ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL LEHMANN

Classes caractéristiques exotiques et I-connexité des espaces de connexions

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 3 (1974), p. 267-306

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_267_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 3 (1974), 267-306

CLASSES CARACTÉRISTIQUES EXOTIQUES ET $\mathfrak{J}$-CONNEXITÉ DES ESPACES DE CONNEXIONS

par Daniel LEHMANN

Pages

1. Introduction.

Des classes caractéristiques dites "secondaires" ou "exotiques" ont été définies pour les feuilletages de codimension q et les Γ-structures, notamment par Bott et Haefliger [2], généralisant l'invariant de Godbillon-Vey correspondant au cas $q = 1$. Parmi les différentes façons de procéder, l'une d'elles, exposée par Bott [1], est basée sur les techniques de Chern-Simons utilisant la courbure des connexions.

Le but de ce travail est double : d'une part généraliser la construction de Bott pour l'appliquer à d'autres situations géométriques que celles issues des Γ-structures, d'autre part préciser –grâce à la notion de $\mathfrak{J}$-connexité– l'argument d'invariance homotopique et les théorèmes de rigidité permettant d'affirmer que les classes exotiques obtenues ne dépendent pas des connexions choisies.

Le § 2 est consacré à quelques rappels concernant en particulier l'homomorphisme de Chern-Weil

$$I(G) \xrightarrow{\lambda_\omega} A^*(M)$$

où ω est une connexion sur un G-fibré principal différentiable $E \to M$, $A^*(M)$ l'algèbre des formes différentielles extérieures sur M, et $I(G)$ l'algèbre des polynomes sur l'algèbre de Lie $\underline{G}$ invariants par $ad(G)$. Après avoir donné au § 3 quelques exemples de $\mathfrak{J}$-connexions (c'est-à-dire de connexions ω telles que $\lambda_\omega(f) = 0 \ \ \forall f \in \mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal homogène de $I(G)$, on construit au § 4 les classes exotiques secondaires associées à une $\mathfrak{J}$-connexion ω et une $\mathfrak{J}'$-connexion ω' à l'aide d'un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\hat{W}(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') \xrightarrow{\rho_{\omega,\omega'}} A^*(M)$, $\hat{W}(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ ne dépendant que de $G, \mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$. Si A désigne un système de générateurs homogènes de l'idéal maximal $I^+(G)$, on définit une sous-algèbre différentielle $W_A(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ de $\hat{W}(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$, beaucoup plus maniable, et l'on montre au § 5 que les homomorphismes induits en cohomologie par $\rho_{\omega,\omega'}$ et $\rho_{\omega,\omega'} | W_A(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ ont même image dans $H^*(M, \mathbf{R})$. Le § 6 est consacré au calcul de $H^*(W_A(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'))$ dans quelques cas particuliers. On introduit au § 7 la notion de "$\mathfrak{J}$-connexité" d'un ensemble de connexions, et l'on montre que l'homomorphisme $\rho^*_{\omega,\omega'}$ induit en cohomologie par $\rho_{\omega,\omega'}$ ne dépend pas du choix des connexions ω et ω' pourvu, par exemple, que celles-ci varient dans des ensembles C et C′ de connexions respectivement $\mathfrak{J}$-connexe et $\mathfrak{J}'$-connexe : on interprète en particulier les classes exotiques secondaires comme des obstructions à ce que C et C′ se coupent. Cette situation est généralisée au cas où C n'est que $\mathfrak{J}_1$-connexe (avec $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{J}$). La $\mathfrak{J}$-connexité d'un ensemble de connexions implique en particulier que 2 connexions quelconques de cet ensemble peuvent être jointes par une courbe différentiable par morceaux dans l'espace des $\mathfrak{J}$-connexions ; mais c'est en fait une propriété plus forte comme le prouvent les exemples de déformations de classes exotiques exhibés au § 8. On reprend l'étude, au § 9, des exemples du § 3, mais du point de vue de la $\mathfrak{J}$-connexité. Un certain nombre de problèmes géométriques peuvent s'interpréter sous la forme suivante : est-ce que 2 ensembles donnés de connexions C et C′ se coupent ? Nous en donnons des exemples au § 10 ; l'exotisme fournit alors des obstructions dont les nullités sont des conditions nécessaires à ce que C et C′ se coupent ; exceptionnellement, ces conditions peuvent aussi être suffisantes.

Kamber et Tondeur [7^{I}], [7^{II}], [7^{III}] ont étudié la situation d'un G-fibré principal E → M, dont la base est munie d'un feuilletage $\mathfrak{F}$ de co-dimension r, et muni d'une part d'une H-réduction (H désignant un sous groupe fermé de G), d'autre part d'une connexion dont la restriction à chaque feuille de $\mathfrak{F}$ est plate (généralisation des connexions de Bott lorsque E est le fibré principal associé au fibré transverse à $\mathfrak{F}$). Leur étude recoupe en partie un cas particulier de la nôtre (faite indépendamment) correspondant à $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(> r)$ (idéal homogène des polynomes de degré $> r$) et $\mathfrak{J}' = \operatorname{Ker}(I(G) \to I(H))$. Par des méthodes hypercohomologiques, ils rendent leur théorie valable dans les cas analytique et algébrique, où les connexions globales peuvent ne pas exister.

Le contenu de cet article a été en partie résumé, sans démonstration, dans [9].

2. **Notations et rappels** (Cf. par exemple Chern-Simons [3]).

Soit G un groupe de Lie, $\underline{G}$ son algèbre de Lie, $I(G) = \bigoplus_{k\geqslant 0} I^k(G)$ l'algèbre graduée des polynomes à coefficients réels sur $\underline{G}$ (c'est-à-dire des formes **R**-multilinéaires symétriques), invariants par la représentation adjointe de G. Si $f \in I^k(G)$ et si $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ sont des formes différentielles de degré respectifs $d_1, \ldots, d_k$ à coefficients dans $\underline{G}$ sur une même variété, $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ désigne la $(d_1 + d_2 + \ldots + d_k)$-forme à coefficients réels sur cette variété, obtenue par antisymétrisation des arguments de f. Si $i \leqslant k, f(\gamma_1, \ldots, \gamma_i)$ désignera la forme obtenue en faisant la convention que le *dernier* argument γ_i est répété $k - i + 1$ fois.

Soit E → M un G-fibré principal différentiable. On conviendra d'identifier formes sur M et formes basiques sur E. On notera A*(M) l'algèbre des formes différentielles à coefficients réels sur M et, pour toute connexion ω sur E, $\lambda_\omega : \mathrm{I(G)} \to \mathrm{A}^{\mathrm{pair}}(\mathrm{M})$ l'homomorphisme d'algèbres de Chern-Weil défini par $\lambda_\omega(f) = f(\Omega)$ (Ω = courbure de ω, $f(\Omega)$ $2k$-forme fermée).

On notera partout I le segment [0,1]. Soit

$$\int_0^1 : \mathrm{A}^r(\mathrm{M} \times \mathrm{I}) \to \mathrm{A}^{r-1}(\mathrm{A})$$

l'intégration le long des fibres de $\mathrm{M} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M}$:

$$\int_0^1 [f(x\,,\,t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}] = 0\,,$$

$$\int_0^1 [g(x\,,\,t)\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{r-1}}] =$$
$$= \left[\int_0^1 g(x\,,\,t)\, dt\right] dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{r-1}}$$

Si ω' est une autre connexion sur E, on notera $[\overrightarrow{\omega\,,\,\omega'}]$ la connexion sur $\mathrm{E} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M} \times \mathrm{I}$ définie par :

$$[\overrightarrow{\omega\,,\,\omega'}]\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0 \quad , \quad [\overrightarrow{\omega\,,\,\omega'}]|_{\mathrm{E}\times\{t\}} = t\omega' + (1-t)\,\omega,$$

et $\Delta_{\omega,\omega'} : \mathrm{I}^k(\mathrm{G}) \to \mathrm{A}^{2k-1}(\mathrm{M})$ l'application composée $\int_0^1 \circ\, \lambda_{[\overrightarrow{\omega,\omega'}]}$.

(Notant Ω_t la courbure sur $\mathrm{E} \times \{t\}$ de la connexion $t\omega' + (1-t)\omega$, la courbure $\widetilde{\Omega}$ de $[\overrightarrow{\omega\,,\,\omega'}]$ est égale à $(dt \wedge \omega' - \omega) + \Omega_t$, de sorte que

$$f(\widetilde{\Omega}) = (dt \wedge k\, f(\omega' - \omega\,,\,\Omega_t)) + f(\Omega_t)$$

et

$$\Delta_{\omega,\omega'}(f) = k \int_0^1 f(\omega' - \omega,\, \Omega_t)\, dt.$$

Rappelons la formule

PROPOSITION 2.1. (S. Chern). –

$$d \circ \Delta_{\omega,\omega'} = \lambda_{\omega'} - \lambda_\omega\,,$$

qui prouve en particulier que la classe de cohomologie de $\lambda_\omega(f)$ *ne dépend pas de* ω : *on notera* $\lambda : \mathrm{I(G)} \to \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(\mathrm{M}\,,\,\mathrm{R})$ *l'homomorphisme d'algèbres de Chern-Weil induit en cohomologie.*

Si $G = GL(q, \mathbf{R})$ et si $Q \to M$ désigne le fibré vectoriel de rang q associé à un G-fibré principal $E \to M$, on notera parfois λ_∇ et $\Delta_{\nabla,\nabla'}$ les homomorphismes précédents où ∇, ∇' désignent les lois de dérivations ou connexions sur Q associées à ω et ω', et $[\overrightarrow{\nabla, \nabla'}]$ la connexion sur $Q \times I \to M \times I$ associée à $[\overrightarrow{\omega, \omega'}]$.

3. Définitions et exemples de $\mathcal{J}$-connexions.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal homogène de $I(G)$ ($\mathcal{J} \subset I^+(G) = \underset{k \geq 1}{\oplus} I^k(G)$). On appellera *$\mathcal{J}$-connexion* sur un G-fibré principal $E \to M$ toute connexion ω sur E telle que :

$$\forall f \in \mathcal{J} \qquad \lambda_\omega(f) = 0$$

(il s'agit de la forme différentielle $\lambda_\omega(f)$, et pas seulement de sa classe de cohomologie). On remarquera que cette notion est respectée par l'image réciproque des fibrés et des connexions.

Si P désigne une propriété du degré des polynomes homogènes sur $\underline{G}$, on notera $\mathcal{J}(P)$ l'idéal homogène engendré par les polynomes homogènes dont le degré vérifie P. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ désignent des polynomes homogènes $\in I^+(G)$, on notera $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ l'idéal homogène qu'ils engendrent.

Exemple 1. – Si $\dim M = n$, il est clair que toute connexion sur $E \to M$ est une $\mathcal{J}\left(> \left[\frac{n}{2}\right]\right)$-connexion.

Exemple 2. – Si une connexion ω est plate (c'est-à-dire sans courbure) c'est une $I^+(G)$-connexion.

Exemple 3. – Si la courbure Ω d'une connexion ω vérifie $\Omega^{r+1} \equiv 0$ ($\Omega^{r+1} = \Omega \wedge \Omega \wedge \ldots \wedge \Omega$ pour le produit extérieur défini par $\underline{G} \times \underline{G} \times \ldots \times \underline{G} \to \underline{G} \otimes \underline{G} \otimes \ldots \otimes \underline{G}$), ω est une $\mathcal{J}(> r)$-connexion. Les exemples 1, 2, 7 et 8 sont des cas particuliers de cette situation.

Si $G = GL(q, \mathbf{R})$, $I(G) = \mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]$ avec

$$\text{dét}(I + tA) = 1 + \sum_{i=1}^{q} c_i(A) t^i \qquad \forall A \in gl(q, \mathbf{R})$$

(c_1 = Trace, ..., c_q = déterminant). On notera $Q \to M$ le fibré vectoriel associé à E, et on confondra parfois la connexion ω sur E et la loi de dérivation ∇ associée sur Q.

Exemple 4. – Si ∇ est une connexion sur Q à groupe d'holonomie inclus dans un sous-groupe compact de $GL(q, \mathbf{R})$, c'est une $\mathcal{J}$(impair)-connexion : en effet, une telle connexion respecte une métrique riemannienne sur Q, et

$$\lambda_\nabla (c_{2i+1}) = 0 \qquad \text{(cf. [1] p. 29).}$$

Exemple 5. – Si Q est orientable, et si ∇ a un groupe d'holonomie inclus dans $SL(q, \mathbf{R})$, c'est une $\{c_1\}$-connexion.

Exemple 6. – Si Q se décompose sous la forme $Q'_k \oplus (q - k)$ d'une somme de Whitney d'un fibré de rang k et d'un fibré trivial de rang $q - k$, et si le groupe d'holonomie d'une connexion ∇ sur Q est inclus dans $GL(k, \mathbf{R}) \times \{1_{\mathbf{R}^{q-k}}\}$ (ou dans un autre sous-groupe de $GL(q, \mathbf{R})$ conjugué du précédent), ∇ est une $\{c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_q\}$-connexion.

Exemple 7. – (connexions "basiques" de Bott [1], et plus généralement connexions "adaptées" de Martinet [10]).

Soit L un système différentiel (ou sous-fibré vectoriel différentiable de T(M)) sur une variété M de dimension n. Soit Q le fibré quotient, supposé de rang q :

$$0 \to L \underset{}{\overset{s}{\leftrightarrows}} T(M) \underset{\pi}{\overset{\lambda}{\leftrightarrows}} Q \to 0.$$

On dira, d'une connexion ∇ sur Q qu'elle est "*adaptée*" à une scission λ de la suite exacte ci-dessus si, $\forall X \in \Gamma(L)$, $\nabla_X \sigma = \pi[X, \lambda(\sigma)]$; (de telles connexions existent). On dit que le système différentiel L est de classe maximale $\leqslant r$ ($q \leqslant r \leqslant n$) s'il existe un sous-fibré vectoriel différentiable D de L, de dimension $n - r$, tel que $[X, Y]$ soit une section de L pourvu que X soit une section de D et Y une section de L. On démontre alors (Martinet) que toute connexion adaptée est une $\mathcal{J}(> r)$-connexion, si la classe maximale de L est $\leqslant r$. [Bien entendu, cela n'a d'intérêt que si $r < \frac{n}{2}$, en vertu de l'exemple 1].

