

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUY LASSALLE

## **Le théorème de préparation différentiable en classe $p$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 23, n° 2 (1973), p. 97-108

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1973\\_\\_23\\_2\\_97\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_2_97_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LE THÉOREME DE PRÉPARATION DIFFÉRENTIABLE EN CLASSE P

par Guy LASSALLE

1. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit

$$B(x, z) = z^d + \sum_{i=1}^d a_i(x)z^{d-i}$$

un polynôme à coefficients définis et indéfiniment dérivables sur  $U$ , et soit  $X = \bar{B}^{-1}(0) \subset U \times \mathbf{C}$ .

Le sujet de cette note est le théorème suivant :

**THÉOREME 1.** — *Il existe une application linéaire  $R$  (reste) de  $\mathcal{E}^{d+1}(U \times \mathbf{R})$  dans  $[\mathcal{E}^0(U)]^d$  et une application linéaire  $Q$  (quotient) de  $\mathcal{E}^{d+1}(U \times \mathbf{R})$  dans  $\mathcal{E}^0(U \times \mathbf{R})$  telles que, pour tout  $p$  supérieur ou égal à  $d$ , fini ou non,*

1) *Pour toute fonction  $f \in \mathcal{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$ , on ait sur  $U \times \mathbf{R}$  l'égalité*

$$f(x, t) = B(x, t)Q(f)(x, t) + \sum_{i=1}^d r_i(x)t^{d-i},$$

avec

$$R(f) = (r_1, \dots, r_d).$$

2)  *$R$  induit sur  $\mathcal{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$  une application à valeurs dans  $[\mathcal{E}^k(U)]^d$  continue pour la topologie de ces deux espaces, avec  $k = \left[ \frac{p+1}{d} \right] - 1$ . ( $[n]$  = partie entière de  $n$ ).*

3)  *$Q$  induit sur  $\mathcal{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$  une application à valeurs dans  $\mathcal{E}^h(U \times \mathbf{R})$  continue pour la topologie de ces deux espaces, avec  $h = \left[ \frac{p-d}{d} \right]$ .*

De plus, si  $a_1, \dots, a_d$  sont à valeurs réelles, il est possible de choisir  $R$  et  $Q$  de sorte que  $R(f)$  et  $Q(f)$  soient à valeurs réelles quand  $f$  est à valeurs réelles.

(Dans cet énoncé,  $\mathcal{E}^r(\omega)$  désigne l'espace vectoriel des fonctions complexes définies et  $r$  fois continûment dérivables sur l'ouvert  $\omega$ , muni de la topologie de la convergence uniforme des dérivées sur tout compact de  $\omega$ .)

Pour  $p$  infini, ce théorème est dû à J. Mather ([1]). La démonstration de [1] est d'ailleurs valable pour  $p$  fini et donne un théorème analogue au théorème 1, mais avec des valeurs moins bonnes pour  $k$  et  $h$ .

La méthode suivie ici permet également de démontrer le

**THÉORÈME 1 bis.** — Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à  $d$ . Il existe une application linéaire continue  $R_p$  de  $\mathcal{E}^p(U \times \mathbf{R})$  dans  $[\mathcal{E}^k(U)]^d$  et une application linéaire continue  $Q_p$  de  $\mathcal{E}^p(U \times \mathbf{R})$  dans  $\mathcal{E}^h(U \times \mathbf{R})$  telles que, pour toute fonction  $f \in \mathcal{E}^p(U \times \mathbf{R})$ , on ait sur  $U \times \mathbf{R}$  l'égalité

$$f(x, t) = B(x, t)Q_p(f)(x, t) + \sum_{i=1}^d r_i(x)t^{d-i},$$

avec  $R_p(f) = (r_1, \dots, r_d)$ , pour  $k = \left[ \frac{p+1}{d} \right] - 1$  et  $h = \left[ \frac{p-d}{d} \right]$

Pour une fonction  $f$  donnée, sans hypothèses supplémentaires, le résultat du théorème 1 bis est le meilleur possible, comme on le montre à la fin.

