Annales de l'institut Fourier

GUNTER LUMER

Perturbation de générateurs infinitésimaux du type «changement de temps»

Annales de l'institut Fourier, tome 23, nº 4 (1973), p. 271-279

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_4_271_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
23, 4 (1974), 271-279.

PERTURBATION DE GÉNÉRATEURS INFINITÉSIMAUX, DU TYPE « CHANGEMENT DE TEMPS »

par Gunter LUMER (1)

Nous obtenons un théorème général concernant la perturbation multiplicative par un opérateur (linéaire borné, mais pas forcément d'inverse borné), du générateur d'un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach. Nous en déduisons un résultat intimement lié au changement de temps dans les processus de Markov, qui étend un théorème de Dorroh (et résout par l'affirmative la seule situation qui restait en doute dans le contexte du théorème de Dorroh cité). Comme exemple d'autres possibilités d'application, nous utilisons ensuite le théorème général pour obtenir un résultat sur la perturbation du laplacien dans $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Soit X un espace de Banach complexe. Nous désignons par $\mathbf{B}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés, définis partout sur X. Nous dirons que « A est un opérateur linéaire dans X », si A est un opérateur linéaire avec domaine, D(A), et image, I(A), dans X. On rappelle qu'un opérateur linéaire A dans X est dit dissipatif, si

$$(1) \qquad \|\lambda f - Af\| \geqslant \|\lambda f\| \quad \forall \lambda > 0, \forall f \in D(A).$$

De façon équivalente, A est dissipatif, s'il existe un semi-

(1) Les résultats de cet article ont été présentés (parmi d'autres), au cours d'exposés faits en Mars 1973 au « groupe de travail Deny-Hirsch-Bénilan », à l'Université de Paris-Sud, Orsay. Le type de perturbation multiplicative traité ici est en un sens « symétrique » de celui qui intervient dans la théorie de la cogénération, mais présente des problèmes différents. (Les relations entre perturbations « à gauche » et « à droite » seront reprises ailleurs. Voir référence [L 2], note de bas de page (1).)

produit-scalaire $[,]$ compatible avec X (c'est-à-dire avec la norme de X), tel que

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Re}\,[Af, f] \leqslant 0 \quad \forall f \in D(A)$$

(« Re » désignant « partie réelle de »). Voir [L-Ph], [H]. Nous désignerons par $\mathcal{D}(X)$ l'ensemble de tous les opérateurs dissipatifs dans X.

Étant donné un opérateur linéaire A dans X, nous définissons le « type de A », $\omega(A)$, par :

$$\text{(3)} \qquad \omega(A) = \inf\{\alpha \in \mathbf{R} : A - \alpha \in \mathcal{D}(X)\},$$

$\mathbf{R}$ désignant les réels, $A - \alpha$ désignant $A - \alpha 1$, $1 =$ identité sur X. Il est entendu que si l'ensemble du second membre de (3) est vide, $\omega(A) = +\infty$. Si $B \in \mathbf{B}(X)$, on sait que, [L 1],

$$\text{(4)} \quad \omega(B) = \lim_{t \to 0^+} t^{-1}(\|1 + tB\| - 1) = \lim_{t \to 0^+} t^{-1} \log \|e^{tB}\|$$

$$\text{(5)} \qquad \omega(B) = \sup\{\operatorname{Re}\,[Bf, f] : \|f\| = 1\}$$

où $[,]$ est un semi-produit-scalaire quelconque compatible avec X. De (4), on voit que $\omega(-B) < 0$ implique $\|1 - \varepsilon B\| < 1$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit [d'où en particulier on a $B^{-1} \in \mathbf{B}(X)$]. On se servira de ces observations plus loin.

