  $S_{\eta_0}$  associée à  $P$  et  $\eta_0$  vérifie :

$$(4) \quad S_{\eta_0} = U_{11}S_{\xi_1}U_{11}^* + U_{21}S_{\xi_1}\xi_1U_{12}^* + U_{12}S_{\xi_2}\xi_1U_{21}^* + U_{22}S_{\xi_2}U_{22}^*$$

où  $S_{\xi_1, \xi_2}$  désigne la fermeture de l'opérateur défini sur  $M\xi_2$  par l'égalité :

$$(5) \quad S_{\xi_1, \xi_2}x\xi_2 = x^*\xi_1 \quad \text{pour tout } x \in M.$$

*Démonstration.* — Soient  $x_{ij} \in M$ ;  $i, j = 1, 2$ ,  $x = \sum x_{ij} \otimes e_{ij}$ .  
On a

$$x\eta_0 = x_{11}\xi_1 \otimes \varepsilon_{11} + x_{12}\xi_2 \otimes \varepsilon_{12} + x_{21}\xi_1 \otimes \varepsilon_{21} + x_{22}\xi_2 \otimes \varepsilon_{22}$$

ainsi  $\eta_0$  est totalisateur et séparateur pour  $P$  dans  $\mathcal{K}$ .

Soit  $\alpha \in D_{\eta_0}^\#$ ,  $\alpha = \sum \alpha_{ij} \otimes \varepsilon_{ij}$ . Soit  $(X_n)$  une suite d'éléments de  $P$  tels que  $\lim X_n \eta_0 = \alpha$  et  $\lim X_n^* \eta_0 = S_{\eta_0} \alpha$ . Posons

$$X_n = a_n \otimes e_{11} + b_n \otimes e_{12} + c_n \otimes e_{21} + d_n \otimes e_{22}.$$

On a alors  $X_n^* = a_n^* \otimes e_{11} + c_n^* \otimes e_{12} + b_n^* \otimes e_{21} + d_n^* \otimes e_{22}$  et les égalités :

$$\lim a_n \xi_1 = \alpha_{11}, \quad \lim b_n \xi_2 = \alpha_{12}, \quad \lim c_n \xi_1 = \alpha_{21}, \quad \lim d_n \xi_2 = \alpha_{22}$$

et

$$\lim a_n^* \xi_1 = (S_{\eta_0} \alpha)_{11}, \quad \lim b_n^* \xi_1 = (S_{\eta_0} \alpha)_{21}, \quad \lim c_n^* \xi_2 = (S_{\eta_0} \alpha)_{12},$$

$$\lim d_n^* \xi_2 = (S_{\eta_0} \alpha)_{22} \text{ d'où l'inclusion}$$

$$S_{\eta_0} \subset U_{11} S_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} S_{\xi_1, \xi_2} U_{12}^* + U_{12} S_{\xi_2, \xi_1} U_{21}^* + U_{22} S_{\xi_2} U_{22}^*$$

L'inclusion inverse est immédiate.

**LEMME 2.3.** — *Avec les notations du lemme 2.2, soit*

$$S_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_1, \xi_2} \Delta_{\xi_1, \xi_2}^{1/2}$$

*la décomposition polaire de  $S_{\xi_1, \xi_2}$ . On a alors*

$$(6) \quad J_{\eta_0} = U_{11} J_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} J_{\xi_1, \xi_2} U_{12}^* + U_{12} J_{\xi_2, \xi_1} U_{21}^* + U_{22} J_{\xi_2} U_{22}^*$$

$$(7) \quad \Delta_{\eta_0} = U_{11} \Delta_{\xi_1} U_{11}^* + U_{21} \Delta_{\xi_1, \xi_2} U_{12}^* + U_{12} \Delta_{\xi_2, \xi_1} U_{21}^* + U_{22} \Delta_{\xi_2} U_{22}^*$$

*Démonstration.* — Par construction, le second membre de (6) est une isométrie de  $\mathcal{K}$  sur  $\mathcal{K}$  et le second membre de (7) un opérateur positif auto adjoint dans  $\mathcal{K}$ . Il suffit donc de vérifier l'égalité  $S_{\eta_0} = J_{\eta_0} \Delta_{\eta_0}^{1/2}$ , ce qui est immédiat.

**LEMME 2.4.** — *Avec les notations des lemmes 2.2 et 2.3, il existe une unitaire unique  $\nu \in M'$  tel que*

$$(8) \quad J_{\eta_0} (1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} = \nu \otimes f_{12}$$

et on a :

$$(9) \quad J_{\xi_2, \xi_1} = \varphi J_{\xi_1}, \quad J_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_2} \varphi^*, \quad J_{\xi_2} = \varphi J_{\xi_1} \varphi^*$$

*Démonstration.* — On a  $J_{\eta_0}^2 = 1$  donc

$$J_{\xi_2, \xi_1} J_{\xi_1, \xi_2} = J_{\xi_1, \xi_2} J_{\xi_2, \xi_1} = 1$$

Pour  $\xi_{ij} \in \mathcal{H}$ ,  $i, j = 1, 2$  on a :

$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{11}) J_{\eta_0}(\Sigma \xi_{ij} \otimes \varepsilon_{ij}) = \xi_{11} \otimes \varepsilon_{11} + (J_{\xi_1, \xi_2} J_{\xi_2, \xi_1} \xi_{21}) \otimes \varepsilon_{21}.$$

De même  $J_{\eta_0}(1 \otimes e_{22}) J_{\eta_0} = 1 \otimes f_{22}$ . Comme

$$J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} \in M' \otimes F'$$

il existe un unitaire  $\varphi \in M'$  tel que  $J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} = \varphi \otimes f_{12}$ . On obtient

$$\begin{aligned} J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21})(\xi \otimes \varepsilon_{11}) &= J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{21}) = J_{\xi_2, \xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{12} \\ J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{11}) &= (\varphi \otimes f_{12}) J_{\xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{11} = \varphi J_{\xi_1} \xi \otimes \varepsilon_{12} \end{aligned}$$

pour tout  $\xi \in \mathcal{H}$ . De même,

$$\begin{aligned} J_{\xi_2} \xi \otimes \varepsilon_{22} &= J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{22}) = J_{\eta_0}(1 \otimes e_{21}) J_{\eta_0} J_{\eta_0}(\xi \otimes \varepsilon_{12}) \\ &= (\varphi \otimes f_{12}) J_{\xi_1} \varphi^* \xi \otimes \varepsilon_{21} = \varphi J_{\xi_1} \varphi^* \xi \otimes \varepsilon_{22} \end{aligned}$$

d'où les égalités (9). L'unitaire unique  $\varphi$  défini dans le lemme 2.4 sera noté  $\theta_M(\xi_2, \xi_1)$  (déphasage spatial de  $\xi_2$  par rapport à  $\xi_1$ ). On montre facilement que pour tout triplet  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  de vecteurs totalisateurs et séparateurs pour  $M$  dans  $\mathcal{H}$  on a  $\theta(\xi_3, \xi_1) = \theta(\xi_3, \xi_2)\theta(\xi_2, \xi_1)$ .

**LEMME 2.5.** — Soient  $\mathcal{H}$ ,  $M$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  comme dans le lemme 2.2,  $u$  un unitaire de  $M'$ .

- a) On a  $\theta(u\xi_2, \xi_1) = u\theta(\xi_2, \xi_1)$ .
- b) Si  $\theta(\xi_2, \xi_1) = 1$ , posons  $J = J_{\xi_1} = J_{\xi_2}$  (9) et  $\tilde{x} = Jx^*J$  pour tout  $x \in M$  alors (10)  $\langle x\tilde{x}^*\xi_1, \xi_2 \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in M$ .

*Démonstration.* — a) On a  $S_{u\xi_2, \xi_1} = uS_{\xi_2, \xi_1}$ ,  $J_{u\xi_2, \xi_1} = uJ_{\xi_2, \xi_1}$  d'où a) en utilisant (9).

b) Montrons (10) c'est-à-dire montrons que pour tout  $x \in M$  on a  $\langle x\xi_1, Jx^*\xi_2 \rangle \geq 0$ . On a  $Jx^*\xi_2 = J_{\xi_2}^{-1} S_{\xi_2, \xi_1} x \xi_1$  donc l'inégalité cherchée résulte de la positivité de l'opérateur  $\Delta_{\xi_2, \xi_1}^{1/2}$ .

DÉFINITION 2.6. — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ ,  $J_{\xi_0}$  l'involution isométrique correspondante, et pour tout  $x \in M$ ,

$$\tilde{x} = J_{\xi_0}x^*J_{\xi_0}.$$

On pose  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square} = \{x\tilde{x}^*\xi_0, x \in M\}^-$  et  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}$  est appelé cône autopolaire associé à  $M$  et  $\xi_0$  (cf. Thm. 2.7).

Le théorème 2.1 est une conséquence immédiate du théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ ,  $J = J_{\xi_0}$  et  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\#}$  comme dans la définition 2.6,  $\varphi = \omega_{\xi_0}$  et  $s$  la forme autopolaire associée à  $\varphi$  par (1).

a) Soit  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\#} = \{M^+\xi_0\}^-$  ([10]), alors

$$\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square} = \{\Delta_{\xi_0}^{1/4}\mathcal{P}_{\xi_0}^{\#}\}^- = \{\Delta_{\xi_0}^{1/4}M^+\xi_0\}^-.$$

b) L'application qui à  $\eta_s(x)$ ,  $x \in M$ , associe  $\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0$  se prolonge en une isométrie  $V$  de  $\mathcal{H}_s$  sur  $\mathcal{H}$  telle que

$$V\mathcal{H}_s^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}.$$

c)  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}$  est un cône convexe fermé autopolaire; autrement dit  $(\langle \xi, \eta \rangle \geq 0 \ \forall \eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}) \iff (\xi \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square})$ .

d) Soit  $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ , alors  $\theta(\xi_1, \xi_0) = 1$ .

e) Soit  $\xi_1$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$  tel que  $\theta(\xi_1, \xi_0) = 1$ ; alors  $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}$ ,  $\mathcal{P}_{\xi_1}^{\square} = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}$ .

f) Soit  $\varphi_1$  une forme linéaire positive normale fidèle sur  $M$ ; il existe un vecteur totalisateur et séparateur  $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}$  unique tel que  $\omega_{\xi_1} = \varphi_1$ .

Démonstration. — a) La restriction de  $\Delta_{\xi_0}^{1/4}$  à l'espace vectoriel réel des  $\xi \in D_{\xi_0}^{\#}$ ,  $S_{\xi_0}\xi = \xi$  est continue.