La démonstration du théorème 1 comporte deux étapes (A et B), dont on trouvera ici l'esquisse <sup>(1)</sup>. Pour obtenir le théorème 1 bis, il suffit, dans la seconde étape, de substituer à l'emploi des séries de Fourier, nécessaire pour construire un système projectif d'applications  $R_p$  et  $Q_p$ , la méthode de prolongement de Whitney, à partir de la famille  $(\varphi_i)$  du lemme 3.

Il sera commode de supposer que les fonctions  $a_i$  sont bornées sur  $U$  ainsi que leurs dérivées premières, cas auquel on peut toujours se ramener par des partitions de l'unité.

<sup>(1)</sup> Un article sur le même sujet dans « Topology » donne des démonstrations complètes.

*Notations :*

Pour toute fonction  $f$  définie sur un ouvert  $\omega$  de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$  (ou  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ ) et pour tout point  $x \in \mathbf{R}^n$ , on note  $f_x$  la fonction définie sur  $pr_2(\omega \cap n(\{x\} \times \mathbf{C}))$  par :

$$f_x(z) = f(x, z).$$

Pour toute fonction  $f(x, z)$  définie sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}$ , pour toute suite  $k_1 = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $n$  entiers positifs ou nuls, et pour toute suite  $k_2 = \beta_1, \beta_2$  de deux entiers positifs ou nuls, on pose :

$$\partial^{k_1, k_2} f = \frac{\partial^{|k_1|+|k_2|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \partial z^{\beta_1} \partial \bar{z}^{\beta_2}} \quad |k_1| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, |k_2| = \beta_1 + \beta_2.$$

Enfin, on définit les fonctions  $b_i (1 \leq i \leq d)$  par l'identité :

$$\frac{B(x, \zeta) - B(x, z)}{\zeta - z} = \sum_{i=1}^d b_i(x, \zeta) z^{d-i} \quad (x \in U, \zeta \in \mathbf{C}, z \in \mathbf{C}).$$

2. La démonstration du théorème 1 est celle, convenablement raffinée, du théorème analogue, classique, concernant les fonctions analytiques complexes : pour tout ouvert  $\omega$  d'un espace numérique complexe, désignons par  $H(\omega)$  l'espace vectoriel des fonctions analytiques complexes sur  $\omega$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; le théorème en question s'énonce :

« Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  et soit  $B$  un polynôme en  $Z$ , à coefficients dans  $H(U)$ , unitaire de degré  $d$ . Toute fonction  $f \in H(U \times \mathbf{C})$  peut s'écrire de façon unique dans  $H(U \times \mathbf{C})$  :

$$f = B \cdot Q + R \tag{1}$$

où  $R$  est un polynôme en  $Z$  à coefficients dans  $H(U)$  de degré inférieur ou égal à  $d - 1$ . De plus  $Q$  et  $R$  dépendent linéairement et continûment de  $f$  »

La démonstration se réduit à constater qu'on peut prendre pour  $Q$  et  $R$  les fonctions définies par les formules :

$$R(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(x, \xi)}{B(x, \xi)} \frac{B(x, \xi) - B(x, z)}{\xi - z} d\xi,$$

$$Q(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(x, \xi)}{B(x, \xi)} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

où  $\gamma$  désigne le bord orienté de n'importe quel disque du plan complexe contenant dans son intérieur le nombre  $z$  et les racines du polynôme  $B(x, Z)$ .