Par « un semi-groupe sur X » nous désignons « une famille $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbf{B}(X)$ dépendant du paramètre réel $t \geqslant 0$, de telle façon que : $P_{t+s} = P_t P_s$ pour $t, s \geqslant 0$, $P_0 = 1$, et $\forall f \in X$, $\|P_t f - P_{t_0} f\| \to 0$ quand $t \to t_0 > 0$, et $t \to 0^+$ pour $t_0 = 0$ ». Le semi-groupe $\{P_t\}$ est dit « à contraction », si $\|P_t\| \leqslant 1$, $\forall t \geqslant 0$. Pour les propriétés des semi-groupes, générateurs, résolvantes voir [H-Ph], [Y].

Par ailleurs, si A est le générateur d'un semi-groupe $\{P_t\}$, $\omega(A)$ coïncide avec ce qui a été défini comme « type local » d'un semi-groupe dans [L-Ph] (nous dirons aussi que $\{P_t\}$ est de type local $\omega = \omega(A)$). Dans ces conditions :

$$\text{(4')} \qquad \omega(A) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \log \|P_t\|.$$

Nous allons nous servir aussi d'un résultat de perturbation connu, voir [Gu], [Gu-L], que nous rappelons immédiatement. Pour un opérateur linéaire dans X, A, nous écrirons $\beta(A) = 0$ si et seulement si $\overline{I(A)} = X$, « — » désignant « fermeture de », (ce cas particulier de la notion « d'indice » — « deficiency index » — $\beta(\ )$, nous fournit une notation commode).

THÉORÈME. — *Soit* A *un opérateur linéaire dans* X, *dont l'inverse est défini et borné sur* $I(A) = D(A^{-1})$, *et soit* $B \in \mathbf{B}(X)$. *Supposons que :*

$$\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1} \text{ (2)}. \tag{6}$$

Alors on a :

$$\beta(A + B) = 0 \textit{ si et seulement si } \beta(A) = 0. \tag{7}$$

Nous aurons parfois à nous servir du dual de X, comme espace de Banach, que nous désignerons par X^*. Si $T \in \mathbf{B}(X)$, nous désignerons par T^* l'opérateur adjoint de T [qui appartient à $\mathbf{B}(X^*)$].

Nous allons maintenant établir le théorème de perturbation multiplicative mentionné dans le résumé au début de cet article.

1. THÉORÈME. — *Soit* A *le générateur d'un semi-groupe* $\{P_t\}_{t\geq 0}$ *sur* X, *et soit* $B \in \mathbf{B}(X)$ *avec* $\omega(-B) \leq 0$ *et* $\omega(A)$, $\omega(BA)$, $< +\infty$. *Supposons qu'il existe une suite de* $B_n \in \mathbf{B}(X)$ *tels que* $\omega(-B_n) < 0$, $\limsup_n \omega(B_nA) < +\infty$, *et* $(BB_n^{-1})^* \to 1^*$ *au sens fort. Alors* BA *est le prégénérateur d'un semi-groupe de type local* $\omega(BA)$.

Démonstration. — Tout d'abord, nous observons que le cas général peut être ramené au cas où A est dissipatif. En vertu de (2), (3), (5), si $\omega(A) \geq 0$, $\omega[A - \omega(A)] = 0$,

$$\omega[BA - \omega(A)B] \leq \omega(BA) < +\infty,$$

$\omega[B_nA - \omega(A)B_n] \leq \omega(B_nA)$, donc on voit qu'en remplaçant, au besoin, A par $A - \omega(A)$, on est ramené à démontrer le théorème pour le cas « A est dissipatif ». Nous supposons donc maintenant A dissipatif. On peut encore supposer sans perte de généralité que $\omega(B_nA) \leq$ constante $= \alpha \geq 0$, ainsi que