L'assertion a) résultera donc de l'égalité

$$\{\Delta_{\xi_0}^{1/4}M^+\xi_0\}^- = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square}.$$

Rappelons que  $\mathcal{A} = M\xi_0$  est muni d'une structure d'algèbre hilbertienne à gauche ([10]) telle que  $x\xi_0y\xi_0 = xy\xi_0$  pour

$x, y \in M$ , et  $(x\xi_0)^\# = x^*\xi_0$  pour  $x \in M$ . Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre hilbertienne modulaire contenue dans  $\mathcal{A}$ , équivalente à  $\mathcal{A}$  au sens de [10];  $\mathcal{B}$  est stable par  $\Delta_{\xi_0}^z$ ,  $z \in \mathbf{C}$  et pour  $\xi_1, \xi_2$ ,  $\Delta_{\xi_0}^z \xi_1 \xi_2 = \Delta_{\xi_0}^z \xi_1 \Delta_{\xi_0}^z \xi_2$ . Le théorème de densité de Kaplansky montre que l'ensemble des  $y\tilde{y}^*\xi_0$ ,  $y\xi_0 \in \mathcal{B}$  est dense dans  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\square$ , et que l'ensemble des  $x^*x\xi_0$ ,  $x\xi_0 \in \mathcal{B}$  est dense dans  $M + \xi_0$ . Si  $y\xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*\xi_0$  on a :

$$y\tilde{y}^*\xi_0 = yJy\xi_0 = (\Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*\xi_0)(\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0) = \Delta_{\xi_0}^{1/4}x^*x\xi_0$$

d'où a).

b) On a

$$\langle \eta_s(x), \eta_s(y) \rangle = \langle \Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0, \Delta_{\xi_0}^{1/4}y\xi_0 \rangle,$$

donc b) résulte de l'assertion a).

c) Soit  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0}$  le polaire de  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\square$  dans  $\mathcal{H}$ .

On a pour  $t \in \mathbf{R}$  l'égalité

$$\Delta_{\xi_0}^{it}\mathcal{P}_{\xi_0}^\square = \mathcal{P}_{\xi_0}^\square,$$

donc  $\Delta_{\xi_0}^{it}\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0} = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0}$  et  $(\int f(t)\Delta_{\xi_0}^{it} dt)(\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0}) \subset \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0}$  pour toute  $f \in L^1(\mathbf{R})$ ,  $f \geq 0$ .

Ainsi l'intersection de  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0}$  avec le domaine de  $\Delta_{\xi_0}^z$  est dense dans  $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0}$ , quel que soit  $z \in \mathbf{C}$ . Pour

$$\eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\square 0} \cap D_{om}(\Delta_{\xi_0}^{-1/4})$$

et  $\xi \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\#$  on a  $\langle \Delta_{\xi_0}^{-1/4}\eta, \Delta_{\xi_0}^{1/2}\xi \rangle = \langle \eta, \Delta_{\xi_0}^{1/4}\xi \rangle \geq 0$ .

Comme  $\Delta_{\xi_0}^{1/2}\mathcal{P}_{\xi_0}^\# = \mathcal{P}_{\xi_0}^{\# 0}$  ([10]) on a  $\Delta_{\xi_0}^{-1/4}\eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\#$  et  $\eta \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$ .

d) On a  $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$ , donc  $\langle \xi_1, xJ_{\xi_0}x\xi_0 \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in M$ . Ainsi :  $\langle S_{\xi_1, \xi_0}x\xi_0, J_{\xi_0}x\xi_0 \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in M$  donc  $\langle J_{\xi_0}S_{\xi_1, \xi_0}\eta, \eta \rangle \geq 0$  pour tout  $\eta \in D_{om}(S_{\xi_1, \xi_0})$ .

Le lemme 2.2 montre que l'adjoint de  $S_{\xi_1, \xi_0}$  est la fermeture de l'opérateur de domaine  $M'\xi_0$  qui à  $y\xi_0$   $y \in M'$  associe  $y^*\xi_1$ . Pour  $y \in M'$  on a

$$\langle y^*\xi_1, J_{\xi_0}y\xi_0 \rangle = \langle \xi_1, (J_{\xi_0}yJ_{\xi_0})J_{\xi_0}(J_{\xi_0}yJ_{\xi_0})\xi_0 \rangle \geq 0$$

donc on a  $\langle (J_{\xi_0}S_{\xi_1, \xi_0})^*\eta, \eta \rangle \geq 0$  pour tout  $\eta$  dans le domaine de  $(J_{\xi_0}S_{\xi_1, \xi_0})^*$ . Par unicité de décomposition polaire de  $S_{\xi_1, \xi_0}$  on a  $J_{\xi_1, \xi_0} = J_{\xi_0}$  et d).

e) Le lemme 2.5 b) montre que  $J_{\xi_0} = J_{\xi_1}$ ; d'après 2.7 c),  $\xi_1$  est limite d'éléments de la forme  $xx^*\xi_0$  car  $\xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$ . Pour tout  $y \in M$ ,  $y\bar{y}^*\xi_1$  est limite d'éléments de la forme  $y\bar{y}^*xx^*\xi_0 = yx(yx)^*\sim\xi_0$  donc est dans  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\square$ .

L'égalité  $\mathcal{P}_{\xi_1}^\square = \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$  en résulte.

f) L'existence de  $\xi_1$  résulte facilement du lemme 2.5 a) et de e). Soit  $\xi_2$  tel que  $\omega_{\xi_2} = \omega_{\xi_1}$ , avec  $\xi_2$  séparateur et totalisateur pour  $M$ . Il existe alors un unitaire  $u \in M'$  tel que  $\xi_2 = u\xi_1$ . Le lemme 2.5 a) montre qu'alors  $\theta(\xi_2, \xi_0) = u$ . En particulier (d)) si  $\xi_2 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$  on a  $u = 1$  et  $\xi_2 = \xi_1$ .

**COROLLAIRE 2.8.** — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann,  $s_1$  et  $s_2$  deux formes autopolaires sur  $M$ ,  $\varepsilon > 0$ . Il existe un  $h \in M$ , positif et inversible, tel que :

$$|s_1(hxh, hyh) - s_2(x, y)| \leq \varepsilon \|x\| \|y\| \quad \forall x, y \in M$$

*Démonstration.* — Soient  $\mathcal{H}$  un espace hilbertien dans lequel  $M$  admet deux vecteurs séparateurs et totalisateurs  $\xi_1$  et  $\xi_2$  tels que :

$\mathcal{P}_{\xi_1}^\square = \mathcal{P}_{\xi_2}^\square$ ,  $s_j(x, y) = \langle \Delta_{\xi_j}^{1/2}x\xi_j, y\xi_j \rangle$ ,  $j = 1, 2$ ,  $x, y \in M$ . Soit  $J = J_{\xi_1} = J_{\xi_2}$ ; pour  $x, y \in M$  on a

$$s_2(x, y) = \langle x\xi_2, Jy^*\xi_2 \rangle = \langle xJyJ\xi_2, \xi_2 \rangle$$

et pour  $h \in M$ ,  $h = h^*$

$$s_1(hxh, hyh) = \langle hxhJhyhJ\xi_1, \xi_1 \rangle = \langle xJyJhJhJ\xi_1, hJhJ\xi_1 \rangle$$

Le corollaire 2.8 résulte donc du lemme suivant :

**LEMME 2.9.** — Soient  $M, \xi_0, J, \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$  comme dans 2.6 alors :

$$\mathcal{P}_{\xi_0}^\square = \{hJhJ\xi_0, h \in M_+\}$$

*Démonstration.* — Soit  $y \in M_+$  inversible, montrons que  $\Delta_{\xi_0}^{1/2}y\xi_0$  est limite d'éléments de la forme  $bJb\xi_0$ ,  $b \in M_+$ . Soit  $u = \theta_M(y^{1/2}\xi_0, \xi_0)$ ; on a  $u \in M$ ,  $u^*y^{1/2}\xi_0 = \xi_1 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$ . Soient  $a = u^*y^{1/2}$  et  $(a_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) une suite d'éléments de  $M$ , analytiques pour le groupe d'automorphismes modulaires  $\sigma_t$  de  $\omega_{\xi_0}$  et de la forme  $\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\sigma_t(a) dt$  avec  $f_n \geq 0$ ,

$f_n \in L^1(\mathbf{R})$ , telle que  $a_n \rightarrow a$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , pour la topologie \* forte.

On a  $a_n \xi_0 = \int f_n(t) \Delta_{\xi_0}^{it} a \xi_0$  donc  $\Delta_{\xi_0}^{1/4} b_n \xi_0 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\perp}$ ,  $\forall n$ , où  $b_n = \sigma_{i/4}(a_n)$ . Ainsi  $b_n \xi_0 \in \mathcal{P}_{\xi_0}^{\#}$  et  $b_n \geq 0$ .

On a  $J b_n \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/2} b_n \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} a_n \xi_0$  donc

$$b_n J b_n J \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} a_n^* a_n \xi_0$$

converge vers  $\Delta_{\xi_0}^{1/4} a^* a \xi_0 = \Delta_{\xi_0}^{1/4} y \xi_0$ , quand  $n \rightarrow \infty$ .

### 3. Groupe des transformations linéaires du cône autopolaire associé à une algèbre de von Neumann.

Soient  $M_j$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}_j$ ,  $\xi_j$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M_j$ ,  $\mathcal{H}_j^+ = \mathcal{P}_{\xi_j}^{\perp}$  le cône autopolaire correspondant.

THÉORÈME 3.1. — (Isomorphismes d'algèbres).

Soit  $\Phi$  un isomorphisme de l'algèbre  $M_1$  sur l'algèbre  $M_2$  (pas nécessairement un \*-isomorphisme). Il existe alors une application linéaire  $L = L_\Phi$  unique de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$  telle que :  $\Phi(x) = LxL^{-1} \forall x \in M_1$ .

THÉORÈME 3.2. — (Isomorphismes de Jordan.)

Soit  $\alpha$  un \*-isomorphisme de Jordan de l'algèbre  $M_1$  sur l'algèbre  $M_2$ . Alors il existe une isométrie unique  $U_\alpha$  de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$  telle que  $\langle \alpha(x)\xi, \xi \rangle = \langle xU_\alpha^{-1}\xi, U_\alpha^{-1}\xi \rangle$  pour tout  $\xi \in \mathcal{H}_2^+$  et tout  $x \in M_1$ .

THÉORÈME 3.3. — (Isomorphismes des espaces ordonnés.)

Soit  $L$  une bijection linéaire de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$  et soit  $L = UT$  la décomposition polaire de  $L$ .

Il existe un isomorphisme de Jordan unique  $\alpha$  de  $M_1$  sur  $M_2$  tel que  $U = U_\alpha$ .

Il existe un opérateur positif inversible unique  $h \in M_1$  tel que  $T = hJhJ$ .

THÉORÈME 3.4. — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ ,

$\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi}^\perp$  et  $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ,  $J = J_\xi$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $e^{t\delta}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

b)  $J\delta = \delta J$  et  $[\delta, M] \subset M$ .

c) Il existe  $x \in M$  tel que  $\delta = x + JxJ$ .

Pour tout  $\xi \in \mathcal{H}_j^+$ , séparateur (et totalisateur) pour  $M_j$ , soit  $b_\xi$  l'application  $x \rightarrow b_\xi(x) = \Delta_{\xi}^{1/4}x\xi$  de  $M_j$  dans  $\mathcal{H}_j$ .