Dans cet énoncé, on remarque :

a) qu'on peut remplacer l'ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}^n$  par un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$ , et supposer  $f$  et  $B$   $p$  fois continûment dérivables sur  $U \times \mathbf{C}$ ,  $f$  restant séparément analytique complexe en la dernière variable:  $Q$  et  $R$  sont alors  $p$  fois continûment dérivables, et dépendent continûment de  $f$  pour la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées sur tout compact de  $U \times \mathbf{C}$ ;

b) que si les coefficients de  $B$  sont bornés sur  $U$ , on peut choisir un compact convexe  $C$  de  $\mathbf{C}$  tel que  $U \times C$  contienne  $X$  dans son intérieur, et supposer toutes les fonctions définies seulement sur un voisinage  $\Omega$  donné de  $U \times C$ ;

c) que le polynôme  $R$  ne dépend que du germe de  $f$  au voisinage de  $X$ , car, plus précisément, pour tout  $x \in U$ ,  $R_x$  est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $d - 1$  qui, en chaque racine  $t$  de  $B_x$ , de multiplicité  $\lambda$ , ait les mêmes dérivées que  $f_x$  jusqu'à l'ordre  $\lambda - 1$ .

Pour obtenir le théorème 1 (resp 1 bis), il suffit d'introduire pour chaque entier  $p \geq d$  un espace vectoriel topologique convenable de fonctions sur  $\Omega$  tel que :

A) à toute fonction de cet espace soient attachés, de manière linéaire et continue, un reste  $R \in \mathcal{E}^k(\Omega)$  et un quotient  $Q \in \mathcal{E}^h(\Omega)$  ( $k = \left[ \frac{p+1}{d} \right] - 1, h = \left[ \frac{p-d}{d} \right]$ ) vérifiant l'égalité (1) et la condition c);

B) à toute fonction de  $\mathcal{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$  (resp  $\mathcal{E}^p(U \times \mathbf{R})$ ) soit attaché, de manière linéaire et continue, un prolongement à  $\Omega$  appartenant à l'espace en question, de telle sorte que, dans le cas du théorème 1, ces opérateurs de prolongement forment un système projectif lorsque  $p$  varie.

La remarque c) conduit aux définitions suivantes :

**DÉFINITION 1.** — Pour tout entier  $p$ , on désigne par  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}^p(\Omega)$  constitué par les fonctions  $f$  pour lesquelles il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de

$X$  dans  $\Omega$  (dépendant de  $f$ ) tel que, pour tout  $x \in U$ , la fonction  $z \mapsto f(x, z)$  soit analytique complexe sur la projection de  $\mathcal{U} \cap (\{x\} \times \mathbb{C})$  dans  $\mathbb{C}$ ; on munit  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  de la topologie définie par les semi-normes

$$f \mapsto \sup_{(x, u) \in K} (|\partial^{k_1, k_2} f(x, u)|) \quad (f \in \mathcal{P}^p(\Omega))$$

où  $K$  parcourt l'ensemble des compacts de  $\Omega$  et  $(k_1, k_2)$  l'ensemble des couples vérifiant  $d|k_1| + |k_2| \leq p$ . On désigne par  $\mathcal{P}^\infty(\Omega)$  la limite projective des  $\mathcal{P}^p(\Omega)$ .

DÉFINITION 2. — Pour toute fonction  $f \in \mathcal{P}^0(\Omega)$ , et pour toute fonction  $\chi$  indéfiniment dérivable sur  $U \times \mathbb{C}$ , valant 1 au voisinage de  $X$ , et telle que, pour tout  $x \in U$ ,  $\chi_x$  ait un support compact contenu dans l'ensemble des points où  $f_x$  est analytique, on définit les fonctions  $R_0(f)$  et  $Q_0(f)$  par les formules :

$$R_0(f)(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}}(x, u) \frac{f(x, u) B(x, u) - B(x, z)}{B(x, u) u - z} du d\bar{u}$$

$$Q_0(f)(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}}(x, u) \frac{f(x, u) du d\bar{u}}{B(x, u) u - z} \text{ pour } (x, z) \in \widehat{\chi}^{-1}(1)$$

$$= \frac{f(x, z) - R_0(f)(x, z)}{B(x, z)} \text{ ailleurs.}$$

On voit facilement, à l'aide de la formule de Stokes, que  $R_0(f)$  et  $Q_0(f)$  sont indépendantes de la fonction  $\chi$ , que  $R_0(f)$  est un polynôme en  $z$  possédant les propriétés c), et qu'on a :

$$f = B \cdot Q_0(f) + R_0(f).$$

Enfin, pour chaque entier  $p$ ,  $R_0$  et  $Q_0$  induisent sur  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  deux applications linéaires à valeurs dans  $\mathcal{E}^p(\Omega)$ .