(2) Bien entendu, la norme de A^{-1} est calculée par rapport à $D(A^{-1})$,

$$\|A^{-1}\| = \sup \{\|A^{-1}f\| : f \in D(A^{-1}),\ \|f\| = 1\}.$$

$\omega(BA) \leqslant \alpha$. Comme $BA - \alpha \in \mathscr{D}(X)$, il suffira de montrer en vertu d'un résultat bien connu, [L-Ph], [Y], que

$$I(\lambda + \alpha - BA)$$

est dense dans X pour un $\lambda > 0$ quelconque, pour conclure que BA est un prégénérateur. Nous allons pour cela d'abord démontrer que pour chaque n, $(\lambda + \alpha - B_nA)^{-1} \in \mathbf{B}(X)$, $\forall\lambda > 0$. Puisque $\omega(-B_n) < 0$, $\exists\varepsilon_n$, $0 < \varepsilon_n < 1$, tel que $\|1 - \varepsilon_n B_n\| < 1$. Par ailleurs, $\forall\lambda > 0$,

$$(8)\quad (\lambda + \varepsilon_n\alpha)^{-1}[\lambda - (\varepsilon_n B_n A - \varepsilon_n\alpha)] + \varepsilon_n B_n - 1 \\ = (\lambda + \varepsilon_n\alpha)^{-1}\varepsilon_n B_n[\lambda - (A - \varepsilon_n\alpha)].$$

Nous pouvons maintenant nous servir du théorème concernant $\beta(\ ) = 0$, énoncé plus haut, car $\varepsilon_n B_n A - \varepsilon_n\alpha \in \mathscr{D}(X)$ implique que, $\forall f \in D(A)$,

$$\|(\lambda + \varepsilon_n\alpha)^{-1}[\lambda - (\varepsilon_n B_n A - \varepsilon_n\alpha)]f\| \geqslant (\lambda + \varepsilon_n\alpha)^{-1}\lambda\|f\|,$$

d'où il suit que

$$\|[(\lambda + \varepsilon_n\alpha)^{-1}(\lambda - (\varepsilon_n B_n A - \varepsilon_n\alpha))]^{-1}\|^{-1} \geqslant (\lambda + \varepsilon_n\alpha)^{-1}\lambda,$$

et pour un $\lambda > 0$ assez grand, on aura

$$\|1 - \varepsilon_n B\| < (\lambda + \varepsilon_n\alpha)^{-1}\lambda.$$

Pour un tel λ, il suit de (8) et du théorème concernant $\beta(\ )$, que $\beta[\lambda - (\varepsilon_n B_n A - \varepsilon_n\alpha)] = \beta[B_n(\lambda - (A - \varepsilon_n\alpha))] = 0$, car $B_n^{-1} \in \mathbf{B}(X)$, et $[\lambda - (A - \varepsilon_n\alpha)]^{-1} \in \mathbf{B}(X)$ puisque $A - \varepsilon_n\alpha$ est un générateur dissipatif. Comme $\varepsilon_n B_n A - \varepsilon_n\alpha \in \mathscr{D}(X)$ et $I[\lambda - (\varepsilon_n B_n A - \varepsilon_n\alpha)]$ est dense pour $\lambda > 0$ grand, on a que $(\lambda + \varepsilon_n\alpha - \varepsilon_n B_n A)^{-1} \in \mathbf{B}(X)$, $\forall\lambda > 0$. Donc

$$(\lambda + \alpha - B_nA)^{-1} \in \mathbf{B}(X), \ \forall\lambda > 0.$$

Afin de montrer que $I(\lambda + \alpha - BA)$ est dense dans X, (disons pour $\lambda = 1$), nous considérons $\varphi \in X^*$ « orthogonal » à l'image en question, et montrons qu'alors $\varphi = 0$. Pour cela, soit $f \in X$; pour chaque n, $\exists g_n \in D(A)$, tel que

$$f = (1 + \alpha - B_nA)g_n,$$

avec $\|g_n\| \leqslant \|f\|$ puisque $B_nA - \alpha \in \mathscr{D}(X)$. Donc,

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle(1 + \alpha - BA)g_n + (BA - B_nA)g_n, \varphi\rangle \\ = \langle(BB_n^{-1} - 1)B_nAg_n, \varphi\rangle = \langle B_nAg_n, (BB_n^{-1} - 1)^*\varphi\rangle,$$