LEMME 3.5. — Soit  $\alpha$  un \*-isomorphisme de  $M_1$  sur  $M_2$ . Il existe une isométrie  $U_\alpha$  de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$  telle que :

a) pour tout  $\xi \in \mathcal{H}_1^+$  séparateur et totalisateur pour  $M_1$  on a, pour tout  $x \in M_2$  :

$$\langle xU_\alpha\xi, U_\alpha\xi \rangle = \langle \alpha^{-1}(x)\xi, \xi \rangle$$

b) Pour tout  $\xi$  comme dans a) on a  $U_\alpha b_\xi(x) = b_{U_\alpha\xi}(\alpha(x))$  pour tout  $x \in M_1$ .

c) On a  $U_\alpha x U_\alpha^* = \alpha(x)$  pour tout  $x \in M_1$ .

Démonstration. — Soit  $U_1$  une isométrie de  $\mathcal{H}_1$  sur  $\mathcal{H}_2$  telle que  $\alpha(x) = U_1 x U_1^*$  pour tout  $x \in M_1$ . Comme

$$\theta(U_1\xi_1, \xi_2) \in M'_2$$

on peut supposer que  $\theta(U_1\xi_1, \xi_2) = 1$  donc que  $U_1\xi_1 \in \mathcal{H}_2^+$ . Comme  $U_1 M_1 U_1^* = M_2$  on a

$$S_{U_1\xi_1} = U_1 S_{\xi_1} U_1^*, \quad J_{U_1\xi_1} = U_1 J_{\xi_1} U_1^*$$

donc  $\mathcal{P}_{U_1\xi_1}^\perp = U_1 \mathcal{P}_{\xi_1}^\perp$ . Ainsi  $U_1 \mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}_2^+$  et on a trouvé une isométrie de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$  vérifiant c).

On déduit facilement a) et b) de la condition c).

LEMME 3.6. — Soit  $e$  un projecteur du centre de  $M_1$ . On suppose que  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ ,  $\xi_1 = \xi_2$  et que  $M_2$  est l'image de  $M_1$  par l'application  $\beta$  définie par  $\beta(x) = ex + (1 - e)Jx^*J$  pour tout  $x \in M_1$ .

Alors l'isométrie  $U_\beta = 1$  vérifie les conditions a) et b) du lemme 3.5 relativement à l'isomorphisme de Jordan  $\beta$  de  $M_1$  sur  $M_2$ .

*Démonstration.* — On vérifie facilement que  $\mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}_2^+$ . Soit  $\xi \in \mathcal{H}_1^+$  totalisateur et séparateur pour  $M_1$ . On a

$$\begin{aligned}\langle \beta(x)\xi, \xi \rangle &= \langle ex\xi, \xi \rangle + \langle J(1-e)x^*J\xi, \xi \rangle \\ &= \langle (e + (1-e))x\xi, \xi \rangle = \langle x\xi, \xi \rangle\end{aligned}$$

pour tout  $x \in M_1$ . L'opérateur modulaire relatif à  $\xi_2$  et  $M_2 = eM_1 + (1-e)M'_1$  est égal à  $e\Delta_{\xi_1} + (1-e)\Delta_{\xi_1}^{-1}$  avec les notations évidentes. L'égalité 3.5 b) résulte donc de :

$$\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1 = (e\Delta_{\xi_1}^{1/4} + (1-e)\Delta_{\xi_1}^{-1/4})(ex + (1-e)Jx^*J)\xi_1$$

pour tout  $x \in M_1$ .

**LEMME 3.7.** — Soit  $U$  une isométrie de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$  telle que  $\langle UxU^*\xi, \xi \rangle = \langle x\xi, \xi \rangle$  pour  $x \in M_1$  et  $\xi \in \mathcal{H}_1^+$ .

Alors  $U = 1$ .

*Démonstration.* — Soit  $\xi$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$  avec  $\xi \in \mathcal{H}_1^+$ . Alors  $U^*\xi$  est un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$  car  $U^*\xi \in \mathcal{H}_1^+$  et la face qu'il engendre dans  $\mathcal{H}_1^+$  est totale dans  $\mathcal{H}_1$ . Le théorème 2.7 f) montre donc que  $U^*\xi = \xi$ .

*Démonstration du théorème 3.1.* — Le corollaire 4.1.21 de [9] montre qu'il existe un  $*$ -isomorphisme  $\Phi_1$  de  $M_1$  sur  $M_2$  et un opérateur inversible  $h \in M_1$  tels que pour tout  $x \in M_1$ ,  $\Phi(x) = \Phi_1(hxh^{-1})$ . Le lemme 3.5 montre qu'il existe une isométrie  $U$  de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$  telle que

$$\Phi(x) = (UhJhJ)x(UhJhJ)^{-1}$$

pour tout  $x \in M_1$ . Il suffit donc de poser  $L = UhJhJ$  pour obtenir l'assertion d'existence dans 3.1. L'unicité résulte du lemme 3.7.

*Démonstration du théorème 3.2.* — Il existe ([7], p. 334) un projecteur  $e$  du centre de  $M_1$  tel que la restriction de  $\alpha$  à  $M_{1,e}$  soit multiplicatice et que la restriction de  $\alpha$  à  $M_{1,1-e}$  soit antimultiplicatice. Il suffit alors d'appliquer les lemmes 3.5 et 3.6 en utilisant l'algèbre de von Neumann

$$M_{1,e} + M'_{1,1-e}$$

comme intermédiaire.

*Remarque 3.8.* — Soient  $\alpha$  et  $U_\alpha$  comme dans le théorème 3.2 et  $\xi \in \mathcal{H}_1^+$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M_1$ . On a alors :

$$U_\alpha b_\xi(x) = b_{U_\alpha \xi}(\alpha(x)) \quad \text{pour tout } x \in M_1$$

*Démonstration du théorème 3.3.* — Soit d'abord  $U$  une isométrie de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$ . Le vecteur  $U\xi_1$  est totalisateur et séparateur pour  $M_2$ ; on peut donc supposer  $\xi_2 = U\xi_1$ . On a alors  $U([0, \xi_1]) = [0, \xi_2]$  et il existe une application linéaire  $\alpha$  de  $M_1$  sur  $M_2$  telle que  $Ub_{\xi_1}(x) = b_{\xi_2}(\alpha(x))$  pour tout  $x \in M_1$  (proposition 1.2 c)). Comme  $\alpha$  vérifie les hypothèses du lemme 1.6, c'est un  $*$ -isomorphisme de Jordan de  $M_1$  sur  $M_2$ .

Pour tout  $x \in M_1$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \alpha(x)\xi_2, \xi_2 \rangle &= \langle b_{\xi_2}(\alpha(x)), \xi_2 \rangle = \langle Ub_{\xi_1}(x), \xi_2 \rangle \\ &= \langle b_{\xi_1}(x), \xi_1 \rangle = \langle x\xi_1, \xi_1 \rangle \end{aligned}$$

donc  $U_\alpha^*\xi_2 = \xi_1$ . On a donc  $U_\alpha b_{\xi_1}(x) = b_{\xi_1}(\alpha(x)) = Ub_{\xi_1}(x)$  pour tout  $x \in M_1$  et  $U = U_\alpha$ . Soit  $L$  une bijection linéaire de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_2^+$ ; comme  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont autopolaires  $L^*$  est une bijection linéaire de  $\mathcal{H}_2^+$  sur  $\mathcal{H}_1^+$  et  $L^*L$  une bijection linéaire positive de  $\mathcal{H}_1^+$  sur  $\mathcal{H}_1^+$ . Le théorème suivant montre qu'il en est de même de  $(L^*L)^\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et achève la démonstration du théorème 3.3.

**THÉORÈME 3.9.** — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ ,  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}$ . Pour tout opérateur positif inversible de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$  tel que  $T\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$  il existe un  $h \in M$  tel que  $T = hJhJ$ . On vérifie facilement que  $h$  est unique et nécessairement inversible.

**LEMME 3.10.** — Soient  $M$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\xi$ ,  $\mathcal{H}^+$  comme ci-dessus et  $b$  une application linéaire de  $M$  dans  $\mathcal{H}$  telle que  $b(M_+)$  soit une face dense de  $\mathcal{H}_+$ . Il existe alors une isométrie  $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  telle que  $U\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_+$  et un  $\xi_2 \in \mathcal{H}_+$ , séparateur et totalisateur pour  $M$  tels que :

$$b(x) = Ub_{\xi_2}(x) \quad \text{pour tout } x \in M.$$

*Démonstration.* — Comme  $b(M_+)$  est dense dans  $\mathcal{H}^+$ , l'intervalle  $[0, b(1)]$  est total dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $\xi_1 = b(1)$  et soit  $x \in M$ ;  $xJxJ\xi_1 = 0$  implique  $xJxJ = 0$  donc  $x = 0$ . Ainsi  $\xi_1$  est séparateur et totalisateur pour  $M$ , car  $J\xi_1 = \xi_1$ . L'application  $b_{\xi_1}, b_{\xi_1}(x) = \Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1$  est un isomorphisme de  $M^+$  sur la face de  $\xi_1$  dans  $\mathcal{H}^+$ . Il existe donc une bijection linéaire  $\alpha$  de  $M_+$  sur  $M_+$  telle que  $\alpha(1) = 1$  et que

$$b(x) = b_{\xi_1}(\alpha(x))$$

pour tout  $x \in M_+$ . Soit  $\xi_2 = U_\alpha^{-1}\xi_1$ ; on a

$$U_\alpha b_{\xi_2}(x) = b_{\xi_1}\alpha(x) = b(x)$$

pour tout  $x \in M$ .

**LEMME 3.11.** — Soient  $M, \mathcal{H}, \xi_0, \mathcal{H}^+$  et  $T$  comme dans 3.9. Il existe alors un  $\xi_2 \in \mathcal{H}^+$  totalisateur et séparateur pour  $M$  tel que l'opérateur  $\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0 \rightarrow \Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2$ , soit borné, inversible et de module égal à  $T$ .

*Démonstration.* — L'application  $b = Tb_{\xi_0}$  est un isomorphisme de  $M_+$  sur une face dense de  $\mathcal{H}^+$  donc il existe  $U$  et  $\xi_2$  vérifiant les conditions 3.10. On a

$$U^*T\Delta_{\xi_0}^{1/4}x\xi_0 = \Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2$$

pour tout  $x \in M$ . L'opérateur  $U^*T$  étant borné et inversible on a 3.11.

**LEMME 3.12.** — Soient  $P$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\eta_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $P$ ,  $\varphi = \omega_{\eta_0}$  et  $a \in P$  tel que la fonction  $t \rightarrow \sigma_t^\varphi(a)$  se prolonge en une fonction analytique  $z \rightarrow \sigma_z^\varphi(a)$  de  $D_{-1/4} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \in [-1/4, 0]\}$  dans  $M$ , continue dans  $D_{-1/4}$ . Alors pour tout  $x \in P$  on a

$$\sigma_{-i/4}^\varphi(a)J_{\eta_0}\sigma_{-i/4}^\varphi aJ_{\eta_0}\Delta_{\eta_0}^{1/4}x\xi_0 = \Delta_{\eta_0}^{1/4}axa^*\eta_0.$$

*Démonstration.* — Soient  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in P$ ,  $J = J_{\eta_0}$  on a

$$\sigma_t(a)\Delta^{it}x^*\eta_0 = \Delta^{it}ax^*\eta_0$$

donc

$$\sigma_{-i/4}(a)\Delta^{1/4}x^*\eta_0 = \Delta^{1/4}ax^*\eta_0$$

et

$$\sigma_{-i/4}(a)J\Delta^{1/4}x\eta_0 = \Delta^{1/4}ax^*\eta_0.$$

Remplaçant  $x$  par  $ax^*$  on obtient

$$\sigma_{-i/4}(a)J\Delta^{1/4}ax^*\eta_0 = \Delta^{1/4}axa^*\eta_0$$

et l'égalité cherchée.