Les espaces  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  ne sont pas assez grands pour la démonstration visée.

DÉFINITION 3. — Pour tout  $p$  ( $0 \leq p \leq \infty$ ), on désigne par  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}^0(\Omega)$  constitué par les fonctions qui sont limite dans  $\mathcal{E}^0(\Omega)$  d'une suite de fonctions de  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  qui est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{P}^p(\Omega)$ ; on

munit  $\overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$  de la topologie définie par les semi-normes

$$f \mapsto \sup_{(x, u) \in K} (|\partial^{k_1, k_2} f(x, u)|) \quad (f \in \overline{\mathcal{P}^p(\Omega)})$$

où  $K$  parcourt l'ensemble des compacts de  $\Omega$  et  $(k_1, k_2)$  l'ensemble des couples vérifiant  $d|k_1| + |k_2| \leq p$ . (L'existence et la continuité de ces dérivées pour toute  $f \in \overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$  résultent d'un théorème élémentaire.)

Il est clair que, pour tout  $p$  ( $0 \leq p \leq \infty$ ),  $\overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$  est isomorphe au complété de  $\mathcal{P}^p(\Omega)$ . La définition 3 est justifiée par la proposition suivante, qui constitue la première étape de la démonstration :

A. PROPOSITION 1. — *Quel que soit  $p \geq d$ , fini ou non.*

1)  $R_0$  induit sur  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  une application à valeurs dans  $\mathcal{E}^k(\Omega)$  continue pour la topologie de  $\mathcal{E}^k(\Omega)$ , avec

$$k = \left[ \frac{p+1}{d} \right] - 1.$$

2)  $Q_0$  induit sur  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  une application à valeurs dans  $\mathcal{E}^h(\Omega)$  continue pour la topologie de  $\mathcal{E}^h(\Omega)$ , avec  $h = \left[ \frac{p-d}{d} \right]$ .

En effet,  $\mathcal{E}^h(\Omega)$  et  $\mathcal{E}^k(\Omega)$  étant complets, il résulte du théorème classique de prolongement d'une application uniformément continue à valeurs dans un espace complet que, pour tout  $p \geq d$ , fini ou non, les restrictions de  $R_0$  et de  $Q_0$  à  $\mathcal{P}^p(\Omega)$  admettent chacune un prolongement linéaire continu à  $\overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$ , induits respectivement par les prolongements de  $R_0|_{\mathcal{P}^d(\Omega)}$  et de  $Q_0|_{\mathcal{P}^d(\Omega)}$  à  $\overline{\mathcal{P}^d(\Omega)}$  (qu'on notera encore  $R_0$  et  $Q_0$ ).

*Démonstration de la proposition 1.* — Elle s'appuie sur deux lemmes.

LEMME 1. — *Soit  $C$  un ensemble convexe compact de  $\mathbf{C}$ . Pour tout entier  $p \geq 1$ , il existe un nombre  $M_p$  tel que, pour tout  $t_0 \in C$  et pour toute fonction  $\varphi$   $p$  fois continûment dérivable (au sens réel) au voisinage de  $C$ , analytique complexe*

au voisinage de  $t_0$ , on ait :

$$\sup_{\substack{|k| \leq p-1 \\ u \in C}} (|\partial^k \psi(u)|) \leq M_p \cdot \sup_{\substack{|k| \leq p \\ u \in C}} (|\partial^k \varphi(u)|),$$

où  $\psi$  est définie par  $\psi(u) = \frac{\varphi(u) - \varphi(t_0)}{u - t_0}$ .