Si $r = q$, le système différentiel L est intégrable, et les connexions adaptées sont les connexions basiques de Bott, Q étant le fibré transverse à un feuilletage de codimension q.

Exemple 8. – (Connexions "transverses projetables" de Molino [11]). Si le fibré Q, transverse à un feuilletage de codimension q, admet une connexion transverse projetable (c'est-à-dire localement image réciproque d'une connexion sur le fibré tangent à l'espace des feuilles), une telle connexion transverse projetable est une $\mathcal{J}\left(> \frac{q}{2}\right)$-connexion (Molino). (C'est par exemple le cas si le feuilletage admet une métrique quasi-fibrée ; cf. aussi Pasternak [12]).

4. Construction des classes exotiques.

Nous allons généraliser une construction faite par Bott dans le cas du fibré transverse à un feuilletage ([1]). Soient $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ deux idéaux homogènes de I(G). Si $f \in I^k(G)$, notons respectivement $\overline{f}$ et $\overline{\overline{f}}$ sa classe d'équivalence modulo $\mathcal{J}$ et modulo $\mathcal{J}'$. Graduons les algèbres $I(G)/\mathcal{J}$ et $I(G)/\mathcal{J}'$ en posant, $\forall f \in I^k(G)$, $\dim \overline{f} = \dim \overline{\overline{f}} = 2k$.

Soit $\Lambda(I^+(G))$ l'algèbre extérieure construite sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à l'idéal maximal $I^+(G)$. On définit une graduation sur $\Lambda(I^+(G))$ en posant, $\forall f \in I^k(G)$ $(k > 0)$: $\dim f = 2k - 1$.

On identifiera $I(G)/\mathcal{J}$, $I(G)/\mathcal{J}'$ et $\Lambda(I^+(G))$ à des sous-algèbres de l'algèbre produit tensoriel gradué

$$\boxed{\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}') = I(G)/\mathcal{J} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} I(G)/\mathcal{J}' \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \Lambda(I^+(G))}$$

($I^+(G)$ est identifié à une partie de $\Lambda(I^+(G)) \subset \hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$) par l'isomorphisme $I^+(G) \xrightarrow[\sim]{h} \Lambda^1 I^+(G)$. On définit une différentielle (de degré + 1) sur $\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ en posant : $d(\overline{f}) = d(\overline{\overline{f}}) = 0$ $\forall f \in I(G)$, et $df = \overline{\overline{f}} - \overline{f}$ $\forall f \in I^+(G)$.

Soit $E \to M$ un G-fibré principal différentiable, et supposons qu'il existe sur E une $\mathcal{J}$-connexion ω et une $\mathcal{J}'$-connexion ω' : on définit alors un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\rho_{\omega,\omega'} : \hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}') \to A^*(M)$ en posant :

$$\rho_{\omega,\omega'}(\overline{f}) = \lambda_\omega(f) \ , \quad \rho_{\omega,\omega'}(\overline{\overline{f}}) = \lambda_{\omega'}(f)$$

et

$$\rho_{\omega,\omega'}(f_1 \wedge \ldots \wedge f_r) = \Delta_{\omega,\omega'}(f_1) \wedge \ldots \wedge \Delta_{\omega,\omega'}(f_r) \qquad (f_i \in I^+(G)).$$

Notons $\rho^*_{\omega,\omega'} : H^*(\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) \to H^*(M, R)$ l'homomorphisme d'algèbres graduées induit en cohomologie.

On appellera *classes caractéristiques exotiques* (ou secondaires) associées à $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$, ω, ω') les éléments de $\mathrm{Im}\, \rho^*_{\omega,\omega'} - \mathrm{Im}\, \lambda$.

5. Réduction de $W(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ à une sous-algèbre $W_A(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$.

Soit A un système de générateurs homogènes de l'*idéal* $I^+(G)$ et soit $\Lambda(A)$ l'algèbre extérieure construite sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par A. Notons $W_A(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ la sous-algèbre différentielle graduée de $\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ égale à $I(G)/\mathcal{J} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} I(G)/\mathcal{J}' \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \Lambda(A)$, et $\rho^A_{\omega,\omega'}$ la restriction de $\rho_{\omega,\omega'}$ à $W_A(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$.

Remarque. – Je dois à Kamber et Tondeur d'avoir attiré mon attention sur le cas particulier où $\underline{G}$ est réductive (cf. Koszul [8]) : $I(G)$ est alors une algèbre de polynomes $\mathbf{R}[\mu_1, \ldots, \mu_\ell]$, et si l'on prend pour A l'ensemble $\{\mu_1, \ldots, \mu_\ell\}$, $\Lambda(A)$ s'identifie à $H^*(\underline{G}, \mathbf{R})$.

THEOREME 5.1. – *Les morphismes* $(\rho^A_{\omega,\omega'})^*$ et $(\rho_{\omega,\omega'})^*$, *induits en cohomologie, ont même image dans* $H^*(M, \mathbf{R})$.

Soient $f_1, \ldots, f_r$ des polynomes homogènes $f_i \in I^{k_i}(G)$. On prendra garde à bien distinguer le produit des polynomes $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_r$ (de dimension $2\left(\sum_{i=1}^{r} k_i\right) - 1$ dans $\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$) et le produit $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_r$ dans l'algèbre extérieure (de dimension $2\left(\sum_{i=1}^{r} k_i\right) - r$ dans $\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$).

LEMME 5.2. – *Soit* $f = u \cdot v$ *le produit de deux polynomes* u *et* v, *homogènes appartenant à* $I^+(G)$. *Posons :*

$$f_1 = \overline{u}v + \overline{\overline{v}}u \qquad (f_1 \in \hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')).$$

La différence $f - f_1$ *est alors un cocycle dans* $\hat{W}(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$, *dont l'image par* $\rho_{\omega,\omega'}$ *est un cobord.*

On a en effet $df = \overline{\overline{u}}\,\overline{\overline{v}} - \overline{u}\,\overline{v}$, et

$$df_1 = \overline{u}\,(\overline{\overline{v}} - \overline{v}) + \overline{\overline{v}}(\overline{\overline{u}} - \overline{u}) = \overline{\overline{u}}\,\overline{\overline{v}} - \overline{u}\,\overline{v}.$$

Donc $f - f_1$ est un cocycle.

Soit $\widetilde{\Omega}$ la courbure de $[\overrightarrow{\omega\, ,\omega'}]$ sur $E \times I$ et $\Omega_t = \widetilde{\Omega}|_{E\times\{t\}}$ la courbure de $\omega_t = t\,\omega' + (1-t)\,\omega$ sur E.

On identifiera implicitement les formes basiques sur un fibré principal avec leur projection sur la base.

Rappelons que, pour $f \in I^k(G)$,

$$f(\widetilde{\Omega}) = dt \wedge kf(\omega' - \omega,\ \Omega_t) + f(\Omega_t)$$

de sorte que :

$$\Delta_{\omega,\omega'}(f) = \int_0^1 f(\widetilde{\Omega}) = k\int_0^1 f(\omega' - \omega,\ \Omega_t)\, dt$$

tandis que :

$$\lambda_\omega\,(f) = f(\Omega) = \int_0^1 f(\Omega)\, dt \qquad (\Omega\ = \Omega_0)$$

$$\lambda_{\omega'}(f) = f(\Omega') \qquad (\Omega' = \Omega_1).$$

D'autre part, si $u \in I^k(G)$, $v \in I^\ell(G)$ $(k,\ \ell > 0)$, et si $f = u \cdot v$, on a : $f(\widetilde{\Omega}) = u(\widetilde{\Omega}) \wedge v(\widetilde{\Omega})$, soit :

$$f(\widetilde{\Omega}) = dt \wedge [ku(\omega' - \omega,\ \Omega_t) \wedge v(\Omega_t) + \ell v(\omega' - \omega,\ \Omega_t) \wedge u(\Omega_t)] + u(\Omega_t) \wedge v\,(\Omega_t).$$

Ainsi, $\rho_{\omega,\omega'}(f - f_1) = \rho_{\omega,\omega'}(u\,v - \overline{u}v - \overline{\overline{v}}u)$ est égal à

$$\int_0^1 (ku(\omega' - \omega,\ \Omega_t) \wedge [v(\Omega_t) - v(\Omega')] + \\ + \ell v(\omega' - \omega,\ \Omega_t) \wedge [u\,(\Omega_t) - u\,(\Omega')])\, dt.$$

Notons $\Delta_{\omega,\widetilde{\omega}}\, u$ (resp. $\Delta_{\omega',\widetilde{\omega}}\, v$) la forme basique sur $E \times \mathbf{R}$ dont la valeur en $(z\ ,\ t)$ est égale à $(\Delta_{\omega,\omega_t} u)_z$ [resp. $(\Delta_{\omega',\omega_t} v)_z$].

Soit α la forme $\Delta_{\omega,\widetilde{\omega}}(u) \wedge v(\widetilde{\Omega}) + \Delta_{\omega',\widetilde{\omega}}(v) \wedge u(\widetilde{\Omega})$. Puisque $u(\widetilde{\Omega})$ et $v(\widetilde{\Omega})$ sont des cocycles, et puisque

$$d(\Delta_{\omega,\widetilde{\omega}}\,(u)|_{E\times\{t\}}) = u(\Omega_t) - u(\Omega)$$

$$d(\Delta_{\omega',\widetilde{\omega}}\,(v)|_{E\times\{t\}}) = v(\Omega_t) - v\,(\Omega'),$$

$$d\alpha = dt \wedge \mathrm{U} + \mathrm{V} \qquad (\text{où } \mathrm{V} \wedge dt = 0)$$

avec

$$\mathrm{U} = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega',\omega_t}(v)) \wedge u(\Omega_t) + \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega,\omega_t}(u)) \wedge v(\Omega_t)$$
$$+ ku(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge [v(\Omega_t) - v(\Omega')]$$
$$+ \ell u(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge [u(\Omega_t) - u(\Omega)]$$

et

$$\int_0^1 d\alpha = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega',\omega_t}(v) \wedge u(\Omega_t) + \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega,\omega_t}(u)) \wedge v(\Omega_t)\right] dt$$
$$+ \rho_{\omega,\omega'}(f - f_1).$$

D'autre part, d'après le th. 3.10 (p. 15) de [1],

$$\int_0^1 d\alpha = d\left(\int_0^1 \alpha\right) + \alpha_{\mathrm{E}\times\{1\}} - \alpha_{\mathrm{E}\times\{0\}} = d\left(\int_0^1 \alpha\right) + \rho_{\omega,\omega'}(f_1).$$

D'après le théorème 1 de [6], on a d'autre part :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega',\omega_t}(v)) = \text{cobord} + \ell v(\omega' - \omega, \Omega_t)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega,\omega_t}(u)) = \text{cobord} + ku(\omega' - \omega, \Omega_t).$$

Puisque $u(\Omega_t)$ et $v(\Omega_t)$ sont des cocycles,

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega',\omega_t}(v)) \wedge u(\Omega_t))\, dt = \text{cobord} + \int_0^1 (\ell v(\omega' - \omega, \Omega_t) \quad u(\Omega_t))dt$$

et

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t}(\Delta_{\omega,\omega_t}(u)) \wedge v(\Omega_t)\right) dt = \text{cobord} + \int_0^1 k[u(\omega' - \omega, \Omega_t) \wedge v(\Omega_t)] dt$$

et $d\left(\int_0^1 \alpha\right) + \rho_{\omega,\omega'}(f_1) = \text{cobord} + \rho_{\omega,\omega'}(f) + \rho_{\omega,\omega'}(f - f_1).$

Donc $\rho_{\omega,\omega'}(f - f_1) = $ cobord, d'où le lemme.

Démonstration du théorème. – Soit $f = u \cdot v$ le produit de 2 polynomes homogènes u et v, appartenant à $\mathrm{I}^+(\mathrm{G})$. Identifiant toujours

$I^+(G) = \Lambda^1(I^+(G))$ à une partie de $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$, tout élément X de $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ contenant f peut s'écrire sous la forme $X = f \wedge X' + X''$ où ni X', ni X'' ne contiennent f (ce qui signifie que f n'appartient pas au sous-espace vectoriel de $I^+(G)$ engendré par les facteurs des éléments décomposables de $\Lambda(I^+(G))$ intervenant dans X' et X'') : on en déduit que dX' et dX'' non plus ne contiennent pas f, et par conséquent, si

$$dX = (\bar{\bar{f}} - \bar{f})\, X' - f \wedge dX' + dX''$$

est nul, c'est que l'on a simultanément :

$$(\bar{\bar{f}} - f)\, X' + dX'' = 0 \quad \text{et} \quad dX' = 0.$$

Soit alors $X_1 = f_1 \wedge X' + X''$ où $f_1 = \bar{u}v + \bar{\bar{v}}u$.