mais $\|B_n A g_n\| = \|(1+\alpha)g_n - f\| \leqslant (2+\alpha)\|f\|$, donc

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant (2+\alpha)\|f\| \ \|(BB_n^{-1})^* \varphi - \varphi\| \to 0$$

puisque $(BB_n^{-1})^* \to 1^*$ au sens fort. D'où $\varphi(f) = 0$, $\forall f \in X$; $\varphi = 0$, et BA est un prégénérateur. Dans ces conditions, comme on l'a vu plus haut, le type local du semi-groupe correspondant est $\omega(BA) = \omega(\overline{BA})$, ($\overline{BA}$ = plus petit prolongement fermé de BA).

C.Q.F.D.

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède, dans le contexte $X = C_0(\Omega)$, où Ω est un espace localement compact séparé, $C_b(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues complexes bornées sur Ω, et $C_0(\Omega) = \{f \in C_b(\Omega) :$ f s'annule à l'infini$\}$ considéré comme un espace de Banach avec la norme du suprémum. Soit $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe à contraction sur $X = C_0(\Omega)$, de générateur A. Soit $p \in C_b(\Omega)$ réelle non-négative. L'étude de pA, c'est-à-dire de l'opérateur qui envoie $f \in D(A)$ en $p(Af)$, et en particulier la question de savoir si pA est encore le générateur ou prégénérateur d'un semi-groupe à contraction, est intimement liée à l'étude du changement de temps dans les processus de Markov. (Mais ce que nous faisons ici s'applique à des espaces de fonctions complexes — ou réelles — et à des semi-groupes qui ne sont pas nécessairement felleriens). Un résultat de Dorroh, [D], permet d'affirmer que si $p \geqslant C$ = constante > 0 [c'est-à-dire $p(x) \geqslant C > 0$, $\forall x \in \Omega$], les conditions étant par ailleurs comme décrites plus haut, alors pA est le générateur d'un semi-groupe à contraction. Si par contre on suppose seulement $p \geqslant 0$ dans le même contexte, des contre-exemples simples montrent que pA n'est plus nécessairement un prégénérateur. Le résultat suivant étend le théorème de Dorroh au cas $p > 0$ partout (mais sans supposer $\inf\limits_{x \in \Omega} p(x) > 0$).

2. Théorème. — *Soit* $X = C_0(\Omega)$, $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe à contraction sur* X, *de générateur* A. *Soit* $p \in C_b(\Omega)$ *réelle et* > 0 *partout sur* Ω. *Alors* pA *est le prégénérateur d'un semi-groupe à contraction.*

Démonstration. — Pour $q \in C_b(\Omega)$, désignons par B_q l'opérateur « $f \longmapsto qf$, $\forall f \in X$ ». Si q est réelle, B_q^* est l'opérateur « $\nu \longmapsto q\nu$, ν (mesure) $\in X^*$ ». Soit p celui de l'énoncé, posons pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, $p_n = \max\left(p, \frac{1}{n}\right)$, et posons $B_p = B$, $B_{p_n} = B_n \in \mathbf{B}(X)$. Observons que pour toute mesure $\nu \in X^*$,

$$\|(BB_n^{-1})^*\nu - \nu\| = \|B^*_{pp_n^{-1}}\nu - \nu\| = \|(pp_n^{-1} - 1)\nu\|$$
$$\leqslant |\nu|\left(\left\{x \in \Omega : p(x) < \frac{1}{n}\right\}\right) \to 0,$$

avec $n \to +\infty$, puisque $p > 0$ sur Ω. Il est bien connu, et facile à vérifier, que dans notre situation où $X = C_0(\Omega)$,

$$\omega(-B),\ \omega(BA),\ \omega(B_nA) \leqslant 0,$$

et $\omega(-B_n) < 0$. L'énoncé suit maintenant du théorème 1.