(Le lemme 1 est une conséquence facile de la formule de Taylor, qui permet d'écrire  $\psi$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi(t) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} (t_0 + \theta(t - t_0)) d\theta \\ + \frac{t - t_0}{t - t_0} \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}} (t_0 + \theta(t - t_0)) d\theta. \end{aligned}$$

LEMME 2. — Soit  $C$  un ensemble convexe compact de  $C$ . Pour tout entier  $p \geq 1$ , il existe un nombre  $L_p$  tel que, pour toute suite  $t_1, \dots, t_p$  de points de  $C$ , pour toute fonction  $\varphi$   $p - 1$  fois continûment dérivable (au sens réel) au voisinage de  $C$ , analytique complexe au voisinage de l'ensemble  $\{t_1, \dots, t_p\}$ , et pour toute fonction  $\chi$  indéfiniment dérivable sur  $C$ , valant 1 au voisinage de  $\{t_1, \dots, t_p\}$  et à support compact contenu dans l'ensemble des points où  $\varphi$  est analytique, on ait :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \iint_C \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} \frac{\varphi}{D} du d\bar{u} \right| \leq L_p \sup_{\substack{|k| \leq p-1 \\ u \in C}} (|\partial^k \varphi(u)|),$$

où  $D$  est le polynôme défini par  $D(u) = \prod_{i=1}^{i=p} (u - t_i)$ .

Démonstration. — L'intégrale du membre de gauche dépend de  $\varphi$  et de la suite  $t_1, \dots, t_p$ , mais non de  $\chi$ ; notons-la  $A(\varphi; t_1, \dots, t_p)$ . Pour  $2 \leq p$ , on a la relation de récurrence :

$$A(\varphi; t_1, \dots, t_p) = A(\psi; t_1, \dots, t_{p-1}) \left( \psi(u) = \frac{\varphi(u) - \varphi(t_p)}{u - t_p} \right).$$

(En effet, la différence vaut  $\varphi(t_p) \left( \frac{1}{2i\pi} \iint_C \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} \frac{1}{D} du d\bar{u} \right)$ , et est nulle d'après le théorème des résidus.)

On en déduit le lemme 1 par récurrence :

$$L_1 = 1, L_{p+1} = L_p \times M_p.$$



On obtient alors la continuité du reste en remarquant que le coefficient de  $z^{d-i}$  dans  $R_0(f)$  est donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} \frac{fb_i}{B} du d\bar{u},$$

où  $\chi$  est une fonction convenable, que chaque dérivée  $\partial^a r_i(f)$  est donnée par

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{u}} \partial^{a,0} \left( \frac{fb_i}{B} \right) du d\bar{u}$$

et en majorant toutes ces intégrales à l'aide du lemme 2.

La continuité du quotient s'en déduit par applications répétées du lemme 1.

B. On prend désormais  $\Omega = U \times (\mathcal{I} \times i\mathbf{R})$ , où  $\mathcal{I}$  est un intervalle ouvert et borné de  $\mathbf{R}$  tel que  $\mathcal{I} \times i\mathbf{R}$  soit un voisinage de  $\mathbf{C}$ . La proposition suivante constitue la seconde étape de la démonstration du théorème 1.

**PROPOSITION 2.** — *Il existe une application linéaire continue  $\rho$  de  $\mathcal{E}^1(U \times \mathbf{R})$  dans  $\overline{\mathcal{P}^0(\Omega)}$  telle que :*

1) *Pour tout  $p$  supérieur ou égal à 0 (fini ou non),  $\rho$  induit sur  $\mathcal{E}^{p+1}(U \times \mathbf{R})$  une application à valeurs dans  $\overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$ , continue pour la topologie de  $\overline{\mathcal{P}^p(\Omega)}$ .*

2) *Pour toute  $f \in \mathcal{E}^1(U \times \mathbf{R})$ ,  $f$  et  $\rho(f)$  coïncident sur  $U \times \mathcal{I}$ .*

Le théorème 1 en résulte; il suffit de prendre :

$$R(f) = R_0(\rho(f))|U \times \mathbf{R}, \quad Q(f) = \frac{f - R(f)}{B}$$

*Démonstration de la proposition 2.* — Elle utilise une construction inspirée du procédé de prolongement de Whitney. Les espaces numériques qui interviennent sont munis de la distance  $d(x, y) = \sup_i (|x_i - y_i|)$ .