**LEMME 3.13.** — Soient  $M$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^+$ ,  $J$  comme dans 3.9,  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^+$  séparateurs (et totalisateurs) pour  $M$ ,  $\varphi_1 = \omega_{\xi_1}$ ,  $\varphi_2 = \omega_{\xi_2}$ ,  $s_1$  et  $s_2$  les formes autopolières associées à  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  respectivement. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) L'application  $t \rightarrow u_t = (D\varphi_2 : D\varphi_1)_t$  se prolonge analytiquement à  $D_{-1/4}$  et continûment à  $D_{-1/4}$  avec  $\|u_z\| \leq 1 \forall z \in D_{-1/4}$  (cf. [4]).
- b)  $\|\Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2\| \leq \|\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1\| \forall x \in M$ .
- c)  $s_2(x, x) \leq s_1(x, x) \forall x \in M$ .
- d)  $s_2(x, x) \leq s_1(x, x) \forall x \in M_+$ .
- e)  $\xi_2 \leq \xi_1 (\mathcal{H}^+)$ .

*Démonstration.* — a)  $\Rightarrow$  b). Reprenons les notations de 2.4. On a  $\theta(\xi_2, \xi_1) = 1$ ,  $J_{\xi_i} = J_{\xi_i, \xi_i} = \dots = J$ ,  $J_{\eta_0} = \sum U_{ij}JU_{ji}^*$   $i, j = 1, 2$ . Par hypothèse  $a = 1 \otimes e_{21}$  vérifie les conditions du lemme 3.13 et ([4])  $\sigma_{-i/4}(a) = u_{-i/4} \otimes e_{21}$ . Ainsi pour tout  $x \in M$

$$(u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}(u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}\Delta_{\xi_2}^{1/4}(x \otimes e_{11})\eta_0 \\ = \Delta_{\eta_0}^{1/4}(1 \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{12})\eta_0.$$

On a  $(x \otimes e_{11})\eta_0 = x\xi_1 \otimes \varepsilon_{11}$  donc le premier membre de l'égalité ci-dessus s'écrit :

$$(u_{-i/4} \otimes e_{21})J_{\eta_0}(u_{-i/4} \otimes e_{21})[\Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2 \otimes \varepsilon_{11}] \\ = (u_{-i/4}Ju_{-i/4}J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1) \otimes \varepsilon_{22}$$

d'où l'égalité

$$(11) \quad \Delta_{\xi_2}^{1/4}x\xi_2 = u_{-i/4}Ju_{-i/4}J\Delta_{\xi_1}^{1/4}x\xi_1.$$

b)  $\Rightarrow$  c) et c)  $\Rightarrow$  d) sont immédiats.

d)  $\Rightarrow$  e). On a par hypothèse  $\langle hJhJ\xi_2, \xi_2 \rangle \leq \langle hJhJ\xi_1, \xi_1 \rangle$  pour tout  $h \in M_+$ . Soit  $H = hJhJ$  pour  $h \in M_+$ ; comme

$H$  est positif, on a (inégalité de Schwartz) :

$$|\langle H\xi_1, \xi_2 \rangle|^2 \leq \langle H\xi_1, \xi_1 \rangle \langle H\xi_2, \xi_2 \rangle$$

et comme  $\langle H\xi_1, \xi_2 \rangle \geq 0$  et  $\langle H\xi_2, \xi_2 \rangle \leq \langle H\xi_1, \xi_1 \rangle$  il vient :

$$\langle H\xi_1, \xi_2 \rangle \leq \langle H\xi_1, \xi_1 \rangle \text{ et } \langle hJhJ\xi_1, \xi_1 - \xi_2 \rangle \geq 0$$

Le lemme 2.19 montre alors que  $\xi_2 \leq \xi_1 (\mathcal{H}^+)$ .

e)  $\Rightarrow$  a). Reprenons les notations de 2.4. On a

$$S_{\xi_0, \xi_1} = J\Delta_{\xi_0, \xi_1}^{1/2}$$

donc pour tout  $x \in M$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\xi_0, \xi_1}^{1/2} x \xi_1, x \xi_1 \rangle &= \langle Jx^* \xi_2, x \xi_1 \rangle = \langle \xi_2, Jx Jx \xi_1 \rangle \\ &\leq \langle \xi_1, Jx Jx \xi_1 \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $\xi$  dans le domaine de  $\Delta_{\xi_1}^{1/4}$  on a

$$\| \Delta_{\xi_0, \xi_1}^{1/4} \xi \| \leq \| \Delta_{\xi_1}^{1/4} \xi \|.$$

La fonction  $t \rightarrow \Delta_{\xi_0, \xi_1}^{it} \Delta_{\xi_1}^{-it}$  se prolonge donc analytiquement à  $D_{-1/4}$  continûment à  $\bar{D}_{-1/4}$  avec une norme  $\leq 1$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $\xi \in \mathcal{H}$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_0, \xi_1}^{it} \xi \otimes \varepsilon_{21} &= \Delta_{\eta_0}^{it} (\xi \otimes \varepsilon_{21}) = \Delta_{\eta_0}^{it} (1 \otimes e_{21}) \Delta_{\eta_0}^{-it} (\Delta_{\eta_0}^{it} (\xi \otimes \varepsilon_{11})) \\ &= (u_t \otimes e_{21}) (\Delta_{\xi_1}^{-it} \xi \otimes \varepsilon_{11}). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta_{\xi_0, \xi_1}^{-it} \Delta_{\xi_1}^{it} = u_t$ .

*Démonstration du théorème 3.9.* — Le lemme 3.11 montre que  $T$  est le module d'un opérateur de la forme

$$\Delta_{\xi_0}^{1/4} x \xi_0 \rightarrow \Delta_{\xi_0}^{1/4} x \xi_2, x \in M.$$

Les conditions équivalentes du lemme 3.13 montrent, en appliquant l'égalité 11 que  $T$  est le module d'un opérateur de la forme  $XJXJ$ ,  $X \in M$ . On a donc  $T = hJhJ$ , où  $h$  est le module de  $X$ .

*Démonstration du théorème 3.4.* — a)  $\Rightarrow$  b) : L'ensemble  $D(\mathcal{H}^+)$  des  $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tels que  $e^{i\delta} \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ ,  $\forall t$ , est un sous-espace vectoriel réel auto-adjoint de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  (formule de Trotter) on peut donc supposer que  $\delta = \delta^*$  ou  $\delta = -\delta^*$ . Si  $\delta = \delta^*$  le théorème 3.9 montre qu'il existe un groupe à

un paramètre  $t \rightarrow h_t$  d'opérateurs positifs inversibles de  $M$  tels que  $e^{t\delta} = h_t J h_t^{-1}$   $\forall t \in \mathbf{R}$ . D'où  $e^{t\delta} M e^{-t\delta} = M$  et

$$[\delta, M] \subset M.$$

Si  $\delta = -\delta^*$  il existe (théorème 3.3) pour tout  $t \in \mathbf{R}$  un isomorphisme de Jordan  $\alpha_t$  de  $M$  sur  $M$  tel que  $e^{t\delta} = U_{\alpha_t}$ . Comme  $\delta$  est borné l'application  $t \rightarrow U_{\alpha_t}$  est continue en norme et le théorème 3.2 montre que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $t_0 > 0$  tel que pour  $t$ ,  $|t| \leq t_0$  on ait :

$$\|\alpha_t(x) - x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

Il est donc clair que le centre de  $M$  est invariant par les  $\alpha_t$  et, comme  $\alpha_t = (\alpha_{t/2})^2$ , que chaque  $\alpha_t$  est un automorphisme de  $M$ . On a alors  $U_{\alpha_t} M U_{\alpha_t}^{-1} = M$  et  $[\delta, M] \subset M$ .

b)  $\Rightarrow$  c) Par hypothèse l'application  $x \rightarrow [\delta, x]$  est une dérivation de  $M$  il existe donc  $h \in M$  ([9]) tel que

$$\delta - h \in M'.$$

Alors  $\delta - (h + JhJ)$  commute avec  $M$  et  $M'$  donc appartient à  $M \cap M'$  et commute avec  $J$ . Il existe donc un  $x \in M$  tel que  $\delta = x + JxJ$ .

c)  $\Rightarrow$  a) On a, comme  $x$  et  $JxJ$  commutent :

$$e^{t(x+JxJ)} = e^{tx} J e^{tx} J$$

#### 4. Propriétés du cône autopolaire associé à une algèbre de von Neumann.

**PROPOSITION 4.1.** — Soient  $\mathcal{H}$  un espace hilbertien complexe,  $\mathcal{H}^+$  un cône convexe autopolaire dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}^\mathbf{J} = (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}^+)^-$ .

a)  $\mathcal{H}^\mathbf{J}$  est un espace hilbertien réel dans lequel  $\mathcal{H}^+$  est autopolaire.

b)  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\mathbf{J} \oplus i\mathcal{H}^\mathbf{J}$  et l'application qui à  $\xi_1 + i\xi_2$ ,  $\xi_j \in \mathcal{H}^\mathbf{J}$  associe  $J(\xi_1 + i\xi_2) = \xi_1 - i\xi_2$  est une involution isométrique de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}$ .

c) Pour tout  $\xi \in \mathcal{H}^\mathbf{J}$  il existe  $\xi^+, \xi^- \in \mathcal{H}^+$  tels que

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad \xi^+ \perp \xi^-.$$

d) Pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$ , l'ensemble

$$F^\perp = \{\xi \in \mathcal{H}^+, \xi \perp \eta, \forall \eta \in F\}$$

est une face fermée de  $\mathcal{H}^+$ .

Démonstration. — a) Pour  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$  on a  $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle \in \mathbb{R}$ .

b) Comme  $\mathcal{H}^+$  est autopolaire il est total dans  $\mathcal{H}$  donc  $\mathcal{H}^J + i\mathcal{H}^J$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . Pour  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$  on a  $\text{Re}\langle \xi_1, i\xi_2 \rangle = 0$  donc  $i\mathcal{H}^J$  est orthogonal à  $\mathcal{H}^J$  pour la structure réelle sous-jacente à  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}^J + i\mathcal{H}^J$  est fermé donc égal à  $\mathcal{H}$ .

c) Soient  $\xi^+$  la projection orthogonale de  $\xi$  sur  $\mathcal{H}^+$ ,  $\xi^- = \xi^+ - \xi$ . On a par construction  $\langle \xi^-, \eta \rangle \geq 0, \forall \eta \in \mathcal{H}^+$  donc  $\xi^- \in \mathcal{H}^+$ ,  $\xi^+ \perp \xi^-$ .

d) Immédiat.