Puisque $df_1 = df = \bar{\bar{f}} - \bar{f}$,

$$dX_1 = (\bar{\bar{f}} - \bar{f})\, X' - f_1 \wedge dX' + dX''.$$

Ainsi, si X est un cocycle de $\hat{W}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$, il en est de même de X_1. D'autre part, $\rho_{\omega,\omega'}(X - X_1) = \rho_{\omega,\omega'}(f - f_1) \wedge \rho_{\omega,\omega'}(X')$ est un cobord (en effet $\rho_{\omega,\omega'}(X')$ est un cocycle puisque X' en est un, et $\rho_{\omega,\omega'}(f - f_1)$ est un cobord d'après le lemme). Ainsi, les cocycles $\rho_{\omega,\omega'}(X)$ et $\rho_{\omega,\omega'}(X_1)$ sont cohomologues. Puisque tout polynome $f \in I^+(G)$ est combinaison linéaire de produits $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_r$ de polynomes $a_i \in A$, il suffit de réitérer un nombre fini de fois la construction précédente pour prouver que tout cocycle $X \in W(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ peut être remplacé par un cocycle $X_0 \in W_A(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ tel que $\rho_{\omega,\omega'}(X)$ et $\rho_{\omega,\omega'}(X_0)$ soient cohomologues. Ceci achève la démonstration du théorème

Convention. – Si $G = GL(q, R)$, on notera $W(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ l'algèbre $W_A(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ obtenue en prenant $A = \{c_1, \ldots, c_q\}$. On notera h_i l'image de c_i par l'isomorphisme canonique $I^+ G \xrightarrow[\approx]{h} \Lambda^1 I^+(G)$.

6. Calcul(1) de $H^*(W(\mathcal{G}, \mathcal{G}'))$.

Supposons pour simplifier $G = GL(q, R)$. Pour tout sous-ensemble $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ de $\{1, \ldots, q\}$, on notera $\{c_\alpha\}$ l'idéal homogène

(1) Je dois à J.P. Jouanolou d'avoir attiré mon attention sur le rôle que devait jouer, dans ce calcul, la structure de complexe de Koszul.

de I(G) engendré par les c_{α_i}, $\mathbf{R}[c_\alpha]$ la sous-algèbre $\mathbf{R}[c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_k}]$ de I(G) et $\Lambda(h_\alpha)$ la sous-algèbre $\Lambda(h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_r})$ de

$$\Lambda(h_1, \ldots, h_q) = \Lambda(\mathrm{A}).$$

THEOREME 6.1. – i) *L'inclusion dans* $\mathrm{W}(\mathfrak{I}(> r), \{c_\alpha\})$ *de la sous-algèbre différentielle graduée* $\mathbf{R}[c_n, \ldots, c_q]/\mathfrak{I}(> r) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \Lambda(h_\alpha)$ *induit un isomorphisme en cohomologie.*

ii) *En particulier, pour* $r = 0$, *on obtient :*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{W}(\mathrm{I}^+(\mathrm{GL}(q, \mathbf{R})), \{c_\alpha\})) = \Lambda(h_\alpha).$$

Notons $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_\ell)$ le complémentaire de α dans $\{1, \ldots, q\}$.

Notons U la sous-algèbre de $\mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{I}(> r) \otimes \mathbf{R}[c_\beta]$ engendrée par les différentielles $dh_{\beta_u} = c_{\beta_u} - \overline{c}_{\beta_u}$ $(1 \leqslant u \leqslant \ell)$ ($\overline{c}_{\beta_u}$ désignant la classe de c_{β_u} modulo $\mathfrak{I}(> r)$). Notons W′ la sous-algèbre différentielle $\mathrm{U} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \Lambda(h_\alpha)$ et W″ la sous-algèbre différentielle

$$\mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{I}(> r) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \Lambda(h_\alpha).$$

Il est alors clair que l'algèbre $\mathrm{W}(\mathfrak{I}(> r), \{c_\alpha\})$ qui est égale à $\mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{I}(> r) \otimes \mathbf{R}[c_\beta] \otimes \Lambda(h_\alpha) \otimes \Lambda(h_\beta)$ est encore égale au produit tensoriel d'algèbres différentielles graduées $\mathrm{W}' \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathrm{W}''$, et par conséquent :

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{W}(\mathfrak{I}(> r), \{c_\alpha\})) = \sum_{p+q=i} \mathrm{H}^p(\mathrm{W}') \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathrm{H}^q(\mathrm{W}'').$$

Le théorème résultera donc immédiatement du

LEMME 6.2. – $\mathrm{H}^p(\mathrm{W}') = 0$ *si* $p > 0$, *et* $\mathrm{H}^0(\mathrm{W}) = \mathbf{R}$.

En effet, W′ est égale encore à l'algèbre extérieure $\Lambda_\mathrm{U}(h_\beta)$ construite sur de U-module libre de base h_β et la différentielle d applique $\Lambda^i_\mathrm{U}(h_\beta)$ dans $\Lambda^{i-1}_\mathrm{U}(h)$ avec $du = 0$ $\forall u \in \mathrm{U}$: cela signifie que W′ est ainsi muni d'une structure de complexe de Koszul, avec sa graduation homologique $\mathrm{W}'_i = \Lambda^i_\mathrm{U}(h_\beta)$, dont on notera $\mathrm{H}_*(\mathrm{W}')$ l'homologie. Puisque $\mathrm{U} \subset \mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{I}(> r) \otimes \mathbf{R}[c_\beta]$ et que $\mathbf{R}[c_\beta]$ est un anneau de polynomes, $c_{\beta_1} - \overline{c}_{\beta_1}$ n'est pas diviseur de 0 dans U ; puisque $\mathrm{U}/dh_{\beta_1}, \ldots, dh_{\beta_{u-1}}$ peut s'identifier à la sous-algèbre de U engendrée par $dh_{\beta_u} = c_{\beta_u} - \overline{c}_{\beta_u}, \ldots, dh_{\beta_\ell} = c_{\beta_\ell} - \overline{c}_{\beta_\ell}$, on montre de même que $c_{\beta_u} - \overline{c}_{\beta_u}$ n'est pas diviseur de 0 dans $\mathrm{U}/dh_{\beta_1}, \ldots, dh_{\beta_{n-1}}$, ceçi $\forall u = 1, \ldots, \ell$: on en déduit (cf. par exemple Serre [14] p. IV.4) que

$$\mathrm{H}_p(\mathrm{W}') = 0 \qquad \forall p > 0.$$

D'autre part

$$\mathrm{H}_0(\mathrm{W}') = \mathrm{U}/dh_{\beta_1}, \ldots, dh_{\beta_\ell} \cong \mathbf{R}.$$

Soit maintenant x un i-cocycle de W' (graduation cohomologique) ; si x n'est pas un cobord, c'est que $x \in \mathrm{W}_0 = \mathrm{U}$; puisque $d : \mathrm{W}_1 \to \mathrm{U}$ a pour image l'idéal maximal U^+ des termes de dim > 0 dans U, on peut même affirmer que $x \in \mathrm{U}^0 = \mathrm{W}^0$: ainsi $\mathrm{H}^p(\mathrm{W}') = 0$ $\forall p > 0$, et $\mathrm{H}^0(\mathrm{W}') = \mathbf{R}$.

THEOREME 6.3. (J. Vey). – *Soit toujours r un entier $\geqslant 0$ et $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \{1, \ldots, q\}$. Notons* J *l'ensemble des suites d'entiers $j = (j_1, \ldots, j_a)$, éventuellement vides, telles que $1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_a \leqslant q$ et $j_1 + \ldots + j_a \leqslant r$ si $j \neq 0$. Notons $\mathfrak{S}$ l'ensemble des suites d'entiers $i = (i_1, \ldots, i_b)$, éventuellement vides, telles que $i_1 < i_2 < \ldots < i_b$ et $\{i_1, \ldots, i_b\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Notons $c_j h_i$ l'élément*

$$\overline{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{j_a}} \cdot h_{i_1} \wedge h_{i_2} \wedge \ldots \wedge h_{i_b}$$

de $\mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r) \otimes \Lambda(h_\alpha)$. Posons, pour $i \in \mathfrak{S}$, $i_0 = i_1$ si $i \neq \emptyset$ et $i_0 = +\infty$ si $i = \emptyset$. Dire que $c_j h_i$ est un cocycle équivaut à $(j_1 + \ldots + j_a) + i_0 > r$, puisque

$$d(c_j h_i) = \sum_{\lambda=1}^{b} \overline{c_{j_1} c_{j_2} \ldots c_{j_a} \cdot c_{i_\lambda}}\ h_{i_\lambda} \wedge \ldots \wedge \widehat{h_{i_\lambda}} \wedge \ldots \wedge h_{i_b}$$

Notons, pour $j \in \mathrm{J}$, $j_0 = j_1$ si $j \neq \emptyset$ et $j_0 = +\infty$ si $j = \emptyset$. Une base de $\mathrm{H}^*(\mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r) \otimes \Lambda(h_\alpha))$ est alors fournie par les classes de cohomologie des cocycles $c_j h_i$ vérifiant $(j_1 + \ldots + j_a) + i_0 > r$ et $i_0 \leqslant j_0$.

La démonstration, donnée dans [4] pour $r = q$, se généralise sans difficulté au cas général.

THEOREME 6.4. — *Soient* α *et* α' *deux sous-ensembles de* $\{1, \ldots, q\}$. *Soit* $\beta = \beta_1, \ldots, \beta_\ell$ *le complémentaire de* $\alpha \cup \alpha'$ *dans* $\{1, \ldots, q\}$. *Notons* U_β *et* V_β *les sous-algèbres de* $\mathbf{R}[c_\beta] \otimes \mathbf{R}[c_\beta]$ *engendrés respectivement par les* $c_{\beta_u} \otimes 1 + 1 \otimes c_{\beta_u}$ $(1 \leqslant u \leqslant \ell)$ *et* $c_{\beta_u} \otimes 1 - 1 \otimes c_{\beta_u}$ $(1 \leqslant u \leqslant \ell)$, *de sorte que* $R[c_\beta] \otimes R[c_\beta] = U_\beta \otimes V_\beta$.

$$H^*(W(\{c_\alpha\}, \{c_{\alpha'}\})) = U_\beta \otimes \Lambda(h_{\alpha \cap \alpha'}).$$

En effet, notons $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$ les complémentaires de α et α' dans $\{1, \ldots, q\}$ $[\beta = \overline{\alpha} \cap \overline{\alpha}']$. L'algèbre $W(\{c_\alpha\}, \{c_{\alpha'}\})$ est alors égale au produit tensoriel d'algèbres différentielles graduées

$$W_1 \otimes W_2 \otimes W_3 \otimes W_4$$

avec

$$\begin{cases} W_1 = R(c_{\overline{\alpha} - \overline{\alpha}'}) \otimes \Lambda(h_{\overline{\alpha} - \overline{\alpha}'}) \\ W_2 = R(c_{\overline{\alpha}' - \overline{\alpha}}) \otimes \Lambda(h_{\overline{\alpha}' - \overline{\alpha}}) \\ W_3 = V_\beta \otimes \Lambda(h_\beta) \\ W_4 = U_\beta \otimes \Lambda(h_{\alpha \cap \alpha'}) \end{cases}$$

où W_1, W_2 et W_3 sont acycliques et W_4 a une différentielle nulle. Le théorème en résulte.

Remarque. — U_β correspond évidemment aux classes caractéristiques réelles ordinaires, et $\Lambda(h_{\alpha \cap \alpha'})$ aux classes exotiques.

7. $\mathcal{J}$-connexité des espaces de connexions et rigidité des classes exotiques.

Grâce à un argument d'invariance homotopique, on pourrait croire que les classes exotiques ne dépendent pas du choix des connexions ω et ω', pourvu que l'on fasse varier celles-ci dans des ensembles connexes (ou au moins convexes) de $\mathcal{J}$-connexions et de $\mathcal{J}'$-connexions. Nous donnerons au § 8 des contre exemples montrant qu'il n'en est rien. On a besoin d'une notion plus forte que la connexité, et que nous appellerons $\mathcal{J}$-connexité.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal homogène de I(G), E $\to$ M un G-fibré principal, et ω_0 , ω_1 deux $\mathcal{J}$-connexions sur E. Nous dirons que ω_0 et ω_1 sont "*différentiablement $\mathcal{J}$-homotopes*" s'il existe une $\mathcal{J}$-connexion $\widetilde{\omega}$ sur le G-fibré principal E $\times$ I $\to$ M $\times$ I telle que

$$\widetilde{\omega}\,|_{E\times\{0\}} = \omega_0 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\omega}\,|_{E\times\{1\}} = \omega_1 .$$

[Notons plus généralement ω_s la connexion induite par $\widetilde{\omega}$ sur E $\times$ $\{s\}$: ω_s est une $\mathcal{J}$-connexion, de sorte que ω_0 et ω_1 peuvent être jointes par une famille différentiable de $\mathcal{J}$-connexions ; mais nous verrons que l'hypothèse est en fait plus forte].

Nous dirons plus généralement que ω_0 et ω_1 sont "*$\mathcal{J}$-homotopes*" s'il existe une suite finie $\omega_0 = \omega_{s_0}$, ω_{s_1}, $\omega_{s_2}, \ldots$, $\omega_{s_k} = \omega_1$ de $\mathcal{J}$-connexions telle que, $\forall i = 0, \ldots , k-1$, ω_{s_i} et $\omega_{s_{i+1}}$ soient différentiablement $\mathcal{J}$-homotopes : la $\mathcal{J}$-homotopie (notée $\overset{\mathcal{J}}{\simeq}$) est la relation d'équivalence engendrée par la $\mathcal{J}$-homotopie différentiable.

Un ensemble C de $\mathcal{J}$-connexions sera dit "*$\mathcal{J}$-connexe*" s'il est non vide et si 2 connexions quelconques de cet ensemble sont toujours $\mathcal{J}$-homotopes.

Remarque. – Tout sous-ensemble non vide d'un ensemble $\mathcal{J}$-connexe est encore $\mathcal{J}$-connexe ; en particulier un ensemble $\mathcal{J}$-connexe n'est pas nécessairement connexe (il le sera toutefois s'il est maximal parmi les ensembles $\mathcal{J}$-connexes).