**LEMME 3.** — *Il existe une famille  $(\varphi_i)_{i \in \mathbf{I}}$  de fonctions de  $\mathcal{E}^\infty(U \times \mathbf{C})$ , un entier  $N$ , et deux suites de nombres réels  $(A_k)$  et  $(B_k)$  ( $0 \leq k$ ) possédant les propriétés suivantes :*

1) *Pour tout  $y \in U \times \mathbf{C}$ , et pour tout  $i \in \mathbf{I}$ , l'inégalité*

$\varphi_i(y) \neq 0$  implique que le diamètre du support de  $\varphi_i$  est inférieur ou égal à  $5d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ .

2) Tout point de  $U \times \mathbf{C} - U \times \mathbf{R}$  possède un voisinage sur lequel toutes les fonctions  $\varphi_i$  sont nulles sauf N au plus.

3) Pour tout  $i \in I$ ,  $\varphi_i$  est positive ou nulle; la somme  $\sum_{i \in I} \varphi_i$  est inférieure ou égale à 1 et vaut 1 en tout point  $y = (x, z)$  de  $U \times \mathbf{C} - U \times \mathbf{R}$  vérifiant

$$d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) < \frac{7}{8}; \quad 35d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) < d(x, [U]).$$

4) Pour tout  $y \in U \times \mathbf{C}$ , pour tout  $i \in I$ , pour toute suite  $k_1$  de  $n$  entiers positifs ou nuls et pour toute suite  $k_2$  de deux entiers positifs ou nuls, on a l'inégalité :

$$|\partial^{k_1, k_2} \varphi_i(y)| \leq A_{|k_1|} B_{|k_2|} d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})^{-d|k_1| - |k_2|}.$$

5) Pour tout  $i \in I$ , la restriction de  $\varphi_i$  à  $\Omega$  appartient à  $\mathcal{P}^\infty(\Omega)$ .

La proposition 2 découle immédiatement du lemme 3. En effet, soit  $[a, b]$  un intervalle fermé de longueur  $T$  contenant  $\mathcal{J}$  dans son intérieur, soit  $\theta$  une fonction de  $\mathcal{E}^\infty(U \times \mathbf{R})$  valant 1 sur  $U \times \mathcal{J}$  et 0 hors de  $U \times [a, b]$ , et soit, pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $\Phi_m$  la fonction de  $\mathcal{P}^\infty(\Omega)$  définie par :

$$\begin{aligned} \Phi_m(x, z) &= 1 \text{ si } z \text{ est réel,} \\ \Phi_m(x, z) &= \sum_{\text{supp}(\varphi_i) \subset \{(x, z) \mid |\text{Im}(z)| < \frac{1}{6m}\}} \varphi_i. \end{aligned}$$

Il est élémentaire de vérifier qu'on peut prendre pour  $\rho(f)$  la fonction définie par :

$$\rho(f)(x, z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} c_m((\tilde{\theta}f)_x) e^{im \frac{2\pi}{T} z} \Phi_{|m|}(x, z),$$

où  $\tilde{\theta}f$  désigne la fonction de période  $T$  sur  $U \times \mathbf{R}$  qui coïncide avec  $\theta f$  sur  $U \times [a, b]$ , et  $c_m((\tilde{\theta}f)_x)$  le  $m$ -ième coefficient de Fourier de  $(\tilde{\theta}f)_x$ .