THÉORÈME 4.2. — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ ,  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$ .

a) Pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$  il existe un projecteur  $e \in M$  tel que  $\bar{F} = eJeJ\mathcal{H}^+$ , on a alors  $P_F = eJeJ$ , où  $P_F$  désigne le projecteur orthogonal de  $\mathcal{H}$  sur l'espace vectoriel fermé engendré par  $F$ .

b) Pour tout projecteur  $e \in M$ ,  $eJeJ\mathcal{H}^+$  est une face fermée  $F_e$  de  $\mathcal{H}^+$  et  $P_{F_e} = eJeJ$ .

c) L'application  $e \rightarrow F_e$  est un isomorphisme d'ordre de l'ensemble des projecteurs de  $M$  sur l'ensemble des faces fermées de  $\mathcal{H}^+$  et on a  $F_{1-e} = F_e^\perp$  pour tout projecteur  $e \in M$ .

La démonstration utilise les lemmes suivants :

LEMME 4.3. — Soient  $M$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^+$ ,  $\xi_0$  comme dans 4.2.

Pour  $\xi \in \mathcal{H}^+$  les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $\eta \geq 0, \xi \perp \eta \Rightarrow \eta = 0$ .

b)  $\xi$  est séparateur pour  $M$ .

c)  $\xi$  est totalisateur pour  $M$ .

d) La face de  $\xi$  dans  $\mathcal{H}^+$  est dense dans  $\mathcal{H}^+$ .

*Démonstration.* — a)  $\Rightarrow$  b) Soit  $e$  un projecteur de  $M$  tel que  $e\xi = 0$  alors  $\langle eJeJ\eta, \xi \rangle = 0$  pour tout  $\eta \in \mathcal{H}^+$  et comme  $eJeJ\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$  on a  $eJeJ = 0$  puis  $e = 0$ .

b)  $\Rightarrow$  c) On a  $J\xi = \xi$  et  $JMJ = M'$ .

c)  $\Rightarrow$  d) Si  $\xi$  est totalisateur pour  $M$ , il est aussi totalisateur et séparateur, le lemme 2.7 d) e) montre que  $\mathcal{P}_\xi^\perp = \mathcal{H}^+$ . L'application qui à  $x \in M$  associe  $\Delta_\xi^{1/2}x\xi$  définit alors (2.7 et 1.2) un isomorphisme de  $M^+$  sur la face de  $\xi$  dans  $\mathcal{H}^+$ , d'où la conclusion.

**LEMME 4.4.** — Soient  $M$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^+$ ,  $\xi_0$  comme dans 4.2 et  $\eta \in \mathcal{H}^+$ ,  $e \in M$  le support de  $\omega_\eta$ . Il existe  $\xi \in \mathcal{H}^+$  séparateur pour  $M$  tel que :

$$a) e\Delta_\xi^{it} = \Delta_\xi^{it}e \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$b) eJeJ\xi = \eta.$$

c) La construction de Gelfand Segal associée à la restriction  $\psi$  de  $\omega_\eta$  à  $M_e$  s'identifie au triplet  $(eJeJ\mathcal{H}, \eta, \pi)$  où, pour  $x \in M_e$ ,  $\pi(x)$  désigne la restriction de  $x$  à  $\mathcal{H} = eJeJ\mathcal{H}$ .

d) Le cône autopolaire correspondant au couple  $\pi(M_e), \eta$  dans  $\mathcal{H}$  est  $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H} = eJeJ\mathcal{H}^+$ .

*Démonstration.* — Soit  $\xi = \eta + (1 - e)J(1 - e)\xi_0$ . On a  $\xi \in \mathcal{H}^+$ . Pour  $x \in M$ ,

$$\langle x\eta, (1 - e)J(1 - e)\xi_0 \rangle = \langle (1 - e)J(1 - e)\xi_0, JxJ\eta \rangle = 0$$

car

$$JxJ\eta \in M'\eta \subset e\mathcal{H}.$$

Ainsi

$$\langle x\xi, \xi \rangle = \langle x\eta, \eta \rangle + \langle x(1 - e)J(1 - e)\xi_0, (1 - e)J(1 - e)\xi_0 \rangle.$$

Pour  $x \in M_+$ ,  $\langle x\xi, \xi \rangle = 0$  entraîne  $x\eta = 0$  et

$$x(1 - e)J(1 - e)\xi_0 = 0.$$

La dernière égalité implique

$$(1 - e)x(1 - e)J(1 - e)x(1 - e)J\xi_0 = 0$$

donc  $(1 - e)x(1 - e) = 0$

$$(y \in M, yJy\xi_0 = 0 \Rightarrow \langle \Delta_{\xi_0}^{1/2}y\xi_0, y\xi_0 \rangle = 0 \Rightarrow y = 0)$$

On a montré que  $\xi$  est séparateur pour  $M$ , donc totalisateur pour  $M$  (4.3). Pour  $x \in M$ ,  $\omega_\xi(ex) = \langle x\eta, \eta \rangle = \omega_\xi(xe)$  donc  $\Delta_\xi^t e = e\Delta_\xi^t \forall t \in \mathbf{R}$ .

On a  $e\eta = \eta$  donc  $eJeJ\xi = \eta$ .

La condition *c*) résulte des égalités  $J\xi = J$  (lemme 2.7),  $\langle x\xi, \xi \rangle = \langle x\eta, \eta \rangle \forall x \in M_e$ ,  $eJeJ\xi = \eta$  et de [5]. L'involution  $J_\psi$  est donc la restriction de  $J$  à  $\mathcal{H} = eJeJ\mathcal{H}$ , ce qui montre que le cône autopolaire associé à  $\pi(M_e)$ ,  $\eta$  dans  $\mathcal{H}$ , est contenu dans  $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}$ . Comme le produit scalaire de deux éléments quelconques de  $\mathcal{H}^+$  est positif, il est en fait égal à  $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}$ . On a  $eJeJ\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}$  d'où  $d$ .

**LEMME 4.5.** — Soient  $M$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$ ,  $\mathcal{H}^+$  comme ci-dessus.

a) Soit  $f$  un projecteur de  $M$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  des éléments de  $\mathcal{H}^+$  avec  $\xi_1 \leqslant \xi_2 (\mathcal{H}^+)$ . Alors si  $fJfJ\xi_2 = \xi_2$ , on a  $fJfJ\xi_1 = \xi_1$  et  $f\xi_1 = \xi_1$ .

b) Soit  $\eta \in \mathcal{H}^+$ ,  $e$  le support de  $\omega_\eta$ , alors  $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+$  est la fermeture de la face de  $\eta$  dans  $\mathcal{H}^+$ .

*Démonstration.* — a) On a

$$(1-f)J(1-f)\xi_1 \leqslant (1-f)J(1-f)\xi_2 (\mathcal{H}^+)$$

donc  $(1-f)J(1-f)\xi_1 = 0$ . Soient  $\xi$  séparateur et totalisateur pour  $M$ , tel que  $\mathcal{P}_\xi^\perp = \mathcal{H}^+$  et  $e$  un projecteur de  $M_e$  tels que  $eJeJ\xi = \xi_1$ . On a, avec  $y = (1-f)e$

$$yJy\xi = (1-f)eJ(1-f)J^2e\xi = (1-f)J(1-f)J\xi_1 = 0.$$

Ainsi  $y = 0$  et  $(1-f)\xi_1 = 0$  donc  $\xi_1 = f\xi_1 = fJfJ\xi_1$ .

b) L'assertion *a*) montre que  $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+$  est une face fermée de  $\mathcal{H}^+$  contenant  $\eta$ . Comme  $\eta$  est totalisateur et séparateur pour  $\pi(M_e)$  dans  $\mathcal{H}$ , la fermeture de la face engendrée par  $\eta$  dans  $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}$  est  $\mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}$  (4.3). On a donc montré que  $F_e = eJeJ\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}$  est la fermeture de la face de  $\eta$  dans  $\mathcal{H}^+$ .

*Démonstration du théorème 4.2.* — a) Pour tout  $\eta \in \mathcal{H}^+$ , soit  $F(\eta)$  la face engendrée par  $\eta$ . On a  $F = \bigcup_{\eta \in F} F(\eta)$  et la famille des  $F(\eta)$ ,  $\eta \in F$  est filtrante croissante. Pour tout  $\eta \in F$ , soit  $e_\eta$  le support de  $\omega_\eta$ , le lemme 4.5 montre

que  $\bar{F}(\eta) = F_{e\eta}$  donc que  $P_{F_\eta} = e_\eta J e_\eta J$ . Pour  $\eta_1 \leq \eta_2$  on a

$$(x \in M^+, x\eta_2 = 0) \Rightarrow (xJxJ\eta_1 = 0) \Rightarrow (x\eta_1 = 0)$$

donc  $e_{\eta_1} \leq e_{\eta_2}$ . Soit  $e = \vee e_\eta = \lim e_\eta$  pour la topologie forte, quand  $\eta \rightarrow \infty$  selon  $F$ . Pour  $\xi \in JeJe\mathcal{H}$ , on a  $\xi = \lim_{\eta \rightarrow \infty} e_\eta J e_\eta J \xi$  donc  $P_F \xi = \xi$ . Enfin pour  $\xi \in F$  on a  $eJeJ\xi = \xi$ , ce qui montre que  $P_F = eJeJ$ . Pour  $\xi \in P_F \mathcal{H}^+$  on a  $\xi = \lim_{\eta \rightarrow \infty} e_\eta J e_\eta J \xi \in \overline{U_{\eta \in F} F(\eta)}$  car  $\xi \in \mathcal{H}^+$ .

Ainsi  $\xi \in \bar{F}$ . L'inclusion  $\bar{F} \subset P_F \mathcal{H}^+$  est immédiate.

b) résulte de 4.5 a).

c) L'application  $e \rightarrow F_e$  est surjective et croissante. Elle est injective car  $e$  est le support de  $\omega_\xi$ ,  $\xi_1 = eJeJ\xi_0$  pour tout projecteur  $e \in M$ . Soient  $e$  et  $f$  des projecteurs de  $M$ , avec  $F_f = F_e^\perp$ . On a  $eJeJ\xi_0 \perp fJfJ\xi_0$  donc  $feJfeJ = 0$  et  $fe = 0$ . Ainsi  $f = 1 - e$ .

**THÉORÈME 4.6.** — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur séparateur et totalisateur pour  $M$ ,  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$ .

a) Pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$  on a  $\bar{F} = F^\perp$ .

b) Pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$  et tout  $t \in \mathbf{R}$  on a

$$e^{t(P_F - P_{F^\perp})} \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+.$$

*Démonstration.* — L'assertion a) résulte facilement de 4.2 a) c). Montrons b). Soit  $e_0 \in M$  tel que  $P_F = e_0 Je_0 J$ ,

$$P_{F^\perp} = (1 - e_0)J(1 - e_0)J.$$

On a  $P_F - P_{F^\perp} = -1 + e_0 + Je_0 J$ ; et pour  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$e^{t(P_F - P_{F^\perp})} = e^{-t} e^{te_0} J e^{te_0} J$$

d'où la conclusion.