C.Q.F.D.

Comme pour le cas $p \geqslant C > 0$ dans le travail de Dorroh cité, on peut étendre le théorème 2 au cas où X est un sous-espace fermé de $C_0(\Omega)$, « invariant par p » c'est-à-dire tel que $pf \in X$, $\forall f \in X$. Il n'y a presque rien à changer dans la démonstration, puisqu'aussi dans ce cas $\varphi \in X^*$ se représente par (au moins) une mesure $\nu_\varphi \varepsilon [C_0(\Omega)]^*$, et $\forall f \in X$,

$$|\langle f, (BB_n^{-1})^*\varphi - \varphi\rangle| = |<(BB_n^{-1} - 1)f, \varphi>|$$
$$= \left|\int (pp_n^{-1} - 1)\, f d\nu_\varphi\right| \leqslant \|f\|\, |\nu_\varphi|\left(\left\{x \in \Omega : p(x) < \frac{1}{n}\right\}\right).$$

Donc $\|(BB_n^{-1})^*\varphi - \varphi\| \leqslant |\nu_\varphi|\left(\left\{x \in \Omega : p(x) < \frac{1}{n}\right\}\right) \to 0$, avec $n \to +\infty$. (On utilise le même semi-produit-scalaire qu'avant, en ce qui concerne le reste de l'argument). On a donc :

3. Théorème. — *Soit* X *un sous-espace fermé de* $C_0(\Omega)$ *invariant par* p, où $p \in C_b(\Omega)$ *est réelle* > 0 *sur* Ω. *Soit* $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe à contraction sur* X, *de générateur* A. *Alors* pA *est le prégénérateur d'un semi-groupe à contraction.*

Nous allons maintenant indiquer un autre type d'applications du théorème 1, en traitant le cas spécifique de la perturbation du laplacien dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Le résultat spécifique que nous allons obtenir est probablement connu (ou à peu de chose près), mais il est intéressant de le déduire des méthodes générales ci-dessus, et d'illustrer le cas où l'on n'a pas dissipativité, mais type fini.

Soient donc $X = L^2(\mathbf{R}^n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, (L^2 complexe), et A le générateur du semi-groupe correspondant au laplacien dans la norme L^2, c'est-à-dire $D(A) = \{f \in X : \Delta f = \text{laplacien de } f \text{ au sens distribution} \in X\}$, et $Af = \Delta f \ \forall f \in D(A)$. $C^\infty_{00}(\mathbf{R}^n)$ désignera l'ensemble de toutes les fonctions C^∞ complexes à support compact dans $\mathbf{R}^n$. Nous écrirons « . » pour le produit scalaire usuel dans $\mathbf{C}^n$, « grad » pour « gradient de », et $(\text{grad } f)^2$ pour $\text{grad } f . \text{grad } f$. Pour $p \in C^2(\mathbf{R}^n)$ réelle et > 0, fixée, et $f = u + iv$ avec u et v réelles dans $C^\infty_{00}(\mathbf{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} pu\,\Delta u &= -\int_{\mathbf{R}^n} \text{grad}\, pu . \textit{grad}\, u \\ &= -\int_{\mathbf{R}^n} p\,(\text{grad}\, u)^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} \text{grad}\, p . \text{grad}\, u^2 \\ &= -\int_{\mathbf{R}^n} p\,(\text{grad}\, u)^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} (\Delta p) u^2 \leqslant \frac{1}{2}\sup_{\mathbf{R}^n}(\Delta p)\int_{\mathbf{R}^n} u^2,\end{aligned}$$

et de même pour $\int_{\mathbf{R}^n} pv\,\Delta v$. D'où $\left[\int_{\mathbf{R}^n} \bar{f} pAf = (pAf, f)\right]$

$$\begin{aligned}\mathrm{R}e\,(pAf, f) &\leqslant \frac{1}{2}\sup_{\mathbf{R}^n}(\Delta p)\int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sup_{\mathbf{R}^n}(\Delta p)\,\|f\|^2, \quad \forall f \in C^\infty_{00}(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