*Démonstration du lemme 3.* — Indiquons seulement, sans entrer dans les détails, qu'on part, comme dans la démonstration de Whitney, d'un recouvrement de

$\mathbf{R}^n \times \{z \mid 0 < |\operatorname{Im}(z)| \leq 2\}$  par une famille de cubes  $K_i$  fermés d'intérieurs disjoints possédant les propriétés suivantes, où  $e_i$  désigne le côté de  $K_i$  et  $K'_i$  l'image de  $K_i$  par l'homothétie de rapport  $\frac{5}{4}$  ayant pour centre le centre de  $K_i$ :

a)  $\mathbf{R}^n \times \{z \mid 1 \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq 2\}$  est la réunion des cubes de côté 1 de la famille.

$$b) \frac{1}{2} e_i \leq d(K_i, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \leq 3e_i.$$

$$c) y \in K'_i \text{ implique } \frac{1}{4} e_i \leq d(y, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \leq \frac{17}{4} e_i.$$

d) Tout point de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C} - \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  possède un voisinage rencontrant au plus  $N$  cubes  $K'_i$ .

Chaque fonction  $\varphi_i$  est ensuite construite par convolution d'une fonction de  $\mathcal{E}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$  positive d'intégrale 1 à support suffisamment petit et d'une fonction caractéristique d'ensemble  $\chi_i$  convenable.

Pour tout  $y = (x, z) \in X$  et pour tout  $r > 0$ , soit  $Q(z, r)$  le cube de  $\mathbf{C}$  de côté  $r$  centré en  $z$ , et soit

$$C(y, r) = \{x\} \times Q(z, r).$$

Afin de réaliser la condition 5) du lemme 3, on choisit  $\chi_i$  de telle sorte que cette fonction soit égale à 0 ou à 1 sur tout cube  $C(y, 4ae_i)$ , où  $a$  est un nombre assez petit ( $a = \frac{1}{192(1+d)}$  convient)

Ainsi la fonction  $\chi_i$  est indépendante de  $z$  au voisinage de  $X$ , et il suffit de préserver cette propriété par convolution.

3. Le résultat du théorème 1 bis est, pour le reste, le meilleur possible dans le sens suivant: Pour tout entier  $d$  et pour tout entier  $p$ , il existe un ouvert  $U$  d'un espace numérique, un polynôme unitaire  $B$  de degré  $d$  à coefficients indéfiniment dérivables sur  $U$  et une fonction  $f$  de classe  $p$  sur  $U \times \mathbf{R}$ , tels que, quelle que soit l'expression de  $f$  sous la forme  $B \cdot Q + R$  (où  $R$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $d-1$  à coefficients définis sur  $U$ ),  $R$  ne soit pas de classe  $\left[ \frac{p+1}{d} \right]$  sur  $U \times \mathbf{R}$ .

En effet, on va voir que pour tout entier  $d$  et pour tout entier  $k$ , il existe un ouvert  $U$ , un polynôme  $B$  et une fonction  $f$  de classe  $dk + d - 2$  sur  $U \times \mathbf{R}$ , tels que, quelle que soit l'expression de  $f$  sous la forme  $B \cdot Q + R$ ,  $R$  ne soit pas de classe  $k$  sur  $U \times \mathbf{R}$ . (Ceci suffit, car  $p$  étant donné, la fonction  $f$  donnée par ce dernier résultat lorsque  $k$  est le plus petit entier vérifiant  $p \leq dk + d - 2$  fournit l'exemple désiré).

Le cas  $d = 1$  étant trivial, supposons  $2 \leq d$ .

Prenons pour  $U$  un voisinage de l'origine  $O$  dans  $\mathbf{R}^d$  et pour  $B$  le polynôme générique de degré  $d$ :

$$B(x, z) = z^d + \sum_{i=1}^d x_i z^{d-i}.$$

Soit  $V \subset U$  l'ouvert constitué par les points  $x$  où les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  de  $B_x$  sont toutes réelles et distinctes. Quelle que soit la fonction  $f$ , mise sous la forme  $B \cdot Q + R$ , le polynôme  $R_x$  est déterminé en tout point  $x \in V$ .