**PROPOSITION 4.7.** — Soient  $\mathcal{H}$  un espace hilbertien complexe,  $\mathcal{H}^+$  un cône convexe autopolaire dans  $\mathcal{H}$ ,  $J$  comme dans 4.1 b) et  $D(\mathcal{H}^+)$  l'ensemble des  $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tels que

$$e^{t\delta} \mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+ \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

*Alors  $D(\mathcal{H}^+)$  est un sous-espace vectoriel réel, stable par involution, et stable par crochet  $(\delta_1, \delta_2) \rightarrow [\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .*

*Démonstration.* — Montrons que

$$\delta_1, \delta_2 \in D(\mathcal{H}^+) \implies [\delta_1, \delta_2] \in D(\mathcal{H}^+).$$

Soit  $\delta_3 = [\delta_1, \delta_2]$ . On a très facilement :

$$t^{-2}(e^{t\delta_1}e^{t\delta_2}e^{-t\delta_1}e^{-t\delta_2} - 1) \rightarrow \delta_3$$

en norme, quand  $t \rightarrow 0$ . Il existe donc une suite  $(x_n)$  d'automorphismes de  $\mathcal{H}^+$  tels que  $x_n = 1 + \frac{1}{n}(\delta_3 + o(1))$ . On a donc  $e^{\delta_3}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$  car  $e^{\delta_3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n$ .

**DÉFINITION 4.8.** — Soient  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^+$ ,  $J$  comme ci-dessus,  $D(\mathcal{H}^+)$  sera appelée algèbre de Lie involutive du cône  $\mathcal{H}^+$ .

**THÉORÈME 4.9.** — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ ,  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^\square$ .

L'application qui à  $x \in M$  associe  $x + JxJ \in D(\mathcal{H}^+)$  définit par passage au quotient un isomorphisme de l'algèbre de Lie involutive des dérivations de  $M$  sur le quotient  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$  de  $D(\mathcal{H}^+)$  par son centre.

*Démonstration.* — Pour  $x \in M$  on a  $x + JxJ \in D(\mathcal{H}^+)$  (3.4) et pour  $x_1, x_2 \in M$  on a

$$[x_1 + Jx_1J, x_2 + Jx_2J] = [x_1, x_2] + J[x_1, x_2]J$$

Le théorème 3.4 montre donc que l'application  $x \rightarrow x + JxJ$  est un homomorphisme surjectif de l'algèbre de Lie involutive de  $M$  sur  $D(\mathcal{H}^+)$ . L'image du centre de  $M$  est donc contenue dans le centre de  $D(\mathcal{H}^+)$  et la conclusion 4.9 résulte facilement du a) de la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.10.** — Soient  $M, \mathcal{H}, \xi_0, \mathcal{H}^+$  comme ci-dessus.

a) On a Centre  $D(\mathcal{H}^+) = \{x \in \text{Centre } M, x = x^*\}$ .

b) Soit  $F$  une face fermée de  $\mathcal{H}^+$ , alors

$$P_F + P_{F^\perp} = 1 \iff \mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp \iff \exists e$$

projecteur,  $e \in M \cap M'$ , tel que  $F = F_e$ .

c) Soit  $F$  une face fermée de  $\mathcal{H}^+$  vérifiant les conditions b), alors :

$$\mathcal{H} = e\mathcal{H} \oplus (1 - e)\mathcal{H}, \quad M = M_e \oplus M_{1-e}, \quad \mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp, \\ D(\mathcal{H}^+) = D(F) \oplus D(F^\perp).$$

*Démonstration.* — a) Soit  $x \in M$  tel que  $x + JxJ \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$ . Pour tout  $y \in M$  on a  $[x, y] + J[x, y]J = 0$  donc  $[x, y] \in \text{Centre } M$  et  $[x, y] = 0$ . Ainsi  $x \in \text{Centre } M$  et  $x + JxJ = x + x^*$ .

b) Comme  $\xi \geq 0 \Rightarrow P_F \xi \geq 0$  pour tout  $\xi$ , on a

$$\mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp$$

dès que  $P_F + P_{F^\perp} = 1$ .

Inversement  $\mathcal{H}^+ = F \oplus F^\perp$  entraîne  $P_F + P_{F^\perp} = 1$ . Soit  $e$  un projecteur de  $M$ , on a

$$P_{F_e} + P_{F_{1-e}} = 1 + 2(eJeJ) - (e + JeJ).$$

Ainsi  $P_F + P_{F^\perp} = 1$  est équivalent à  $(e - JeJ)^2 = 0$ , donc à  $e = JeJ$  ( $e - JeJ$  est normal). Enfin

$$e = JeJ \iff e \in \text{Centre } M.$$

c) La seule assertion à montrer est

$$D(\mathcal{H}^+) = D(F) \oplus D(F^\perp).$$

Comme  $e \in M \cap M'$ ,  $e$  commute avec tout  $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$ , donc  $\delta$  laisse  $e\mathcal{H}$  et  $(1 - e)\mathcal{H}$  globalement invariants.

**DÉFINITION 4.11.** — Soient  $\mathcal{H}$  un espace hilbertien complexe,  $\mathcal{H}^+$  un cône convexe autopolaire dans  $\mathcal{H}$ . On appelle orientation de  $\mathcal{H}^+$  la donnée d'une structure d'espace vectoriel complexe sur  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ , compatible avec la structure d'algèbre de Lie involutive de  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ .

Une orientation de  $\mathcal{H}^+$  est donc caractérisée par un opérateur  $I$ ,  $I^2 = -1$  sur  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$  tel que

$$[I\delta_1, \delta_2] = [\delta_1, I\delta_2] = I[\delta_1, \delta_2]$$

$\forall \delta_1, \delta_2 \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$  et que  $I(\delta^*) = -I(\delta)^*$   $\forall \delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$ . Soient  $\mathcal{H}$ ,  $M$ ,  $\xi_0$  et  $\mathcal{H}^+$  comme ci-dessus, l'orientation  $I_M$  de  $\mathcal{H}^+$  déduite de la structure d'algèbre de Lie involutive complexe de l'ensemble des dérivations de  $M$ , sera appelée orientation canonique de  $\mathcal{H}^+$  associée à  $M$ .

**PROPOSITION 4.12.** — Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur séparateur et totalisateur pour  $M$ ,  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$ ,  $I_1$  et  $I_2$  deux orientations de  $\mathcal{H}^+$ .

Il existe alors une face fermée  $F = F_\epsilon$ ,  $\epsilon$  projecteur de  $M \cap M'$  de  $\mathcal{H}^+$  (vérifiant les conditions 4.11 b)) telle que  $I_1$  coïncide avec  $I_2$  sur  $\underline{D}(F)$  et que  $I_1$  coïncide avec  $-I_2$  sur  $\underline{D}(F^\perp)$ .

Quand  $M$  est un facteur  $I_M$  et  $-I_M$  sont les seules orientations de  $\mathcal{H}^+$ .

*Démonstration.* — Soit  $j$  l'isomorphisme canonique de l'algèbre de Lie des dérivations de  $M$ ,  $D(M)$  sur  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ . On a facilement Centre  $\underline{D}(\mathcal{H}^+) = \{0\}$ . Soit  $\epsilon = I_2 \circ I_1^{-1}$ . On a

$$[\epsilon \delta_1, \delta_2] = \epsilon [\delta_1, \delta_2] = [\delta_1, \epsilon \delta_2] \quad \forall \delta_1, \delta_2 \in \underline{D}(\mathcal{H}^+) \\ \text{et}$$

$$[\epsilon \delta_1, \epsilon \delta_2] = [I_2 I_1^{-1} \delta_1, I_2 I_1^{-1} \delta_2] = -[I_1^{-1} \delta_1, I_1^{-1} \delta_2] = [\delta_1, \delta_2].$$

Donc pour tout  $\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+)$  on a  $\delta - \epsilon^2 \delta \in \text{Centre } \underline{D}(\mathcal{H}^+)$ , d'où  $\epsilon^2 = 1$ . Ainsi  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$  est la somme directe des deux idéaux

$$\epsilon_1 = \{\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+), \epsilon \delta = \delta\} \quad \text{et} \quad \epsilon_{-1} = \{\delta \in \underline{D}(\mathcal{H}^+), \epsilon \delta = -\delta\}.$$

Comme  $\epsilon(\delta^*) = (\epsilon(\delta))^*$  ces deux idéaux sont autoadjoints. Soient

$$M_1 = \{x \in M, j \circ Adx \in \epsilon_1\}, \quad M_{-1} = \{x \in M, j \circ Adx \in \epsilon_{-1}\}$$

Pour  $x \in M_1$ ,  $y \in M_{-1}$  on a  $j \circ Ad[x, y] = 0$  donc

$$[x, y] \in \text{Centre } M$$

et  $[x, y] = 0$ . Pour  $x \in M'_1 \cap M$ ,  $j \circ Adx$  commute avec tout  $\delta \in \epsilon_1$  donc appartient à  $\epsilon_{-1}$ . On a montré que

$$M_{-1} = M'_1 \cap M$$

donc, comme  $M_1$  est autoadjoint, que  $M_{-1}$  est une sous-algèbre de von Neumann de  $M$ . De même  $M_1 = M'_{-1} \cap M$  est une sous-algèbre de von Neumann de  $M$ , et  $M_1$  et  $M_{-1}$  contiennent le centre de  $M$ . Pour tout  $x \in M$  on a

$$j \circ Adx \in \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}$$

donc il existe  $x_1 \in M_1$ ,  $x_{-1} \in M_{-1}$  avec  $x = x_1 + x_{-1}$ . Pour  $x \in M$ ,  $y \in M_1$  on a  $[x, y] = [x_1, y] \in M_1$ . Pour  $x, y \in M_1$  et  $z \in M$  on a

$$[x, y]z = [x, y]z_1 + xyz_2 - yxz_2 = [x, y]z_1 + [x, yz_2] \in M_1$$

Ainsi  $M_e \subset M_1$ , où  $e$  désigne le plus grand projecteur de l'idéal bilatère fermé de  $M_1$  engendré par les  $[x, y]$  pour  $x, y \in M_1$ . On a  $e \in \text{Centre } M_1 = \text{Centre } M$ . Comme  $M_{1,1-e}$  est abélienne on a  $M_1 = M_e + \text{Centre } M$  puis

$$M_{-1} = M_{1-e} + \text{Centre } M$$

car  $M_{-1} = M'_1$ . Il en résulte que  $\varepsilon$  vaut  $+1$  sur  $\underline{D}(F_e)$  et  $-1$  sur  $\underline{D}(F_{1-e})$ .

## 5. Algèbre de von Neumann associée à un cône autopolaire homogène orienté.

**DÉFINITION 5.1.** — Soit  $\mathcal{H}^+$  un cône convexe autopolaire dans l'espace hilbertien  $\mathcal{H}$ . Nous dirons que  $\mathcal{H}^+$  est *facialement homogène* quand pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$  on a  $e^{t(P_F - P_{F^\perp})}\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  (où  $P_F$  (*resp*  $P_{F^\perp}$ ) désigne la projection orthogonale de  $\mathcal{H}$  sur l'espace vectoriel fermé engendré par  $F$  (*resp*  $F^\perp$ )).