THEOREME 7.1. – *L'algèbre* Im $\rho^*_{\omega,\omega'}$ *ne dépend que de la composante $\mathcal{J}$-connexe de ω, et de la composante $\mathcal{J}'$-connexe de ω'.*

Il suffit de démontrer que les homomorphismes

$$W(\mathcal{J}, \mathcal{J}') \underset{\rho_{\omega_1,\omega'}}{\overset{\rho_{\omega_0,\omega'}}{\rightrightarrows}} A^*(M)$$

sont (algébriquement) homotopes, pourvu que ω_0 et ω_1 soient différentiablement $\mathcal{J}$-homotopes.

Notant i_s : M $\to$ M $\times$ I l'application $x \to (x , s)$, il suffit de démontrer que le diagramme suivant est un diagramme commutatif d'homomorphismes d'algèbres différentielles

$$(\text{car } i_0 \sim i_1 \Rightarrow \rho_{\omega_0,\omega'} \sim \rho_{\omega_1,\omega'}),$$

$$\begin{tikzcd} \hat{W}(\mathcal{J},\mathcal{J}') \arrow[rr, "\rho_{\omega_s,\omega'}"] \arrow[dr, "\rho_{\tilde\omega,\tilde\omega'}"'] & & A^*(M) \\ & A^*(M \times I) \arrow[ur, "(i_s)^*"'] & \end{tikzcd}$$

où $\tilde\omega$ désigne une $\mathcal{J}$-connexion sur E x I joignant ω_0 et ω_1

$$\omega_s = \tilde\omega|_{E\times s} \quad \text{et où} \quad \tilde\omega' = [\omega' , \vec{\omega}']$$

(notations du § 2). Pour que ceci ait un sens, il faut d'abord vérifier que $\tilde\omega'$ est une $\mathcal{J}'$-connexion, sachant que ω' en est une : c'est immédiat, car ω' est l'image réciproque de ω' par la projection M x I → M. Il reste alors à vérifier la commutativité des 3 diagrammes :

$$\begin{tikzcd} I(G)/\mathcal{J} \arrow[rr, "\lambda_{\omega_s}"] \arrow[dr, "\lambda_{\tilde\omega}"'] & & A^*(M) \\ & A^*(M \times I) \arrow[ur, "(i_s)^*"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} I(G)/\mathcal{J}' \arrow[rr, "\lambda_{\omega'}"] \arrow[dr, "\lambda_{\tilde\omega'}"'] & & A^*(M) \\ & A^*(M \times I) \arrow[ur, "(i_s)^*"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} I^*(G) \arrow[rr, "\Delta_{\omega_s,\omega'}"] \arrow[dr, "\Delta_{\tilde\omega,\tilde\omega'}"'] & & A^*(M) \\ & A^*(M \times I) \arrow[ur, "(i_s)^*"'] & \end{tikzcd}$$

Celle des 2 premiers est immédiate puisque

$$\tilde\omega|_{E\times\{s\}} = \omega_s \quad \text{et} \quad \tilde\omega'|_{E\times\{s'\}} = \omega'.$$

Notant j_s : M x I → M x I x I l'application $(x , t) \to (x, t, s)$, la commutativité du 3$^{\text{ème}}$ diagramme équivaut à celle de

$$\begin{tikzcd} & A^*(M \times I) \arrow[rr, "\int_0^1 dt"] & & A^*(M) \\ I^+(G) \arrow[ur, "\lambda_{[\omega_s,\omega']}"] \arrow[dr, "\lambda_{[\tilde\omega,\vec{\tilde\omega}']}"'] & & & \\ & A^*(M \times I \times I) \arrow[uu, "(j_s)^*"] \arrow[rr, "\int_0^1 dt"'] & & A^*(M \times I) \arrow[uu, "(i_s)^*"'] \end{tikzcd}$$

Le triangle commute car $\overrightarrow{[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}']}|_{M \times I \times \{s\}} = \overrightarrow{[\omega_s, \omega']}$.

Le rectangle commute de façon évidente.

Soit plus généralement $\mathfrak{J}_1$ un idéal inclus dans $\mathfrak{J}$: toute $\mathfrak{J}$-connexion ω est à fortiori une $\mathfrak{J}_1$-connexion, de sorte que le diagramme commute pour toute $\mathfrak{J}$-connexion ω et $\mathfrak{J}'$-connexion ω',

$$\begin{tikzcd}
\hat{W}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}') \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, "\rho_{\omega,\omega'}"] & \\
& A^*(M) \\
\hat{W}(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') \arrow[ur, "\rho_{\omega,\omega'}"'] &
\end{tikzcd}$$

γ désignant l'épimorphisme naturel induit par $I(G)/\mathfrak{J}_1 \to I(G)/\mathfrak{J}$. Du morceau de suite exacte

$$\ldots \to H^i(\hat{W}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}')) \xrightarrow{\gamma^*} H^i(W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')) \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(\mathrm{Ker}\,\gamma) \to \ \ldots,$$

on déduit le

COROLLAIRE 7.2. – *Si ω varie dans un ensemble* C *de $\mathfrak{J}$-connexions qui n'est que $\mathfrak{J}^1$-connexe, les classes exotiques* $\rho^*_{\omega,\omega'}([\alpha])$ *ne dépendent pas de ω, pourvu que* $\partial[\alpha] = 0$.

Avec les notations ci-dessus

THEOREME 7.3. – (Interprétation des classes exotiques comme obstructions).

Soit $\mathfrak{J}^1$ un idéal de I(G) *inclus dans $\mathfrak{J}$, et* $K^*(W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'))$ *la sous-algèbre de* $H^*(W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'))$ *formé des classes de cohomologie* $[\alpha]$ *telles que* $\partial[\alpha] = 0$.

Supposons l'ensemble C *de $\mathfrak{J}$-connexions $\mathfrak{J}_1$-connexe et* C′ *$\mathfrak{J}'$-connexe. Alors :*

i) *la restriction* $\rho : K^*(W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')) \to H^*(M, \mathbf{R})$ *de* $\rho^*_{\omega,\omega'}$ *à* $K^*(W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'))$ *est indépendante des connexions ω et ω' choisies respectivement dans* C *et* C′.

ii) *s'il existe une classe exotique non nulle dans* Im ρ, *alors* $C \cap C' = \emptyset$.

La partie i) du théorème résulte immédiatement de 7.1 et 7.2 Supposons $C \cap C' \neq \emptyset$: puisque ρ est indépendant des connexions $\omega \in C$ et $\omega' \in C'$, on peut choisir $\omega = \omega' \in C \cap C'$; or, la forme de courbure $\widetilde{\Omega}$ de $[\omega, \overrightarrow{\omega'}]$, égale à $dt \wedge (\omega' - \omega)$ + (terme sans dt), devient ici $\widetilde{\Omega} = (p_1)^{-1}\ \Omega$ où $p_1 : E \times \mathbf{R} \to E$ désigne la $1^{\text{ère}}$ projection, et n'a pas de terme en dt : on en déduit

$$\int_0^1 \lambda_{[\omega,\vec{\omega}]}(f) = \Delta_{\omega,\omega}(f) = 0 \qquad \forall f \in I^+(G),$$

et par conséquent les classes exotiques qui sont dans Im ρ doivent être nulles.

Remarque. – Le théorème 7.3 ci-dessus s'applique en particulier au cas où C est $\mathcal{J}$-connexe avec $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$, auquel cas

$$K^*(W(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) = H^*(W'(\mathcal{J}, \mathcal{J}')).$$

8. Déformations de classes exotiques.

Exemple 1. – Prenons

$$G = GL(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^* \quad , \quad M = S^1 \quad \text{et} \quad Q = \mathbf{R} \times S^1 \to S^1$$

(fibré trivial de dim 1).

On a $I(G) = \mathbf{R}[c_1]$ (où $c_1(a) = a \quad \forall a \in \mathbf{R} = \mathbf{R}^*$).

PROPOSITION 8.1. – *L'ensemble* C *de toutes les connexions sur* Q *est convexe* (*donc connexe*), *formé de* $I^+(G)$-*connexions* (*elles sont toutes sans courbure, car* dim $S^1 = 1$), *et n'est cependant pas* $I^+(G)$-*connexe.*

Nous allons en effet construire une classe exotique non nulle, en prenant $\mathcal{J}' = \mathcal{J} = I^+(G)$, $C' = C$.

Puisque $C \cap C' \neq \emptyset$, il en résultera que C n'est pas $I^+(G)$-connexe, d'après le th. 7.3.

Tout d'abord $W(\mathcal{J}, \mathcal{J}') = \Lambda(h_1)$ avec différentielle nulle.

$$H^*(W(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) = \Lambda(h_1).$$

Soit σ la section définissant la trivialisation canonique de $Q : \sigma(\theta) = (1, \theta) \in \mathbf{R} \times S^1 \quad (\theta \in S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$.

Soient ω, et ω' deux connexions définies respectivement par les lois $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}} \sigma = f . \sigma$ et $\nabla'_{\frac{\partial}{\partial\theta}} \sigma = g . \sigma$ où f, g sont 2 fonctions C^∞ de S^1 dans $\mathbf{R}$. La connexion $\widetilde{\nabla} = [\overrightarrow{\nabla, \nabla'}]$ sur $Q \times I \to S^1 \times I$ a une courbure qui vérifie : $\widetilde{\Omega} = (g - f)\, dt \wedge d\theta)$.

On en déduit $\rho_{\omega,\omega'}(h_1) = (g - f)\, d\theta$.

Il est clair que l'on peut obtenir ainsi toutes les 1-formes sur S^1. Par exemple si ∇^s désigne, pour $s \in \mathbf{R}$, la connexion définie par $\nabla^s_{\frac{\partial}{\partial\theta}} \sigma = s . \sigma$, $\rho_{\omega_{s_0}\omega_s}(h_1) = (s - s_0)\, d\theta$: l'application $s \to \rho^*_{\omega_0\omega_s}[h_1]$ est donc un isomorphisme de groupes de $\mathbf{R}$ sur $H^1(S^1, \mathbf{R})$.

Exemple 2. – Thurston ([15]) a montré qu'il existe sur S^3 une famille F_s de feuilletages de codimension 1 telle que l'invariant de Godbillon-Vey varie continument. On en déduit la

PROPOSITION 8.2. (Thurston). – *Sur le fibré vectoriel trivial* $\mathbf{R} \times S^3 \to S^3$, *il existe un ensemble connexe de* $(c_1)^2$*-connexions, qui n'est pas* $(c_1)^2$*-connexe.*

Prenant en effet

$$G = GL(1, \mathbf{R}), \quad I(G) = \mathbf{R}[c_1].$$

Prenant $\quad \mathfrak{J} = \{(c_1)^2\} \quad$ et $\quad \mathfrak{J}' = I^+(G)$,

on obtient $\quad W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') = \mathbf{R}[c_1]/(c_1)^2 \otimes \Lambda(h_1)$

a pour cohomologie $\mathbf{R} . 1 \otimes \mathbf{R}(\overline{c_1 . h_1})$. Prenant pour Q_s le fibré transverse au feuilletage F_s de codimension 1, pour ω_s une connexion basique (c'est une $(c_1)^2$-connexion), et pour ω'_s la connexion plate associée à une trivialisation de Q_s (c'est une $I^+(G)$-connexion), l'invariant de Godbillon-Vey est égal à $\rho^*_{\omega_s,\omega'_s}(\overline{c_1 . h_1})$. D'après la définition même de la famille F_s, il est possible de se ramener au cas d'un seul fibré $\mathbf{R} \times S^3 \to S^3$, avec $\omega'_s = c^{te}$ et ω_s = famille différentiable de $(c_1)^2$-connexions sur ce fibré.

Exemple 3. — Sur une variété compacte M de dimension 3, prenons $Q = T(M)$, $\mathcal{J} = I^+(GL(3, R))$ et $\mathcal{J}' = \mathcal{J}(> 1)$: toute connexion sur Q est une $\mathcal{J}'$-connexion, et toute connexion respectant une métrique riemannienne est une $\mathcal{J}$-connexion. Prenons pour ω la connexion de Lévi-Civita d'une métrique riemannienne sur M, et pour ω' une connexion triviale respectant cette métrique (M est parallélisable). On a alors : $H^*(W(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) = \Lambda(h_2, h_3)$ et $\int_M \rho_{\omega,\omega'}(h_2)$ est un nombre réel dont la classe modulo $\mathbf{Z}$ n'est autre que l'invariant de Chern-Simons [3] ; en particulier $\rho^*_{\omega,\omega'}[h_2]$ peut n'être pas nul (c'est le cas si $M = P^3(R)$). Puisque $\forall s \in I$, la connexion

$$\omega_s = s\omega' + (1 - s)\,\omega$$

est à la fois une $\mathcal{J}$ et une $\mathcal{J}'$-connexion, l'application $s \to \rho^*_{\omega,\omega_s}[h_2]$ est une déformation évidente de la classe exotique $\rho^*_{\omega,\omega'}[h_2]$.

9. Exemples de $\mathcal{J}$-connexité.

Pour un ensemble de connexions, "connexe" voudra dire dans la suite : "connexe par arcs différentiables par morceaux".

THEOREME 9.1. — *Tout ensemble connexe non vide de connexions sur* $E \to M$ *vérifiant* $\Omega^{r+1} \equiv 0$ (cf. *exemple 3,* § *3*) *est un ensemble de* $\mathcal{J}(> r)$*-connexion qui n'est que* $\mathcal{J}(> r + 1)$*-connexe.*

Remarque. — Cet ensemble n'est en général pas $\mathcal{J}(> r)$-connexe comme le prouvent les exemples 1 et 2 du §8.