Si en plus p est bornée, on en déduit que

$$\mathrm{R}e\,(pAf, f) \leqslant \frac{1}{2}\sup_{\mathbf{R}^n}(\Delta p)\,\|f\|^2,$$

$\forall f \in D(A)$. Donc, on aura alors :

$$\omega(pA) \leqslant \frac{1}{2}\sup_{\mathbf{R}^n}(\Delta p). \tag{9}$$

Dans la suite, nous utiliserons simplement la notation Δ, à la place de A ; pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

4. Théorème. — *Soit* Δ *l'opérateur dans* $L^2(\mathbf{R}^n)$ *spécifié plus haut. Soit* $p \in C^2(\mathbf{R}^n)$ *bornée réelle* > 0 *sur* $\mathbf{R}^n$,

$$\sup_{\mathbf{R}^n} (\Delta p) < + \infty,$$

avec $|\text{grad}\, p| = 0(|x|)$ *pour* $|x| \to + \infty$. *Alors* $p\Delta$ *est le prégénérateur d'un semi-groupe sur* $L^2(\mathbf{R}^n)$ *de type local* $\leqslant \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{R}^n} (\Delta p)$.

Démonstration. — Soit $S_k = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leqslant k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, et soit $\psi \in C_{00}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ telle que $\psi = 1$ sur S_1, $\psi = 0$ sur $\complement S_2$ et $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ partout. Soit $\psi_k(x) = \psi\left(\frac{x}{k}\right)$. Soit $p_k = \frac{1}{k}(1 - \psi_k) + p\psi_k$, B_k l'opérateur sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ qui envoie f en $p_k f$. Clairement,

$$\inf_{\mathbf{R}^n} (p_k) \geqslant \inf\left(\frac{1}{k}, \inf_{S_{2k}} (p)\right) > 0,$$

et l'on vérifie facilement que $\sup_{\mathbf{R}^n} (\Delta p_k)$ reste borné quand $k \to + \infty$. Il suit que $\lim \sup_k \omega(B_k \Delta) < + \infty$; le reste des conditions requises pour appliquer le théorème 1 sont immédiatement vérifiées, d'où l'énoncé.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[D] J. R. Dorroh, Contraction semi-groups in a function space, *Pacific J.Math.*, 19 (1966), 35-38.

[Gu] K. Gustafson, Doubling perturbation sizes and preservation of operator indices in normed linear spaces. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 66 (1969), 281-294.

[Gu-L] K. Gustafson et G. Lumer, Multiplicative perturbation of semigroup generators, *Pacific J. Math.*, 41 (1972), 731-742.

[H] F. Hirsch, Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, *Ann. Inst. Fourier*, 22 (1972), 89-210.

[H-Ph] E. Hille et R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, *A.M.S. Colloquium Publ.*, XXXI, 2e éd. (1957).

[L 1] G. Lumer, Semi-inner-product spaces, *Transactions A.M.S.*, 100 (1961), 29-43.

[L 2] G. LUMER, Potential-like operators and extensions of Hunt's theorem for σ-compact spaces, *Journal of Functional Analysis*, 13 (1973), 410-416.

[L-Ph] G. LUMER et R. S. PHILLIPS, Dissipative operators on a Banach space, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 679-698.

[Y] K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer-Verlag, 3e éd. (1971).

Manuscrit accepté par J. Neveu,
reçu le 2 octobre 1973.

Gunter LUMER,
Mathématiques, Tour 45-46,
Université Paris VI,
11, quai Saint-Bernard,
Paris 5e.