On vérifie facilement que cette condition est équivalente à  $\lambda P_F \xi + (1 - P_F - P_{F^\perp})\xi + \lambda^{-1}P_{F^\perp}\xi \in \mathcal{H}^+$  pour tous  $\lambda \geq 0$ ,  $\xi \geq 0$ . Dans la suite nous écrirons simplement « homogène » pour « facialement homogène ».

**THÉORÈME 5.2.** — Soit  $\mathcal{H}^+$  un cône convexe autopolaire homogène dans l'espace hilbertien  $\mathcal{H}$ ,  $I$  une orientation de  $\mathcal{H}^+$ .

a)  $M = \{\delta_1 - i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}$  est une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ .

b) On a  $M' = \{\delta_1 + i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}$  et

$$JM = M'.$$

c) Pour tout  $x \in M$  on a  $xJxJ \mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$ .

d) Pour tout  $\xi_0 \in \mathcal{H}^+$  tel que  $(\eta \geq 0, \eta \perp \xi_0) \Rightarrow (\eta = 0)$ .  $\xi_0$  est séparateur et totalisateur pour  $M$ , et

$$J = J_{\xi_0, M} \quad \mathcal{H}^+ = P_{\xi_0, M}^\perp.$$

LEMME 5.3. — Soit  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^+$  un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène  $\mathcal{H}^+$ , et soit  $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$ .
- b)  $J\delta = \delta J$  et  $\xi, \eta \geq 0, \xi \perp \eta \Rightarrow \delta\xi \perp \eta$ .

Démonstration. — Soient  $\xi, \eta$  comme dans b), alors

$$\langle e^{i\delta}\xi, \eta \rangle \sim t\langle \delta\xi, \eta \rangle \text{ qd } t \rightarrow 0, \langle \delta\xi, \eta \rangle \neq 0$$

L'implication a)  $\Rightarrow$  b) est donc immédiate. Montrons que b)  $\Rightarrow$  a). Il suffit de montrer que  $e^{t(\delta-\lambda_0)}\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$  pour  $t \geq 0$  et un  $\lambda_0 \geq 0$ . On peut choisir  $\lambda_0$  tel que la partie réelle de tout élément du spectre de  $\lambda_0 - \delta$  soit positive et que

$$\operatorname{Re}\langle (\lambda_0 - \delta)\xi, \xi \rangle \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

L'opérateur  $A$  de  $\mathcal{H}^J$  dans  $\mathcal{H}^J$  qui à  $\xi \in \mathcal{H}^J$  associe  $(\lambda_0 - \delta)\xi \in \mathcal{H}^J$  est monotone au sens de [2]. Il est maximal monotone au sens de [2] car  $1 + \mu A$  est surjectif pour tout  $\mu > 0$ , et c'est le générateur du semi-groupe  $t \rightarrow e^{t(\lambda_0 - \delta)}$  de contractions de  $\mathcal{H}^J$ . Soit  $\xi \in \mathcal{H}^J$ ,  $\xi = \xi^+ - \xi^-$  (4.1 c)) alors en utilisant b) on a  $\langle A\xi, \xi - \xi^+ \rangle = \langle A\xi^-, \xi^- \rangle \geq 0$ . Comme avec les notations de [2] on a  $A^0\xi = A\xi$  pour tout  $\xi \in \mathcal{H}^J$ , la proposition 4.5 de [2] montre que

$$e^{t(\lambda_0 - \delta)}\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$$

pour tout  $t \geq 0$ .

LEMME 5.4. — Soit  $(\mathcal{H}, \mathcal{H}^+)$  un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène  $\mathcal{H}^+$ .

a) Soit  $U$  un unitaire de  $\mathcal{H}$  tel que  $U\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$  et que  $U$  commute avec tout  $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$  alors  $U = 1$ .

b) Soit  $\delta$  un élément du centre de  $D(\mathcal{H}^+)$  alors  $\delta = \delta^*$ .

*Démonstration.* — a) Il suffit de montrer que  $\text{Re}(\text{Sp } U) \geq 0$  puis d'appliquer le résultat à  $U^n$  pour tout  $n$ . On a

$$U\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+$$

donc  $UJ = JU$  et pour  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}^J$

$$\text{Re} \langle U(\xi_1 + i\xi_2), \xi_1 + i\xi_2 \rangle = \langle U\xi_1, \xi_1 \rangle + \langle U\xi_2, \xi_2 \rangle$$

Il suffit donc de montrer que  $\langle U\xi, \xi \rangle \geq 0$  pour tout  $\xi \in \mathcal{H}^J$ . Le lemme 4.1 c) montre que  $\xi = \xi^+ - \xi^-$  avec  $\xi^+, \xi^- \geq 0$ ,  $\xi^+ \perp \xi^-$ . Soit  $F$  la face de  $\xi^+$  dans  $\mathcal{H}^+$ ;  $F^\perp$  la face orthogonale contient  $\xi^-$ . Comme  $P_F - P_{F^\perp}$  commute avec  $U$ , on a  $U\xi^+ \in P_F\mathcal{H}$  et  $U\xi^- \in P_{F^\perp}\mathcal{H}$  donc

$$\langle U\xi, \xi \rangle = \langle U\xi^+, \xi^+ \rangle + \langle U\xi^-, \xi^- \rangle \geq 0$$

b) Il suffit de montrer que si  $\delta = -\delta^*$  on a  $\delta = 0$  ce qui résulte facilement de a) appliqué à  $e^{t\delta}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**LEMME 5.5.** — Soient  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}^+$  un espace hilbertien muni d'un cône autopolaire homogène  $\mathcal{H}^+$ ,  $I$  une structure complexe sur  $D(\mathcal{H}^+)$ ,  $M_1 = \{\delta_1 + i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}$ ,

$$M_{-1} = \{\delta_1 - i\delta_2, \delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \delta_2 \in I(\delta_1)\}.$$

a) On a  $M_1 \subset M'_{-1}$ ,  $M_{-1} \subset M'_1$ .

b) Si  $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$ ,  $\delta = \delta^*$  il existe un unique

$$\delta_0 = I_0(\delta) \in I(\delta)$$

tel que  $\delta_0^* = -\delta_0$ .

c) Soient  $F$  une face de  $\mathcal{H}^+$  et  $\delta_F = 1/2(1 - P_F + P_{F^\perp})$ ,  $\varepsilon_F^+ = \delta_F + iI_0(\delta_F)$ ,  $\varepsilon_F^- = \delta_F - iI_0(\delta_F)$  alors :

$$(\varepsilon_F^*)^* = \varepsilon_F^+, (\varepsilon_F^-)^* = \varepsilon_F^-, \varepsilon_F^+ + \varepsilon_F^- = 2\delta_F \\ J\varepsilon_F^+ J = \varepsilon_F^-, \varepsilon_F^+ \xi = \xi \forall \xi \in F, \varepsilon_F^+ \xi = 0 \forall \xi \in F^\perp$$

d)  $X \in M'_1 \Rightarrow X + JXJ \in D(\mathcal{H}^+)$ ,

$$X \in M'_{-1} \Rightarrow X + JXJ \in D(\mathcal{H}^+).$$

e)  $M_1$  et  $M_{-1}$  sont des algèbres de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ , on a  $M_{-1} = M'_1$ ,  $M_{-1}' = M_1$  et  $JM_1J = M_{-1}$ .

*Démonstration.* — a) Soient  $\delta_1, \delta_3 \in D(\mathcal{H}^+)$ ,  $\delta \rightarrow \underline{\delta}$  l'application canonique de  $D(\mathcal{H}^+)$  sur  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$ ,  $\delta_2 \in I(\delta_1)$ ,  $\delta_4 \in I(\delta_3)$ . On a

$$[\delta_1 + i\delta_2, \delta_3 - i\delta_4] = [\delta_1, \delta_3] + [\delta_2, \delta_4] + i([\delta_2, \delta_3] - [\delta_1, \delta_4])$$

La bilinéarité du crochet dans  $\underline{D}(\mathcal{H}^+)$  montre que

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_3] + [\delta_2, \delta_4] &\in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+), \\ [\delta_2, \delta_3] - [\delta_1, \delta_4] &\in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+) \\ ([\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3] + [I\underline{\delta}_1, I\underline{\delta}_3] = 0, \quad [I\underline{\delta}_1, \underline{\delta}_3] - [\underline{\delta}_1, I\underline{\delta}_3] = 0) \end{aligned}$$

Ainsi  $[\delta_1 + i\delta_2, \delta_3 - i\delta_4]$  appartient au centre de l'algèbre de von Neumann engendrée par  $M_1$  et  $M_{-1}$ , donc est nul.

b) On a  $I(\delta)^* = -I(\delta)$  donc  $\delta_1 + \delta_1^* \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$  pour tout  $\delta_1 \in I(\delta)$ . Alors  $\delta_0 = \delta_{1-u_1}(\delta_1 + \delta_1^*)$  vérifie b). Si  $\delta_0$  et  $\delta_0'$  vérifient b), on a  $\delta_0 - \delta_0' \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$  donc  $\delta_0 - \delta_0' = \delta_0^* - \delta_0'^*$  (5.4) et  $\delta_0 = \delta_0'$ .

c) On a  $\delta_F^* = \delta_F$  donc  $(\varepsilon_F^+)^* = \varepsilon_F^+$ , de même  $(\varepsilon_F^-)^* = \varepsilon_F^-$  en utilisant b),  $\varepsilon_F^+ + \varepsilon_F^- = 2\delta_F$ ,  $J\varepsilon_F^+J = J\delta_FJ - iJI_0(\delta_F)J = \varepsilon_F^-$ .  $M_{+1}$  et  $M_{-1}$  sont des sous-espaces vectoriels autoadjoints de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  et  $(M_{+1})''$  commute avec  $(M_{-1})''$ . Pour tout

$$\delta_1 \in D(\mathcal{H}^+), \quad \delta_2 \in I(\delta_1)$$

on a  $J(\delta_1 + i\delta_2)J = \delta_1 - i\delta_2$  donc  $JM_1J = M_{-1}$ ,  $JM_1''J = M_{-1}''$ . Soit  $x \in (M_{+1} \cup M_{-1})'$  et soit  $\delta = x + JxJ$ . On a  $J\delta = \delta J$  et  $\delta$  commute avec  $P_F - P_{F'}$  pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$  donc :

$$\xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \xi \perp \eta \implies \delta\xi \perp \eta$$