Soit en effet $(\omega_s)_{s\in I}$ une famille différentiable de connexions sur E vérifiant $(\Omega_s)^{r+1} \equiv 0$ $\forall s$. Soit $\tilde{\omega}$ la connexion sur $E \times I \to M \times I$ définie par $\tilde{\omega}|_{E\times\{s\}} = \omega_s$ et $\tilde{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = 0$. Elle a pour courbure : $(\tilde{\Omega})_{z,s} = ds \wedge \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\right)_{z,s} + (\Omega_s)_z$, de sorte que $f(\tilde{\Omega})$, qui est égal à $k\, ds \wedge f\left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}, \Omega_s^{k-1}\right) + f(\Omega_s^k)$ pour $f \in I^k(G)$, est nul si $k - 1 \geqslant r + 1$ c'est-à-dire $k > r + 1$.

COROLLAIRE 9.2. – *Si le fibré* E *est plat, tout ensemble connexe non vide de connexions sans courbure sur* E *est* $\mathcal{J}(> 1)$*-connexe.*

cf. aussi plus loin le théorème 9.6. (partie (i)).

COROLLAIRE 9.3. – *Tout ensemble connexe non vide de connexions sur* $E \to M$ *est* $\mathcal{J}\left(> \left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$*-connexe, si* $n = \dim M$.

En fait, on a le résultat plus fort suivant :

PROPOSITION 9.4. – *Tout ensemble non vide de connexions sur* $E \to M$ *est* $\mathcal{J}\left(> \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$*-connexe, si* $n = \dim M$.

En effet, si ω et ω' sont 2 connexions sur E, $[\overrightarrow{\omega , \omega'}]$ est une connexion sur $E \times I \to M \times I$: c'est donc une $\mathcal{J}\left(> \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$-connexion puisque $\dim(M \times I) = n + 1$. (Cf. l'exemple 1 du § 3).

Sorite. – Soit P une propriété de l'ensemble des G-connexions (c'est-à-dire de l'ensemble des couples (E , ω), formés d'un G-fibré principal différentiable E et d'une connexion ω sur E). On dira que ω est une "P-connexion" si (E , ω) possède la propriété P. On supposera en outre que l'image réciproque d'une P-connexion est une P-connexion. Généralisant les définitions du § 7, on dira que deux P-connexions ω_0 et ω_1 sur un même G-fibré principal $E \to M$ sont "différentiablement P-homotopes" s'il existe une P-connexion $\widetilde{\omega}$ sur $E \times I \to M \times I$ telle que $\widetilde{\omega}|_{E\times\{0\}} = \omega_0$ et $\widetilde{\omega}|_{E\times\{1\}} = \omega_1$. On définit de même la "P-homotopie" (notée $\omega_0 \overset{P}{\simeq} \omega_1$) et la P-connexité. On démontre de façon immédiate :

LEMME 9.5. – *Si* P′ *est une autre propriété de l'ensemble des G-connexions, respectée par image réciproque, et telle que* $P \Rightarrow P'$, *alors*

$$(\omega_0 \overset{P}{\simeq} \omega_1) \Rightarrow (\omega_0 \overset{P'}{\simeq} \omega_1).$$

THEOREME 9.6. – i) *Si* E *est trivial, tout ensemble connexe non vide de connexions triviales (c'est-à-dire à holonomie nulle) est* $I^+(G)$*-connexe* [*alors qu'un ensemble connexe de connexions sans courbure n'est pas nécessairement* $I^+(G)$*-connexe, comme on l'a vu au § précédent*].

ii) *L'ensemble des connexions sur un fibré vectoriel* Q (*de dimension* q) *pour lesquelles il existe une métrique riemannienne invariante, est* $\mathfrak{J}$(impair)-*connexe.*

iii) *L'ensemble des connexions sur* Q (*supposé orientable*) *pour lesquelles il existe une forme volume invariante est* $\{c_1\}$-*connexe.*

iv) *L'ensemble des connexions sur* $Q = Q'_k \oplus (q - k)$ *qui respectent la décomposition ci-dessus est* $\{c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_q\}$-*connexe.*

v) *L'ensemble des connexions adaptées sur le fibré transverse à un système différentiel de classe maximale* $\leqslant r$ *est* $\mathfrak{J}(> r)$-*connexe.*

vi) *L'ensemble (supposé non vide) des connexions transverses projetables à un feuilletage de codimension* q *est* $\mathfrak{J}\left(> \frac{q}{2}\right)$-*connexe.*

Dans chacun des cas ci-dessus, on notera P la propriété correspondante donnée dans le tableau ci-dessous, et on va appliquer le lemme au cas où P′ est la propriété d'être une $\mathfrak{J}$-connexion.

hypothèse sur E	P	$\mathfrak{J}$
E est trivial	connexion triviale	$I^+(G)$
$G = GL(q, \mathbf{R})$	groupe d'holonomie inclus dans un groupe compact de $GL(q, \mathbf{R})$	$\mathfrak{J}$(impair) $= \{c_1, c_3, \ldots\}$
Q est orientable	groupe d'holonomie inclus dans $SL(q, \mathbf{R})$	$\{c_1\}$
$Q = Q'_k \oplus q - k$	connexion respectant la décomposition ci-contre	$\{c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_q\}$
Q est le fibré transverse à un système différentiel de classe maximale $\leqslant r$	connexion adaptée	$\mathfrak{J}(> r)$
Q est le fibré transverse à un feuilletage admettant une connexion transverse projetable	connexion transverse projetable	$\mathfrak{J}\left(> \frac{q}{2}\right)$

i) soit $\omega_s (s \in \mathrm{I})$ une famille C^∞ de connexions triviales. Soit $z_0 \in \mathrm{E}$ et σ_s la section de E, horizontale pour ω_s, et passant par z_0 ; on définit une section $\widetilde{\sigma}$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M} \times \mathrm{I}$ en posant

$$\widetilde{\sigma}(x\,,\,s) = (\sigma_s(x)\,,\,s),$$

et une connexion $\widetilde{\omega}$ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{I}$ en imposant à $\widetilde{\sigma}$ d'être horizontale pour $\widetilde{\omega}$: il est clair que $\widetilde{\omega}$ réalise une P-homotopie entre ω_0 et ω_1.

ii) Soit ∇^0 une connexion respectant la métrique g^0 sur $\mathrm{Q} \to \mathrm{M}$,
et ∇^1 » » » g^1 » $\mathrm{Q} \to \mathrm{M}$.
Soit $g^t = tg^1 + (1-t)\, g^0 (-\epsilon < t < 1 + \epsilon,\ \epsilon > 0$ assez petit pour que g^t soit une métrique sur Q).

Soit $\widetilde{g}$ la métrique sur $\mathrm{Q} \times]-\epsilon,\ 1+\epsilon\ [\to \mathrm{M} \times]-\epsilon,\ 1+\epsilon[$ définie par $\widetilde{g}|_{\mathrm{M}\times\{t\}} = g^t$, et soit $\widetilde{\nabla}$ une connexion sur $\mathrm{Q} \times]-\epsilon,\ 1+\epsilon[$, respectant $\widetilde{g}$; notant ∇'^t la connexion induite par $\widetilde{\nabla}$ sur $\mathrm{Q} \times \{t\} \simeq \mathrm{Q}$, $\widetilde{\nabla}$ définit une P-homotopie entre ∇'^0 et ∇'^1 : $\nabla'^0 \overset{\mathrm{P}}{\simeq} \nabla'^1$.

Soit $\widetilde{g}^0$ la métrique sur $\mathrm{Q} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M} \times \mathrm{I}$ obtenue à partir de g^0 par image réciproque $\mathrm{M} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M}$, et $[\overrightarrow{\nabla^0\,,\,\nabla'^0}]$ la connexion sur $\mathrm{Q} \times \mathrm{I}$ obtenue par combinaison affine de ∇^0 et ∇'^0 : $[\overrightarrow{\nabla^0\,,\,\nabla'^0}]$ respecte $\widetilde{g}^0$ et réalise une P-homotopie entre ∇^0 et ∇'^0 : $\nabla^0 \overset{\mathrm{P}}{\simeq} \nabla'^0$; et, de même $\nabla^1 \overset{\mathrm{P}}{\simeq} \nabla'^1$.

iii) Remplaçant g^0 et g^1 par des formes volumes η_0 et η_1, la démonstration de iii) est analogue à celle de ii), une fois remarqué que l'on peut toujours orienter Q, supposer les formes η_0 et η_1 positives (car $\nabla\eta = 0 \Rightarrow \nabla(-\eta) = 0$), et que les formes volumes > 0 forment un espace convexe.

iv) Si ∇^0 et ∇^1 sont deux connexions sur $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'_k \oplus (q-k)$, respectant la décomposition précédente, $[\overrightarrow{\nabla^0\,,\,\nabla^1}]$ est une connexion sur $\mathrm{Q} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M} \times \mathrm{I}$, respectant la décomposition

$$\mathrm{Q} \times \mathrm{I} = (\mathrm{Q}'_k \times \mathrm{I}) \oplus (q-k)$$

obtenue à partir de celle de Q par image réciproque $\mathrm{M} \times \mathrm{I} \to \mathrm{M}$, et réalisant une P-homotopie entre ∇^0 et ∇^1.

v) Soient ∇^0 et ∇^1 deux connexions sur le fibré Q transverse à un système différentiel $0 \to \mathrm{L} \underset{s_0}{\overset{s_1}{\leftrightarrows}} \mathrm{T(M)} \overset{\pi}{\to} \mathrm{Q} \to 0$ de classe maximale $\leqslant r$, correspondant à des scissions s_0 et s_1 de la suite ci-dessus :

$$\begin{cases} \nabla^0_x(\pi y) - \nabla^0_y(\pi x) - \pi([x\,,y]) = -\,\pi[s_0 x\,,\,s_0 y]\,, \\ \nabla^1_x(\pi y) - \nabla^1_y(\pi x) - \pi([x\,,y]) = -\,\pi[x_1 x\,,\,s_1 y]\,. \end{cases}$$

Soient $s_t = ts_1 + (1 - t)\,s_0$ le projecteur obtenu par combinaison affine, et $R_t = \operatorname{Ker} s_t$ le supplémentaire correspondant de L dans T(M). Identifiant T(M x I) à $(p_1)^{-1}$ T(M) $\oplus$ 1, on définit un système différentiel $\overline{L}$ sur $\overline{M \times I}$ en posant : $\overline{L} = (p_1)^{-1}\, L \oplus \underline{1}$; et on définit un supplémentaire $\overline{R}$ de $\overline{L}$ dans T(M x I) en posant $\overline{R}|_{M\times\{t\}} = R_t$: le fibré quotient $\overline{Q} = T(M \times I)/\overline{L}$ est égal à $(p_1)^{-1}(Q) = Q \times I \to M \times I$. Soit $\overline{\nabla}$ une connexion sur $\overline{Q}$ adaptée à $\overline{R}$; si la classe maximale de L est $\leqslant r$, celle de $\overline{L}$ aussi, de sorte que les connexions $\overline{\nabla}^0$ et $\overline{\nabla}^1$ induite par $\overline{\nabla}$ sur M x {0} et M x {1} sont P-homotopes. Il reste à montrer que $\overline{\nabla}^0$ et ∇^0 d'une part, $\overline{\nabla}^1$ et ∇^1 d'autre part sont P-homotopes également. Prenant cette fois-ci $\overline{R}^0 = (p_1)^{-1}\, R^0$, $\overrightarrow{[\nabla^0\,,\,\overline{\nabla}^0]}$ est une P-homotopie sur $\overline{Q}$, adaptée à $\overline{R}^0$, pour le système différentiel $\overline{L}$ de classe maximale $\leqslant r$. De même, ∇^1 et $\overline{\nabla}^1$ sont P-homotopes.

vi) Soient ∇^0 et ∇^1 deux connexions transverses projetables sur le fibré Q transverse à un feuilletage de codimension

$$q\;:\;0 \to L \to T(M) \to Q \to 0$$

(L fibré tangent aux feuilles). Notant p_1 : M x I $\to$ M la 1$^{\text{ère}}$ projection, $\overline{L} = (p_1)^{-1}\, L \oplus 1$ est un feuilletage de même codimension q sur M x I, dont le fibré quotient $\overline{Q}$ est égal à $(p_1)^{-1}\, Q = Q \times I \to M \times I$. La connexion $\overrightarrow{[\nabla^0\,,\,\nabla^1]}$ sur $\overline{Q}$ est transverse projetable, et par conséquent $\nabla^0 \overset{P}{\simeq} \nabla^1$.

10. Quelques applications.

1/ *Théorèmes de rigidité*

a) On a vu (th. 6.1) que

$$H^*(W(\mathcal{J}(> r), \{c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_k}\})) =$$

$$= H^*(R[c_1\,, \ldots, c_q]/\mathcal{J} > r) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}\,, \ldots, h_{\alpha_k})).$$

et qu'une base de la cohomologie est fournie par les classes de cohomologie des cocycles $c_j h_i$ vérifiant $|j| + i_0 > r$, $i_0 \leqslant j'_0$. (th. 6.3, avec ses notations).

Soient ω une connexion vérifiant $\Omega^{r+1} \equiv 0$, et ω' une $\{c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_k}\}$ connexion sur un même fibré vectoriel de dimension q.

THEOREME 10.1 (J.L. Heitsch). – *Si* $|j| + i_0 > r + 1$ (*avec les notations du théorème 6.3*), $\rho^*_{\omega,\omega'}([c_j\ h_i])$ *ne dépend que de la composante connexe (par arcs différentiables par morceaux) de* ω *dans l'espace des connexions vérifiant* $\Omega^{r+1} \equiv 0$.