On va utiliser des formules donnant explicitement  $R$  ainsi que ses dérivées sur  $V \times \mathbf{R}$ . Ces formules résultent, pour une fonction  $f$  analytique, de la forme intégrale du reste indiquée au début du paragraphe 2, et de l'identité:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\varphi(u)}{D(u)} du = \iint \dots \iint_{\substack{0 \leq \lambda_i \\ \sum \lambda_i = 1}} \frac{d^{r-1} \varphi}{du^{r-1}} \left( \sum_1^r \lambda_i t_i \right) d\lambda_2 \dots d\lambda_r$$

dans laquelle  $t_1, \dots, t_r$  est une suite de nombres complexes (distincts ou non),  $\gamma$  un lacet différentiable d'indice 1 par rapport à chaque  $t_i$ ,  $\varphi$  une fonction analytique complexe au voisinage de l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\{t_1, \dots, t_r\}$

et  $D$  le polynôme défini par  $D(u) = \prod_{i=1}^r (u - t_i)$ ; on passe au cas d'une fonction  $f$  différentiable par approximation.

Ainsi, si  $f$  est au moins de classe  $d - 1$ :

$$r_i(x) = \iint \dots \iint_{\substack{0 \leq \lambda_i \\ \sum \lambda_i = 1}} \frac{d^{d-1}}{dt^{d-1}} (fb_i)_x \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i \alpha_i \right) d\lambda_2 \dots d\lambda_d$$

$i = 1, \dots, d$

Pour une fonction  $f$  de classe  $dk + d - 1$  sur  $V \times \mathbf{R}$ ,

on a de même :

$$\frac{\partial^k r_1}{\partial x_d^k}(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \frac{k!}{i!} \iint_{\substack{0 \leq \lambda_i \\ \sum \lambda_i = 1}} \cdots \iint \frac{\partial^{i+kd+d-1-id}}{\partial x_d^i \partial t^{(k-i+1)d-1}} f \left( \sum_{j=1}^{j=d(k-i+1)} \lambda_j \alpha_{i,j} \right) d\lambda_2 \cdots d\lambda_{d(k-i+1)}$$

où  $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,d(k-i+1)}$  désigne la suite des racines de  $(B_x)^{k+1-i}$ , chacune figurant un nombre de fois égal à sa multiplicité.

Soit alors  $f$  une fonction de classe  $dk + d - 2$  sur  $U \times \mathbf{R}$ , de classe  $dk + d - 1$  sur un ouvert  $W \times \mathbf{R}$ , avec  $W \subset V$  et  $O \in \overline{W}$ , dont les dérivées  $\frac{\partial^{i+kd+d-1-id}}{\partial x_d^i \partial t^{(k-i+1)d-1}} f$  ( $i \neq 0$ ) sont continues en  $(O, O) \in U \times \mathbf{R}$ , tandis que la dérivée  $\frac{\partial^{kd+d-1} f}{\partial t^{kd+d-1}}(x, t)$  tend vers l'infini quand  $(x, t)$  tend vers  $(O, O)$ . La formule précédente montre que  $\frac{\partial^k r_1}{\partial x_d^k}(x)$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers  $O(x \in W)$ , et  $R$  ne peut donc pas être de classe  $k$  sur  $U \times \mathbf{R}$ .

Un exemple d'une telle fonction  $f$  est donné par une primitive d'ordre  $dk + d - 1$  en  $t$  de la fonction :

$$(x_1, \dots, x_d, t) \mapsto \frac{1}{x_d^2 + \left( \frac{1}{\log |t|} \right)^2}$$

( $W = V - \{(x_1, \dots, x_d, t) | x_d = t = 0\}$ ).

On montrerait de la même manière que le théorème 1 bis donne le meilleur résultat possible pour le quotient.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [4] J. MATHER, Stability of  $C^\infty$ -mappings: I, *Annals of Maths*, 1968.

Guy LASSALLE,

28 bis, rue d'Estienne-d'Orves,  
92-Fontenay-aux-Roses.