Le lemme 5.4 montre que  $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$  et le lemme 5.6 que  $\delta = \delta^*$ . On en déduit facilement que  $JxJ = x^*$  pour tout  $x \in (M_{+1} \cup M_{-1})'$ . Il en résulte que pour tout projecteur  $e \neq 0$ ,  $e \in M_{+1}''$  on a  $eJeJ \neq 0$ . En effet si  $eJeJ = 0$  on a  $ueu^*JeJ = 0$  pour tout unitaire  $u$  de  $M_{+1}''$ ; puis  $\bar{e}JeJ = 0$

où  $\bar{e}$  est le support central de  $e$  dans  $M'_{+1}$ ; puis  $\bar{e}J\bar{e}J = 0$  et  $\bar{e} = 0$  car  $J\bar{e}J = \bar{e}$ . Comme  $\varepsilon_F^+ + J\varepsilon_F^+J = 2\delta_F$  et  $\varepsilon_F^+ \in M'_{+1}$ ,  $\text{Sp } 2\delta_F \subset [0, 2]$  l'opérateur auto-adjoint  $\varepsilon_F^+$  vérifie  $0 < \varepsilon_F^+ \leq 1$ . Soit  $\xi \in F$ , on a

$$\begin{aligned} 2\langle \varepsilon_F^+\xi, \xi \rangle &= \langle \varepsilon_F^+\xi, \xi \rangle + \langle \xi, \varepsilon_F^+\xi \rangle \\ &= \langle (\varepsilon_F^+ + J\varepsilon_F^+J)\xi, \xi \rangle = \langle 2\delta_F\xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

donc  $\varepsilon_F^+\xi = \xi$  car  $\langle \delta_F\xi, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$ . Soit  $\xi \in F^\perp$ , on a de même  $2\langle \varepsilon_F^+\xi, \xi \rangle = \langle 2\delta_F\xi, \xi \rangle = 0$  et  $\varepsilon_F^+\xi = 0$ .

d) Soit  $X \in M'_1$ , alors  $\delta = X + JXJ$  vérifie  $\delta J = J\delta$ . Pour toute face  $F$  de  $\mathcal{H}^+$ ,  $X$  commute avec  $\varepsilon_F^+$  donc :

$$\xi_1 \in F \implies \varepsilon_F^+X\xi_1 = X\xi_1, \quad \xi_2 \in F^\perp \implies \varepsilon_F^+\xi_2 = 0$$

et on a alors  $X\xi_1 \perp \xi_2$ ,  $JX\xi_1 \perp J\xi_2$ ,  $JXJ\xi_1 \perp \xi_2$  et  $\delta\xi_1 \perp \xi_2$ .

e) Il suffit de montrer que tout élément  $X$  de  $M'_1$  est dans  $M_{+1}$ . Soit  $\delta_1 \in D(\mathcal{H}^+)$  tel que  $2\delta_1 = X + JXJ$  et soient  $\delta_2 \in I(\delta_1)$ ,  $X_1 = \delta_1 - i\delta_2$ . On a

$$X_1 \in M'_1, \quad (X - X_1) + J(X - X_1)J = 0$$

Ainsi

$$X - X_1 \in M'_1 \cap JM'_1J = (M_1 \cup M_{-1})' = \text{Centre } D(\mathcal{H}^+) + i \text{ Centre } D(\mathcal{H}^+).$$

(Tout élément auto-adjoint de  $(M_1 \cup M_{-1})'$  vérifie  $JxJ = x$  et  $x \in D(\mathcal{H}^+)$  donc  $x \in \text{Centre } D(\mathcal{H}^+)$ .) Il existe donc  $\delta'_1 \in D(\mathcal{H}^+)$ ,  $\delta'_2 \in I(\delta'_1)$  tels que  $X = \delta'_1 - i\delta'_2$ .

*Démonstration du théorème 5.2.* — Les assertions a) et b) résultent du lemme 5.5 e). Démontrons c). Soit d'abord  $u$  un unitaire de  $M$ . Il existe un opérateur  $h = -h^*$ ,  $h \in M$  tel que  $u = e^h$ . On a  $uJuJ = e^hJe^{-h}J = e^h e^{JhJ}$  et comme  $JhJ$  commute avec  $h$  on a  $uJuJ = e^{(h+JhJ)}$ . Comme  $h \in M$  on a  $h + JhJ \in D(\mathcal{H}^+)$  (5.7 d)), donc

$$e^{(h+JhJ)}\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+.$$

Soit  $\rho$  un opérateur positif inversible,  $\rho \in M$ , écrivant  $\rho = e^f$  avec  $f \in M$ ,  $f = f^*$  on vérifie de même que

$$J\rho J\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+.$$

Pour  $x \in M$ ,  $x$  inversible, il existe un unitaire  $u \in M$ , un

opérateur positif inversible  $\rho \in M$  tels que  $x = u\rho$ . On a alors

$$xJxJ = u\rho Ju\rho J = uJuJ\rho J\rho J \quad \text{car} \quad JMJ = M'.$$

Enfin pour tout  $x \neq 0$ , il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments inversibles de  $M$  ([6]) telle que  $\|x_n\| \leq \|x\|$  pour tout  $n$  et que  $x_n \rightarrow x$  fortement quand  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi

$$xJxJ\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n J x_n J \xi \in \mathcal{H}^+ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}^+.$$

d) Soit  $\xi_0 \in \mathcal{H}^+$  tel que  $\eta \in \mathcal{H}^+, \eta \perp \xi_0 \Rightarrow \eta = 0$ . Montrons d'abord que  $\xi_0$  est séparateur (donc totalisateur car  $J\xi_0 = \xi_0$ ) pour  $M$ . Soit  $e \in M$  un projecteur tel que  $e\xi_0 = 0$ . Pour tout  $\xi \in \mathcal{H}^+$  on a  $eJeJ\xi \in \mathcal{H}^+$  (c) et  $\langle eJeJ\xi, \xi_0 \rangle = 0$  donc par hypothèse  $eJeJ\xi = 0$ . Ainsi  $eJeJ = 0$  et  $e = 0$ . Pour tout  $x \in M$ , on a  $xJxJ\xi_0 \in \mathcal{H}^+$  donc

$$\langle xJxJ\xi_0, \xi_0 \rangle \geq 0,$$

ce qui montre en utilisant [11] thm 4.2 que  $J$  est égal à  $J_{\xi_0}$  l'involution isométrique associée à l'algèbre de von Neumann  $M$  dans  $\mathcal{H}$  et au vecteur séparateur et totalisateur  $\xi_0$ . Pour tout  $x \in M$  on a  $xJ_{\xi_0}xJ_{\xi_0}\xi_0 \in \mathcal{H}^+$  donc  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp \subset \mathcal{H}^+$ ; comme  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$  et  $\mathcal{H}^+$  sont autopolaires, on a  $\mathcal{P}_{\xi_0}^\perp = \mathcal{H}^+$ .

**DÉFINITION 5.6.** — *Un cône autopolaire  $\mathcal{H}^+$  dans  $\mathcal{H}$  est de genre dénombrable quand toute famille de vecteurs  $\neq 0$  orthogonaux positifs est au plus dénombrable.*

On vérifie facilement que cette condition équivaut à l'existence d'un  $\xi \geq 0$  tel que  $\eta \geq 0, \eta \perp \xi \Rightarrow \eta = 0$ .

**THÉORÈME 5.7.** — *Soient  $M$  une algèbre de von Neumann dans  $\mathcal{H}$ ,  $\xi_0$  un vecteur totalisateur et séparateur pour  $M$ ,  $\mathcal{H}^+ = \mathcal{P}_{\xi_0}^\perp$ ,  $I = I_M$  l'orientation canonique de  $\mathcal{H}^+$ .*

*Alors l'algèbre de von Neumann associée à  $\mathcal{H}^+$  et  $I$  par le théorème 5.2 est égale à  $M$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\delta \in D(\mathcal{H}^+)$ , et soit  $x \in M$  tel que  $\delta = x + JxJ$ . Par hypothèse  $I(\delta)$  est la classe de

$$ix + JixJ = i(x - JxJ)$$

modulo le centre de  $D(\mathcal{H}^+)$ .

Comme  $x + JxJ - ii(x - JxJ) = 2x$  on voit que l'algèbre de von Neumann associée à  $\mathcal{H}^+$  est contenue dans  $M$  (le lemme 4.10 montre que Centre  $D(\mathcal{H}^+) \subset M$ ). L'inclusion inverse est immédiate.

**THÉORÈME 5.8.** — Soit  $E, E^+$  un espace vectoriel complexe ordonné avec unité d'ordre. Pour que  $E, E^+$  soit l'espace vectoriel ordonné sous-jacent à une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, il faut et il suffit qu'il existe une forme autopolaire  $s$  sur  $E$  telle que le complété  $\{E^+\}_s^-$  de  $E^+$  soit un cône autopolaire homogène et orientable.

*Démonstration.* — La nécessité résulte de 1.3, 2.7 c), 4.6, 4.9. Inversement soit  $u$  l'unité d'ordre de  $E^+$  et soit  $\xi_0 = \eta_s(u)$ . Dans  $\mathcal{H}_s = \overline{\eta_s(E)}$ ,  $\xi_0$  vérifie :  $\xi \in \mathcal{H}_s^+, \xi \perp \xi_0 \implies \xi = 0$ . D'après 1.2 et 5.2,  $E^+$  est isomorphe à la face engendrée par  $\xi_0$  dans  $\mathcal{P}_{\xi_0, M}^\natural$  où  $M$  désigne l'algèbre de von Neumann de genre dénombrable associée à une orientation de  $\mathcal{H}_s^+$  par le théorème 5.2. De plus, l'application  $b_{\xi_0}, x \mapsto \Delta_{\xi_0}^{1/4} x \xi_0$  est un isomorphisme de  $M^+$  sur la face de  $\xi_0$  dans  $\mathcal{P}_{\xi_0, M}^\natural$  (thm 2.7 b) et prop. 1.2 c)).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. ARAKI, Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non commutative Radon Nikodym theorem (à paraître).
- [2] H. BRÉZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi groupes de contractions dans les espaces de hilbert, Amst. North Holland, Pub. 1973,
- [3] A. CONNES, Groupe modulaire d'une algèbre de Von Neumann, *C. R. Acad. Sci.*, t. 274, série A (1972), 523-526.
- [4] A. CONNES, Une classification des facteurs de type III, *Annales Sci. de l'École Normale Supérieure*, 4<sup>e</sup> série, t. 6 (1973), 133-252.
- [5] A. CONNES et A. VAN DAELE, The Group property of the invariant S (à paraître dans *Math. Scand.*).
- [6] J. DIXMIER et O. MARECHAL, Vecteurs totalisateurs dans les algèbres de von Neumann, *Commun. Math. Phys.*, 22 (1972).
- [7] R. V. KADISON, Isometries of operator algebras, *Ann. Math.*, Princeton, 54 (1951), 325.
- [8] S. SAKAI, The absolute value of  $W^*$  algebras of finite type, *Tohoku Math. J.*, 8 (1956), 70.

- [9] S. SAKAI, C\* and W\* algebras, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer grenzgebiete*, Bd 60.
- [10] M. TAKESAKI, Tomita's theory of modulas Hilbert algebras and its applications, *Lectures notes in Math.* n° 128, Berlin Springer, 1970.
- [11] S. L. WORONOWICZ, On the purification of factor states, *Commun. Math. Phys.*, 28 (1972), 221.

Manuscrit reçu le 2 octobre 1973,  
accepté par G. Choquet.

Alain CONNES,  
C.N.R.S.  
Centre de Physique théorique  
31, chemin J.-Aiguier  
13274 Marseille.

---