Considérons en effet l'homomorphisme

$$\partial : \mathrm{H}^p(\mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_k})) \to \mathrm{H}^{p+1}(\mathrm{Ker}\ \gamma)$$

associé à la suite exacte d'algèbres différentielles graduées

$$0 \to \mathrm{Ker}\ \gamma \to \mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r + 1)$$
$$\otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_k}) \xrightarrow{\gamma} \mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_k}) \to 0.$$

Notant $\overline{f}^r$ la classe d'équivalence modulo $\mathfrak{J}(> r)$ de $f \in \mathrm{I}^+(\mathrm{G})$, $\partial[c_j\ h_i]$ est égal à la classe de cohomologie dans Ker γ de l'élément

$$\sum_{\lambda=1}^{b} \pm\, \overline{c_{j_1} \ldots_{j_a} \cdot c_{i_\lambda}}^{r+1}\ h_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{h_{i_\lambda}} \wedge \ldots \wedge h_{i_b}$$

appartenant à $\mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r + 1) \otimes \Lambda(h_{\alpha_1}, \ldots, h_{\alpha_k})$, et est donc nul si $|j| + i_0 > r + 1$. Il suffit donc d'appliquer 7.2 et 9.1 pour conclure.

On redémontre ainsi, par une autre méthode et sans utiliser de formule de dérivation, le théorème de rigidité de J.L. Heitsch ([6]).

b) *Etude générale du cas ou* C' *est un ensemble de connexions sans courbure et où* $\mathfrak{J}' = \mathrm{I}^+(\mathrm{G})$.

On a alors : $\mathrm{W}(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') = \mathrm{I}(\mathrm{G})/\mathfrak{J} \otimes \Lambda(\mathrm{I}^+(\mathrm{G}))$.

Supposons, pour simplifier, $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(q, \mathbf{R})$ et soit, comme d'habitude, h_1 l'image de c_1 par l'isomorphisme $\mathrm{I}^+(\mathrm{G}) \xrightarrow{h} \Lambda^1(\mathrm{I}^+(\mathrm{G})) \subset \Lambda\, \mathrm{I}^+(\mathrm{G})$. Pour tout $f \in \mathrm{I}(\mathrm{G})$, on notera $\overline{f}$ sa classe modulo $\mathfrak{J}$.

Tout élément X de $\hat{W}(\mathcal{J}, I^+(G))$ peut s'écrire sous la forme $X = h_1 Y + Z$, où Y et Z (donc aussi dY et dZ) ne contiennent pas de terme en h_1).

THEOREME 10.2. – *Supposons que* X *soit un cocycle de* $\hat{W}(\mathcal{J}, I^+(G))$, ω *une* $\mathcal{J}$*-connexion et* ω' *une connexion sans courbure. La classe de cohomologie* $\rho^*_{\omega,\omega'}([X])$ *dans* $H^*(M, \mathbf{R})$ *ne dépend alors que de la composante connexe de* ω' *dans l'espace des connexions sans courbure, sous l'une des 2 hypothèses suivantes :*

i) Y *est un cobord de la forme* dV (V *ne contenant pas* h_1),

ii) Y *est de la forme* $\sum_i \bar{a}_i \cdot Y_i$, *où les* Y_i *sont des cocycles et les* a_i *des polynomes de degré* $\geqslant 1$.

Puisque $dX = -h_1 \cdot dY + dZ - \bar{c}_1 \cdot Y$, dire que X est un cocycle signifie que Y en est un, et que $dZ = \bar{c}_1 \cdot Y$. Nous allons d'abord montrer comment la $2^{\text{ème}}$ hypothèse peut se ramener à la $1^{\text{ère}}$.

Soit donc

$$X = h_1 \cdot \Big(\sum_i \bar{a}_i\, Y_i\Big) + Z \qquad \text{avec} \qquad dY_i = 0 \ \forall i,$$

et
$$dZ = \bar{c}_1 \sum_i \bar{a}_i\, Y_i .$$

Posons $X_1 = \sum_i h(c_1 a_i)\, Y_i + Z$. La différence $X - X_1$ est égale à $\sum_i (\bar{a}_i h_1 - h(c_1 a_i)) \cdot Y_i$. Puisque Y_i est un cocycle, $X - X_1$ est un cocycle et son image par $\rho^*_{\omega,\omega'}$ est un cobord d'après le lemme 5.2. On a donc $\rho^*_{\omega,\omega'}([X]) = \rho^*_{\omega,\omega'}([X_1])$ et X_1 ne contient pas le terme h_1, donc vérifie l'hypothèse i).

De la suite exacte d'algèbres différentielles graduées :

$$0 \to I(G)/\mathcal{J} \otimes \mathbf{R} \cdot \bar{\bar{c}}_1 \otimes \Lambda(I^+(G)) \to I(G)/\mathcal{J} \otimes \mathbf{R}\,[c_1]/(c_1)^2 \otimes \Lambda(I^+(G))$$
$$\xrightarrow{\gamma} I(G)/\mathcal{J} \otimes \Lambda(I^+(G)) \to 0$$

($\bar{\bar{c}}_1$ désignant la classe de c_1 modulo $\mathcal{J}(> 1)$), on déduit l'homomorphisme

$$\partial : H^i(I(G)/\mathcal{J} \otimes \Lambda(I^+(G)) \to H^{i+1}\, I(G)/\mathcal{J} \otimes \mathbf{R} \cdot \bar{\bar{c}}_1 \otimes \Lambda(I^+(G))).$$

D'après 7.2 et 9.1, il suffit de prouver que $\partial([X]) = 0$ sous l'hypothèse i). Or $\partial([X])$ est la classe de cohomologie de $\overline{\overline{c}}_1 \cdot Y$ dans $\operatorname{Ker}\gamma$, qui est évidemment nulle sous l'hypothèse considérée (si $Y = dV$, V ne contenant pas h_1, $\overline{\overline{c}}_1 \cdot Y$ est la différentielle de $\overline{\overline{c}}_1 \cdot V$ dans $\operatorname{Ker}\gamma$).

Remarque. – L'hypothèse i) est en particulier vérifiée si X ne contient pas de terme en h_1.

2/ *Obstructions à ce que le groupe d'holonomie d'une connexion plate soit fini.*

Soit $Q \to M$ un fibré vectoriel plat de rang q, et ∇ une connexion sans courbure sur Q.

Prenons $C = \{\nabla\}$, $\mathfrak{J} = I^+(GL(q, R)) = \{c_1, \ldots, c_q\}$
$C' = \{$connexions sur Q laissant une métrique invariante$\}$
$\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}(\text{impair}) = \{c_1, c_3, \ldots, c_{\text{impair}} \ldots\}$.

D'après 6.1, $H^*(W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')) = \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \ldots, h_{\text{impair}} \ldots)$.

D'après 9.6, C' est $\mathfrak{J}'$-connexe de sorte que

$$\rho^*_{\nabla,\nabla'} : \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \ldots) \to H^*(M, \mathbf{R})$$

ne dépend que de ∇, et non de ∇' (on notera ρ^*_∇ cette application). Il résulte alors de 7.3 :

Proposition 10.3. – *Pour que le groupe d'holonomie de* ∇ *soit inclus dans un sous-groupe compact de* $GL(q, \mathbf{R})$, *et en particulier pour qu'il soit fini, il faut que l'exotisme* $\operatorname{Im}\rho^*_\nabla$ *soit nul.*

Cas particulier $q = 1$. – ce cas est intéressant, d'une part parce qu'il fournit aisément des cas où l'exotisme ci-dessus n'est pas nul, d'autre part parce qu'alors la nullité de cet exotisme suffit à impliquer la finitude du groupe d'holonomie.

Donnons nous en effet une métrique riemannienne arbitraire sur le fibré $Q \to M$ de dimension 1. Soit σ_U une section de norme 1 définie sur un ouvert U de M au-dessus duquel Q est trivial. Soit ∇ une connexion sur Q : on définit une 1-forme scalaire γ_U sur U en posant $\nabla\sigma_U = \gamma_U \cdot \sigma_U$; si U est connexe, toute autre section de norme 1 au-dessus de U est égale à $-\sigma_U$; puisque

$$\nabla(-\sigma_U) = -\nabla\sigma_U = -\gamma_U \cdot \sigma_U = \gamma_U(-\sigma_U),$$

γ_U ne dépend pas du choix fait entre σ_U et $-\sigma_U$, de sorte que les γ_U se recollent : il existe une 1-forme γ sur M (entièrement définie, une fois fixée la métrique riemannienne sur Q). Puisque

$$\nabla_X \nabla_Y \sigma_U - \nabla_Y \nabla_X \sigma_U - \nabla_{[X,Y]} \sigma_U = d\gamma_U(X, Y) \cdot \sigma_U,$$

il revient au même de dire que ∇ est sans courbure ou que γ est une forme fermée.

PROPOSITION 10.4. – *Supposons ∇ sans courbure. La classe de cohomologie $[\gamma]$ de la forme fermée définie ci-dessus ne dépend pas du choix de la métrique riemannienne sur* Q, *et est égale à $\rho_\nabla^*(-h_1)$. Le groupe d'holonomie de ∇ est fini ou non, selon que cette classe de cohomologie est nulle ou non.*

Soit en effet χ_U la section locale définie par σ_U du fibré principal $E \to M$ associé à Q, et soit ∇' la connexion sur Q respectant la métrique riemannienne donnée : $\nabla' \sigma_U = 0$. Avec les notations du § 2, $\chi_U^*(t\,\omega' + (1-t)\omega) = (1-t)\,\gamma_U$, de sorte que la courbure $\widetilde{\Omega}$ de $[\nabla, \vec{\nabla'}]$ vérifie :

$$\chi_U^*(\widetilde{\Omega}) = -\,dt \wedge \gamma_U\,.$$

On en déduit $\rho_{\nabla,\nabla'}^*(h_1) = -\gamma$, d'où la 1$^{\text{ère}}$ partie de la proposition. Supposons γ cohomologue à 0 : il existe une fonction différentiable $\psi : M \to \mathbf{R}$ telle que $\gamma = -\,d\psi$.

On définit une nouvelle métrique riemannienne sur Q en imposant aux sections σ_U et $-\sigma_U$ d'avoir pour norme $e^{-\psi}$, et l'on vérifie aisément que ∇ respecte cette nouvelle métrique : son groupe d'holomie est alors nécessairement inclus dans $0(1) = \{-1, +1\}$ et est isomorphe à $\{0\}$ ou $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ selon que Q est ou non trivial ; ceci achève la démonstration de la proposition 10.4.

En particulier, si Q est trivial et si σ est une section partout non nulle, on définit une connexion plate à l'aide de toute 1-forme fermée γ en posant $\nabla\sigma = \gamma \cdot \sigma$. Si $H^1(M, \mathbf{R}) \neq 0$, on peut choisir γ non cohomologue à 0, et l'exotisme $\rho_\nabla^*(h_1)$ n'est pas nul.

Revenons au cas général *q quelconque*. Du théorème 10.2, on déduit :

PROPOSITION 10.5. – *Le sous-ensemble* $\rho_\nabla^*(\Lambda_{\mathbf{R}}(h_3, h_5, \ldots))$ *ne dépend que de la composante connexe de* ∇ *dans l'espace des connexions plates. Si, par conséquent, il contient au moins* 1 *élément non nul, il n'est pas possible de déformer* ∇ *en une connexion à holonomie finie en restant dans l'espace des connexions plates.*

3/ *Obstruction à ce qu'une connexion plate sur un fibré vectoriel ait un groupe d'holonomie inclus dans* $\mathrm{SL}(q, \mathbf{R})$.

Soit $Q \to M$ un fibré vectoriel plat, orientable, de dimension q et soit ∇ une connexion sans courbure sur Q. Dire que le groupe d'holonomie de ∇ est inclus dans $\mathrm{SL}(q, \mathbf{R})$ équivaut à affirmer l'existence d'une forme volume η sur Q laissée invariante par ∇. Prenons

$$C = \{\nabla\}, \ \mathcal{J} = \mathrm{I}^+(\mathrm{GL}(q, \mathbf{R}))$$

$C' = \{$connexions sur Q à groupe d'holonomie inclus dans $\mathrm{SL}(q, \mathbf{R})\}$
$\mathcal{J}' = \{c_1\}$.

D'après 6.1, $H^*(W(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) = \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1)$. D'après 9.6, C' est $\mathcal{J}'$-connexe ; de sorte que $\rho^*_{\nabla,\nabla'} : \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1) \to H^*(M, \mathbf{R})$ ne dépend que de ∇ (on notera ρ^*_∇ cette application).

PROPOSITION 10.6. – *Pour que le groupe d'holonomie de* ∇ *soit inclus dans* $\mathrm{SL}(q, \mathbf{R})$, *il faut et il suffit que la classe* $\rho^*_\nabla(h_1) \in H^1(M, \mathbf{R})$ *soit nulle.*

La condition est évidemment nécessaire d'après 7.3. Pour démontrer la réciproque, donnons nous une forme volume arbitraire η sur Q (η est une section différentiable de $\overset{q}{\Lambda} Q^*$) et une connexion ∇' laissant η invariante : $\forall \sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U$ base locale du module des sections de Q définie sur un ouvert U de M au-dessus duquel Q est trivial, on a :

$$d[\eta(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U)] = \sum_{i=1}^{q} \eta(\sigma_1^U, \ldots, \nabla' \sigma_i^U, \ldots, \sigma_q^U),$$

soit : $$d[\eta(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U)] = \left(\sum_{i=1}^{q} (\gamma_i'^i)^U\right) \cdot \eta(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U),$$

si l'on a posé $$\nabla' \sigma_i^U = \sum_{j=1}^{q} (\gamma_i'^j)^U \cdot \sigma_j^U.$$

Puisque ∇ est sans courbure, on peut choisir $\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U$ de façon que $\nabla\ \sigma_i^U = 0\ \forall i = 1, \ldots, q$, ce que nous supposerons. Si χ_U désigne la section locale du fibré principal associé à Q définie par $(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U)$, on a, avec les notations du § 2, $\chi_U^*\omega = 0$ et $\chi_U^*\omega' = \gamma'^U$ ou $\gamma'^U = (((\gamma'^i_j)^U))_{i,j}$. Si $\widetilde{\Omega}$ désigne la courbure de $\overrightarrow{[\omega , \omega']}$, on en déduit :

$$\chi_U^*(\widetilde{\Omega}) = dt \wedge \gamma'^U + td\,\gamma'^U + \frac{1}{2}\, t^2\, [\gamma'^U , \gamma'^U],$$

et $\rho_{\nabla,\nabla'}(h_1) = \int_0^1 \mathrm{Tr}\,\widetilde{\Omega}$ a une restriction à U égale à $\mathrm{Tr}\,\gamma'^U = \sum_{i=1}^q (\gamma'^i_i)^U$, ce qui prouve en particulier que la forme $\sum_i (\gamma'^i_i)^U$ est indépendante de la trivialisation $\chi_U = (\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U)$. Si $\rho_\nabla^*(h_1) = 0$, il existe une fonction différentiable $\psi : \mathrm{M} \to \mathbf{R}$ telle que $d\psi\,|_U = \sum_i (\gamma'^i_i)_U$. Montrons que $\nabla(e^{-\psi} . \eta) = 0$; en effet ,

$$(\nabla(e^{-\psi}\eta))\,(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U) = d\,(e^{-\psi} . \eta(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U)),$$

puisque $\nabla\ \sigma_i^U = 0\ \forall i$. Or

$$d(e^{-\psi} \cdot \eta(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U)) = e^{-\psi} \cdot (-\, d\psi + \sum_i (\gamma'^i_i)^U) \cdot \eta(\sigma_1^U, \ldots, \sigma_q^U) = 0.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

COROLLAIRE 10.7. – *Supposons qu'il existe un revêtement galoisien de groupe* Π *et de base une variété* M *telle que* $\mathrm{H}^1(\mathrm{M} , \mathrm{R}) = 0$. *Tout homomorphisme de groupes* $\alpha : \Pi \to \mathrm{GL}^+(q , \mathbf{R})$ *prend alors ses valeurs dans* $\mathrm{SL}(q , \mathbf{R})$.

Il suffit en effet d'appliquer la proposition 10.6 au fibré vectoriel $\mathrm{Q} \to \mathrm{M}$ de dimension q, associé par α au revêtement galoisien de groupe Π.

Remarque. – Ce corollaire n'a d'intérêt que si l'ordre de Π est infini ; sinon il ne fait qu'énoncer une trivialité.

4/ *Obstruction à la platitude des fibrés stablement plats.*

Supposons le fibré vectoriel différentiable Q′, de rang $k \geqslant 1$, et stablement plat : il existe un fibré vectoriel trivial (soit $q - k$ son rang) tel que $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}' \oplus (q - k)$ soit plat, i.e. admette une connexion sans courbure.

Prenons pour C l'ensemble des connexions sur Q adaptées à la décomposition $Q' \oplus (q - k)$ (c'est-à-dire laissant invariantes chacune des sections canoniques du fibré trivial $q - k$, et telles que la dérivée covariante d'une section de Q' soit encore une section de Q'), avec $\mathcal{J} = \{c_{k+1}, \ldots, c_q\}$, et prenons pour C' l'ensemble des connexions plates sur Q avec $\mathcal{J}' = I^+(GL(q, \mathbf{R}))$.

D'après 6.1, on a alors $H^*(W(\mathcal{J}, \mathcal{J}')) = \Lambda_{\mathbf{R}}(h_{k+1}, \ldots, h_q)$.

On déduit de 9.6 et 10.2 :

Proposition 10.8. – i) *L'exotisme*

$$\rho^*_{\nabla,\nabla'} : \Lambda_{\mathbf{R}}(h_{k+1}, \ldots, h_q) \to H^*(M, \mathbf{R})$$

ne dépend pas du choix de ∇ *dans* C, *et ne dépend que de la composante connexe de* ∇' *dans* C'.

ii) *Il existe une bijection évidente entre* $C \cap C'$ *et l'ensemble des connexions plates de* Q'.

5/ *Transitivité transverse du pseudogroupe des automorphismes infinitésimaux d'un système différentiel de classe maximale* $\leqslant r$. $(r \geqslant q)$

Soit $0 \to L \to T(M) \to Q \to 0$ un système différentiel (notations du § 3 - exemple 7). Rappelons qu'un automorphisme infinitésimal de L est un champ de vecteurs local X sur M, tel que $\forall Y \in \Gamma(L)$, $[X, Y] \in \Gamma(L)$.

Definition. – *On dira que le pseudogroupe des automorphismes infinitésimaux de* L *est* "transversalement transitif" *s'il existe un sous-faisceau* $\mathcal{R}$ *de* $\mathbf{R}$-*espaces vectoriels du faisceau des automorphismes infinitésimaux de* L, *localement constant, dont la fibre en chaque point est de dimension* q (rang de Q), *et dont les sections sont des champs de vecteurs transverses à* L.

Remarque. – Si L est intégrable (i.e. $r = q$), la transitivité transverse implique la transitivité. Si, de plus, le faisceau $\mathcal{R}$ est constant, le groupe des automorphismes finis de L opère transitivement sur l'espace des feuilles.

LEMME 10.9. – *Pour que le pseudogroupe des automorphismes infinitésimaux de* L *soit transversalement transitif, il faut et il suffit que* Q *possède une connexion à la fois adaptée (au sens de Martinet) et plate.*

Soit $\mathcal{R}$ un faisceau vérifiant la définition de la transitivité transverse. Les sections de $\mathcal{R}$ engendrent un sous-fibré vectoriel différentiable R de T(M), supplémentaire de L, et $\mathcal{R}$ est le faisceau des sections à dérivée covariante nulle pour une connexion sans courbure sur R. Notons $\lambda : Q \overset{\cong}{\to} R$ l'isomorphisme inverse de $\pi|_R$ et ∇ la connexion sans courbure sur Q qu'on en déduit par cet isomorphisme, ∇ est adaptée à λ : en effet, soient $X_1, \ldots, X_q$ une base locale des sections de $\mathcal{R}$, et $\sigma_i = \pi X_i$; puisque X_i est un automorphisme infinitésimal de L,

$$\pi[X, \lambda\sigma_i] = 0 \quad \forall X \in \Gamma(L) \quad \forall i = 1, \ldots, q,$$

or $\nabla\sigma_i = 0$; on a donc

$$\nabla_X \sigma_i = \pi[X, \lambda\sigma_i] \quad \forall i = 1, \ldots, q \quad \forall X \in \Gamma(L) ;$$

puisque les σ_i forment une base locale du module des sections de Q, ∇ est adaptée à λ.

Réciproquement si ∇ est une connexion plate adaptée à λ sur Q, l'image $\mathcal{R} = \lambda(\mathfrak{L})$ du faisceau $\mathfrak{L}$ des germes de sections de Q à dérivée covariante nulle pour ∇ vérifie les conditions de la définition de la transitivité transverse.

Supposons maintenant le système différentiel L de classe maximale $\leqslant r$, et son fibré transverse Q plat. Prenons pour C l'ensemble des connexions sur Q adaptées au sens de Martinet avec $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(> r)$ et $C' = \{$connexions plates sur Q$\}$ avec $\mathfrak{J}' = I^+(GL(q, \mathbf{R}))$. Si $\nabla \in C$ et $\nabla' \in C'$, on en déduit un exotisme $\rho^*_{\nabla,\nabla'} : H^*(W^r_q) \to H^*(M, \mathbf{R})$, qui est en fait indépendant de ∇ puisque C est $\mathfrak{J}(> r)$-connexe, où

$$W^r_q = \mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r) \otimes \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, \ldots, h_q).$$

Notons $K^*(W^r_q)$ le sous-espace de $H^*(W^r_q)$ engendré par les cocycles $c_j\, h_i$ avec les notations du th. 6.2 vérifiant, en plus des conditions du th. 6.2 :

– ou bien $i_1 \geqslant 2$,

– ou bien $i_1 = 1,\ j_1 + \ldots j_a = r,\ \ell = 1$,

– ou bien $i_1 = 1,\ j_1 + \ldots j_a = r,\ i_2 \geqslant j_1 + 1$.

On déduit de 9.6 et 10.2 :

PROPOSITION 10.10. – *La restriction* $\rho_{\nabla'} : \mathrm{K}^*(\mathrm{W}_q^r) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{M}, \mathbf{R})$ *de* $\rho^*_{\nabla,\nabla'}$ *à* $\mathrm{K}^*(\mathrm{W}_q^r)$ *ne dépend que de la composante connexe de* ∇' *dans* C'.

Exemple. – Si $q = r = 1$, $\mathrm{K}^*(\mathrm{W}_1^1) = \mathrm{H}^*(\mathrm{W}_1^1)$ est engendré par $c_1\, h_1$: si l'invariant de Godbillon-Vey $\rho(c_1\, h_1)$ d'un feuilletage de codimension 1 n'est pas nul, le groupe des automorphismes du feuilletage n'opère pas transitivement sur l'espace des feuilles.

6/ *Existence de connexions métriques adaptées pour un système différentiel de classe maximale* $\leqslant r$, *et existence de métriques quasi-fibrées pour un feuilletage.*

Soit C l'ensemble des connexions adaptées sur le fibré transverse Q (de dimension q) à un système différentiel L, et soit C' l'ensemble des connexions métriques sur Q. D'après 9.6, C' est $\mathfrak{J}$(impair)-connexe, et si L est de classe maximale $\leqslant r$ ($r \geqslant q$), C est $\mathfrak{J}(> r)$-connexe.

D'autre part, d'après 6.1, $\mathrm{W}(\mathfrak{J}(> r), \mathfrak{J}(\text{impair}))$ a même cohomologie que sa sous-algèbre

$$\mathrm{WO}_q^r = \mathbf{R}\,[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{J}(> r) \otimes \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \ldots).$$

On en déduit :

PROPOSITION 10.11. – *L'homomorphisme*

$$\rho = \rho^*_{\nabla,\nabla'} : \mathrm{H}^*(\mathrm{WO}_q^r) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{M}, \mathbf{R})$$

est indépendant des connexions $\nabla \in \mathrm{C}$ *et* $\nabla' \in \mathrm{C}'$. *Pour qu'il existe sur* Q *une connexion métrique adaptée, il faut que* $\rho = 0$.

Dans le cas d'un feuilletage ($q = r$), l'existence d'une métrique quasifibrée (cf. [12] et [13]) équivaut à l'existence, sur Q, d'une connexion qui soit à la fois transverse projetable (au sens de Molino[11]) et métrique. Toute connexion transverse projetable étant en particulier adaptée (i.e. ici basique au sens de Bott [1]), une première condition nécessaire d'existence est évidemment que l'homomorphisme ρ de la prop. 10.11 soit nul. Mais si l'on suppose a priori l'existence de connexions transverses projetables, on obtient des obstructions plus fortes en prenant pour C l'ensemble de ces connexions, avec $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\left(> \frac{q}{2}\right)$, et $\mathrm{C}' = \{\text{connexions métriques}\}$ avec $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}(\text{impair})$.

Puisque ces ensembles sont respectivement $\mathfrak{I}\left(> \frac{q}{2}\right)$-connexe et $\mathfrak{I}$(impair)-connexe (prop. 9.6), et puisque (6.1) $\mathrm{W}\left(\mathfrak{I}\left(> \frac{q}{2}\right), \mathfrak{I}(\text{impair})\right)$ a même cohomologie que sa sous algèbre

$$\mathrm{WO}'_q = \mathbf{R}[c_1, \ldots, c_q]/\mathfrak{I}\left(> \frac{q}{2}\right) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \Lambda_{\mathbf{R}}(h_1, h_3, \ldots)$$

on obtient :

PROPOSITION 10.12. – *Si le fibré transverse à un feuilletage de codimension q sur* M *possède des connexions transverses projetables, l'exotisme*

$$\rho^*_{\nabla,\nabla'} : \mathrm{H}^*(\mathrm{WO}'_q) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{M}, \mathbf{R})$$

est indépendant des connexions ∇ et ∇' prises respectivement dans C *et* C'. *Pour que le feuilletage possède une métrique quasifibrée, il faut que cet exotisme soit nul.*

APPENDICE
(février 1973)
CLASSES EXOTIQUES UNIVERSELLES

B. CALLENAERE et D. LEHMANN

Dans une note précédente [9] dont nous reprenons les notations, l'un de nous définissait en particulier les classes exotiques associées à une $\mathfrak{J}$-connexion ω et à une $\mathfrak{J}'$-connexion ω' sur un G-fibré principal différentiable. Cette construction est étendue ici aux $\mathfrak{g}$-algèbres différentielles graduées, ce qui permet de définir des classes exotiques universelles.

1. Rappels et notations.

On note ADG la catégorie des $\mathbf{R}$-algèbres différentielles graduées anti-commutatives ($\beta\alpha = (-1)^{p.q}\alpha . \beta$ où $p = d^0 . \alpha$ et $q = d^0 . \beta$), et $\mathfrak{g}$-ADG, la catégorie des $\mathfrak{g}$-algèbres différentielles graduées ($\mathfrak{g}$- désigne une $\mathbf{R}$-algèbre de Lie de dimension finie, et une $\mathfrak{g}$-ADG est une ADG munie, pour tout élément x de $\mathfrak{g}$, d'une anti-dérivation $i(x)$ de degré -1 et d'une dérivation $\theta(x)$ de degré 0, vérifiant les relations de H. Cartan*). Soit B : $\mathfrak{g}$-ADG $\to$ ADG le foncteur qui, à tout $\mathfrak{g}$-ADG, associe la sous-algèbre de ses éléments basiques (i.e. annulés par toutes les (anti)dérivations $i(x)$ et $\theta(x)$). Rappelons en particulier que l'algèbre de Weil $W(\mathfrak{g}) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*)$ est une $\mathfrak{g}$-ADG, qu'un homomorphisme $\omega : W(\mathfrak{g}) \to E$ de $\mathfrak{g}$-ADG est appelé une *connexion* sur E, et que l'homomorphisme

$$\lambda_\omega = B\omega : I^k(\mathfrak{g}) \to (BE)^{2k}$$

est appelé *homomorphisme caractéristique* de la connexion, ou homomorphisme de Chern-Weil ($BW(\mathfrak{g})$ est égale à l'algèbre $I(\mathfrak{g})$ des polynomes sur $\mathfrak{g}$ invariants par la représentation adjointe, et ne contient que des cocycles).

(*) H. Cartan : Notions d'algèbres différentielles (Colloque de Topologie. Bruxelles - 1950 - CBRM).

2. Intégration le long des fibres.

Soit X une ADG, et $A^*(\mathbf{R}) = A^0(\mathrm{R}) \oplus A^1(\mathbf{R})$ l'ADG des formes différentielles sur **R**. Le produit tensoriel gradué $\widetilde{X} = A^*(\mathbf{R}) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} X$ est encore une ADG, et pour $t \in \mathbf{R}$, on définit un homorphisme $i_t = \widetilde{X} \to X$ de ADG en posant

$$i_t | A^1(\mathbf{R}) \otimes X^{k-1} = 0$$

$$i_t(f \otimes \alpha) = f(t) \,.\, \alpha \qquad \forall f \in A^0(\mathbf{R}) \qquad \forall \alpha \in X^k .$$

Si E est une $\mathfrak{g}$-ADG, on munit naturellement $\widetilde{E}$ d'une structure de $\mathfrak{g}$-ADG en posant, pour $x \in \mathfrak{g}$,

$$i(x)\ (a \otimes \alpha) = a \otimes i(x)\,\alpha \qquad \forall a \in A^*(\mathbf{R})\ ,\ \forall \alpha \in E$$

$$\theta(x)\ (a \otimes \alpha) = a \otimes \theta(x)\,\alpha \qquad \text{"} \qquad \text{"} \quad .$$

On a alors $B\widetilde{E} = \widetilde{BE}$. D'autre part, $i_t : \widetilde{E} \to E$ est alors un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-ADG.

Définissons l'application **R**-linéaire $\int : \widetilde{E}^k \to E^{k-1}$ (appelée "intégration le long des fibres") en posant $\int = 0$ sur $A^0(\mathbf{R}) \otimes E^k$ et

$$\int (f dt \otimes \alpha) = \left[\int_0^1 f(t)\, dt \right] \alpha \quad \text{sur} \quad A^1(\mathbf{R}) \otimes E^{k-1}$$

On vérifie sans difficulté le

LEMME 1. –

$$d \circ \int - \int \circ\, d = i_1 - i_0 .$$

3. Différence de 2 connexions.

Rappelons qu'une connexion $\omega : W(\mathfrak{g}) \to E$ sur une $\mathfrak{g}$-ADG E est entièrement définie par sa restriction à $\Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$ ($\subset \Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*)$). Soit ω' une autre connexion sur E. On définit alors une connexion $\widetilde{\omega}$ sur $\widetilde{E}$ en posant, pour tout $\xi \in \Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$:

$$\widetilde{\omega}(\xi) = \hat{t} \otimes \omega'(\xi) + (1 - \hat{t}) \otimes \omega(\xi)$$

où $\hat{t} \in A^0(R)$ désigne l'identité sur $\mathbf{R}$, $\omega'(\xi)$ et $\omega(\xi)$ appartiennent à E^1 et

$$\widetilde{\omega}(\xi) \in A^0(\mathbf{R}) \otimes E^1 \subset \widetilde{E}^1 .$$

Notons $\Delta_{\omega,\omega'} : I^k(\mathfrak{G}) \to (BE)^{2k-1}$ l'application composée

$$\Delta_{\omega,\omega'} = \int \circ \lambda_{\widetilde{\omega}} .$$

De la formule évidente $i_t \circ \widetilde{\omega} = t\omega' + (1-t)\,\omega$, et du lemme 1, on déduit immédiatement le

LEMME 2 (formule de Chern). –

$$\lambda_{\omega'} - \lambda_{\omega} = d \circ \Delta_{\omega,\omega'} .$$

4. Exotisme.

Soit $\mathfrak{J}$ un idéal homogène de $I(\mathfrak{G})$. Une $\mathfrak{J}$-connexion sur une $\mathfrak{G}$-ADG est une connexion ω telle que $B\omega \,|\, \mathfrak{J} = 0$.

Soit ω une $\mathfrak{J}$-connexion et ω' une $\mathfrak{J}'$-connexion sur une même $\mathfrak{G}$-ADG E ($\mathfrak{J}'$ désignant un autre idéal homogène de $I(\mathfrak{G})$). La construction de l'homomorphisme $\rho_{\omega,\omega'} : W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') \to BE$ de ADG, donnée [9] pour le cas des fibrés principaux, se généralise immédiatement grâce au lemme 2.

Le cas particulier où $\mathfrak{J}$ est de la forme $\mathfrak{J}(> q)$ (idéal des polynomes de degré $> q$) et où $\mathfrak{J}'$ est de la forme $\mathrm{Ker}(I(\mathfrak{G}) \to I(\mathfrak{H}))$ ($\mathfrak{H}$ désignant une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$) a été traité indépendamment par Kamber et Tondeur sous d'autres hypothèses ((2), (3), (4)).

Dans la définition de $W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') = I(\mathfrak{G})/\mathfrak{J} \otimes I(\mathfrak{G})/\mathfrak{J}' \otimes \Lambda(A)$ figure un système A de générateurs de l'*idéal* $I^+(G)$. Il n'a pas du tout été précisé que A était minimal. On aurait pu en particulier prendre pour A une base de *l'espace vectoriel* $I^+(\mathfrak{G})$. On démontre comme ci-dessus (§ 5) :

THEOREME. – *L'image de* $\rho^*_{\omega,\omega'} : H^*(W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')) \to H^*(BE)$ *est indépendante de* A ; *elle est en effet égale à celle obtenue en prenant pour* A *une base de l'espace vectoriel réel* $I^+(\mathfrak{G})$.

Dans le cas particulier où $\mathfrak{g}$ est réductive, Kamber et Tondeur nous ont fait remarquer que l'on pouvait prendre pour A l'image par une transgression d'une base de l'espace des éléments primitifs de l'algèbre $\Lambda_I(\mathfrak{g}^*)$ des co-chaines invariantes de $\mathfrak{g}$: l'algèbre $\Lambda(A)$ est alors égale à $\Lambda_I(\mathfrak{g}^*) = H^*(\mathfrak{g}, \mathbf{R})$ (cf. Koszul [8]).

5. $\mathfrak{J}$-homotopie et rigidité des classes exotiques.

Deux $\mathfrak{J}$-connexions ω_0 et ω_1 sur une $\mathfrak{g}$-ADG E seront dites *différentiablement $\mathfrak{J}$-homotopes* s'il existe une $\mathfrak{J}$-connexion $\tilde{\omega}$ sur $\tilde{E}$ telle que $\omega_0 = i_0 \circ \tilde{\omega}$ et $\omega_1 = i_1 \circ \tilde{\omega}$. On appelle $\mathfrak{J}$-homotopie la relation d'équivalence engendrée par la $\mathfrak{J}$-homotopie différentiable.

Les théorèmes du § 7 ci-dessus se généralisent immédiatement.

6. Algèbres de Weil tronquées et exotisme universel.

Pour tout idéal homogène $\mathfrak{J}$ de $I(\mathfrak{g})$, notons $\hat{\mathfrak{J}}$ l'idéal qu'il engendre dans $S(\mathfrak{g}^*)$. Notons $W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g})$ l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{g}^*) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} S(\mathfrak{g}^*)/\hat{\mathfrak{J}}$ et $\pi : W(\mathfrak{g}) \to W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g})$ la projection canonique.

Il est aisé de vérifier le

LEMME 3. –

i) *Les anti-dérivations $i(x)$ et $\theta(x)$ de $W(\mathfrak{g})$ passent aux quotients et permettent de munir $W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g})$ d'une structure naturelle de* $\mathfrak{g}$-ADG.

ii) *La projection π est une $\mathfrak{J}$-connexion sur $W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g})$.*

iii) $(W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g}), \pi)$ *est universel au sens suivant : pour tout couple (E, ω) formé d'une $\mathfrak{g}$-ADG E et d'une $\mathfrak{J}$-connexion $\omega : W(\mathfrak{g}) \to E$, il existe un homomorphisme $\bar{\omega} : W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g}) \to E$ de $\mathfrak{g}$-ADG et un seul tel que $\bar{\omega} \circ \pi = \omega$.*

Soit $\mathfrak{J}'$ un autre idéal de $I(\mathfrak{g})$, et $\pi' : W(\mathfrak{g}) \to W_{\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g})$ la $\mathfrak{J}'$-connexion universelle. Le produit tensoriel gradué

$$W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g}) = W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g}) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} W_{\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g})$$

possède une structure naturelle de $\mathfrak{g}$-ADG. Les inclusions naturelles $\iota : W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g}) \to W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g})$ et $\iota' : W_{\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g}) \to W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g})$ définissent respectivement une $\mathfrak{J}$-connexion et une $\mathfrak{J}'$-connexion sur $W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g})$.

LEMME 4. — $(W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g}), \iota, \iota')$ *est universel au sens suivant : pour tout triplet* $(E, \overline{\omega}, \overline{\omega}')$ *constitué par une* $\mathfrak{g}$-ADG E, *une* $\mathfrak{J}$*-connexion* $\overline{\omega} : W_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{g}) \to E$ *et une* $\mathfrak{J}'$*-connexion* $\overline{\omega}' : W_{\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g}) \to E$, *il existe un homomorphisme* $f : W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g}) \to E$ *de* $\mathfrak{g}$-ADG *et 1 seul tel que* $\overline{\omega} = f \circ \iota$ *et* $\overline{\omega}' = f \circ \iota'$.

Appliquons la construction du § 4 à $W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g})$ munie des connexions $\iota \circ \pi$ et $\iota' \circ \pi'$: on obtient un homomorphisme de ADG

$$\rho : W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}') \to B\, W_{\mathfrak{J},\mathfrak{J}'}(\mathfrak{g})$$

à travers lequel se factorisent tous les homomorphismes $\rho_{\omega,\omega'}$ du § 4.

*Conjecture.**— Si $\mathfrak{g}$ est réductif et si A est l'image par une transgression d'une base de l'espace des éléments primitifs de $\Lambda_{\mathrm{I}}(\mathfrak{g}^*)$, ρ induit un isomorphisme en cohomologie.

Cette conjecture est à comparer avec le résultat suivant : Dans le cas particulier $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(> q)$, $\mathfrak{J}' = \mathrm{Ker}\ \mathrm{I}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{I}(\mathfrak{H})$, la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{H})$ étant supposée réductive (et $\mathrm{I}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{I}(\mathfrak{H})$ surjectif), Kamber et Tondeur [7] ont démontré que $W(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}')$ a même cohomologie que l'algèbre des éléments $\mathfrak{H}$-basiques de $W_{\mathfrak{J}(>q)}(\mathfrak{g})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BOTT, Lectures on characteristic classes and foliations, *Lectures Notes in Math.* n° 279, Springer 1972 .

[2] R. BOTT et A. HEFLIGER, On characteristic classes of Γ-foliations, *Bulletin of An. Math. Soc.,* 1972.

[3] S. CHERN et J. SIMONS, Characteristic forms and transgression 1. (à paraître).

[4] C. GODBILLON, Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, *Séminaire Bourbaki* — Novembre 1972 .

[5] C. GODBILLON et J. VEY, Un invariant des feuilletages de codimension 1, *Note aux C.R.A.S.* Paris — Juin 1971 .

(*) Cette conjecture a été vérifiée par BOUSSOUF DIENG, et —indépendamment et dans un cadre plus général— par STEPHEN HALPERIN.

[6] J.L. HEITSCH, Déformation of secondary characteristic classes. (à paraître).

[7^I] F. KAMBER et P. TONDEUR, Characteristic invariants of foliated bundles. (à paraître dans le Bulletin de l'AMS).

[7^II] F. KAMBER et P. TONDEUR, Derived characteristic classes of L-foliated principal bundles. (A paraître).

[7^III] F. KAMBER et P. TONDEUR, Cohomologie des algèbres de Weil relatives tronquées. (A paraître dans C.R.A.S. Paris).

[8] J.L. KOSZUL, Cohomologie des algèbres de Lie, *Bulletin de la SMF* – 1950 .

[9] D. LEHMANN, $\mathcal{J}$-homotopie dans les espaces de connexions et classes exotiques de Chern-Simons, *Note aux C.R.A.S.* Paris – Octobre 1972 .

[10] J. MARTINET, Classes caractéristiques des systèmes de Pfaff, (à paraître).

[11] P. MOLINO, Connexions transverses projetables, *Notes aux C.R.A.S.* Paris – Mars et Mai 1971 .

[12] PASTERNAK, Foliations and compact Lie group actions, *Commentarii Math. Helvet.* –1972 .

[13] B. REINHART, Foliated manifolds with bundle like metrics, *Annals of Math.* – Janvier 1959.

[14] J.P. SERRE, Algèbre locale - Multiplicités, *Lectures notes in Math* n° 11 – 1965 .

[15] THURSTON, Non cobordant foliations of S^3, *Bulletin of Ann. Math. Soc.*, 1972 .

Manuscrit reçu le 31 janvier 1973
accepté par G. Reeb.

Daniel LEHMANN,
Départment de Mathématiques
Université de Lille.