Annales de l'institut Fourier

Myriam Dechamps-Gondim

# Ensembles de Sidon topologiques

*Annales de l'institut Fourier*, tome 22, nº 3 (1972), p. 51-79

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_3_51_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22,3 (1972), 51-79

# ENSEMBLES DE SIDON TOPOLOGIQUES

par Myriam DECHAMPS-GONDIM

## Table des Matières



## Introduction.

Soit $\Lambda = (\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite de Hadamard de nombres réels ($\lambda_j > 0$, $\lambda_{j+1}/\lambda_j \geq q > 1$, $j \geq 1$). Il est connu depuis fort longtemps que si une série trigonométrique

$$S : \sum_{j\geq 1} c_j \, e^{i\lambda_j x} \tag{1}$$

a de "bonnes" propriétés au voisinage d'un point, alors S a de "bonnes" propriétés sur toute la droite réelle. L'exemple le plus frappant est peut-être celui-ci :

(A) Si les sommes partielles de S sont simplement bornées au voisinage d'un point, alors $\sum_{j \geq 1} |c_j| < \infty$ [20].

Ce résultat, comme beaucoup d'autres résultats analogues ([8], [12]), est une conséquence du fait qu'une suite de Hadamard est un ensemble de Sidon associé à tout intervalle :

Une suite $\Lambda = (\lambda_j)_{j \geq 1}$ de nombres réels est un ensemble de Sidon s'il existe un intervalle I et une constante $C_I$ tels que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{1 \leq j \leq N} c_j e^{i\lambda_j x}$ on ait

$$\sum_{1 \leq j \leq N} |c_j| \leqslant C_I \sup_{x \in I} |P(x)|. \tag{2}$$

Tout intervalle I pour lequel (2) est vérifiée sera dit associé à l'ensemble de Sidon $\Lambda$.

On peut dès lors se demander si la propriété remarquable suivante est vérifiée : si $\Lambda$ est un ensemble de Sidon, c'est-à-dire, s'il existe un intervalle associé à $\Lambda$, alors tout intervalle est-il associé à $\Lambda$ ? La réponse est affirmative, et nous le démontrons, dans un cadre plus général, au paragraphe 6.

La propriété (A) des séries lacunaires est donc vérifiée par toute série à spectre dans un ensemble de Sidon. Une autre façon de formuler ce résultat est de dire que la C-pseudo-période attachée à une suite de Sidon est nulle ([8], [14]).

Le cas particulier des ensembles de Sidon qui sont des réunions finies de suites de Hadamard ou des suites satisfaisant à une condition de lacunarité plus large avait déjà été examiné par V.F. Gapŏskin [6].

Dans notre exposé nous nous plaçons dans le cas d'un groupe abélien localement compact G et nous notons $\Gamma$ son dual. Dans le premier paragraphe nous énonçons des définitions et propriétés connues concernant des ensembles de Sidon. Comme ces ensembles sont usuellement considérés comme des parties d'un groupe discret, nous utiliserons souvent le terme ensemble de Sidon topologique pour préciser que nous considérons le cas où $\Gamma$ est un groupe abélien localement compact général.

Dans le paragraphe 2 nous étendons aux ensembles de Sidon topologiques le résultat de S. Drury : la réunion de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon [5]. Une adaptation de la méthode permet d'obtenir une propriété d'"élargissement" des ensembles de Sidon (§ 3) qui complète celle de [15].

Dans le paragraphe 4 nous donnons une caractérisation facile, en termes de "stabilité", des ensembles de Sidon parmi les ensembles qui ont un compact associé, lorsque $\Gamma$ est métrisable et non compact.

Les paragraphes 5 et 6 détaillent le résultat fondamental de ce travail : lorsque G est connexe, toute partie compacte d'intérieur non vide de G est associée à tout ensemble de Sidon de $\Gamma$. L'étape principale est fournie par le théorème 6.1. Dans les lemmes qui le précèdent nous établissons des résultats essentiels sur la structure des ensembles de Sidon. La question se pose naturellement, à propos du théorème 6.1., de savoir si, lorsqu'un compact d'intérieur non vide de G est associé à l'ensemble de Sidon $\Lambda$ et $\Lambda_0$ est une partie finie de $\Gamma$, K est encore associé à $\Lambda \cup \Lambda_0$. Nous montrons que la réponse est affirmative (théorème 6.1. bis).

Ce travail trouve son origine dans des problèmes que m'a proposés Monsieur J.F. Méla. Je tiens à le remercier tout particulièrement pour sa collaboration efficace et continue. Je tiens encore à exprimer ma reconnaissance à Madame A. Bonami pour l'intérêt avec lequel elle a suivi cette étude et pour ses suggestions, souvent précieuses.

## 1. Rappels sur les ensembles de Sidon.

Les ensembles de Sidon ont été généralement définis comme des sous-ensembles d'un groupe abélien discret ([7], [8], [18], [19]). Dans [13], J.F. Méla définit la notion d'ensemble de Sidon dans un groupe abélien localement compact $\Gamma$ et montre qu'un tel ensemble possède toujours un compact associé si $\Gamma$ est métrisable. Y. Meyer démontre ensuite une propriété d'élargissement des ensembles de Sidon de nombres réels [15].

Dans toute la suite, G désigne un groupe abélien localement compact, $\Gamma$ son dual et $\Lambda$ un sous-ensemble de $\Gamma$. Les notations qui ne seraient pas définies sont celles de [18].

DEFINITION 1.1. — $\Gamma$ *est un ensemble de Sidon discret s'il existe une constance* C *telle que pour tout polynôme trigonométrique*

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda (x, \lambda)$$

*on ait*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| \leq C \sup_{x \in G} |P(x)|. \tag{1.1.}$$

DEFINITION 1.2. — $\Lambda$ *est un ensemble de Sidon topologique si pour toute fonction bornée* $b$ *définie sur* $\Lambda$, *il existe une mesure* $\mu$ *dans* M(G) *telle que* $\hat{\mu}(\lambda) = b(\lambda)$ *pour tout* $\lambda$ *dans* $\Lambda$.

Autrement dit, $\Lambda$ est un ensemble de Sidon topologique si $\Lambda$ est un ensemble d'interpolation pour l'algèbre B($\Gamma$) des transformées de Fourier des mesures de Radon bornées sur G.

Remarquons que si $\Lambda$ est un ensemble de Sidon discret ou topologique, pour toute partie finie $\Lambda'$ de $\Gamma$, $\Lambda \cup \Lambda'$ l'est aussi.

Lorsque G est compact, les notions d'ensemble de Sidon discret et topologique coïncident ([18], p. 121). Lorsque G n'est pas compact, on vérifie que tout ensemble de Sidon topologique est un ensemble de Sidon discret et que la réciproque est fausse [15]. Pour caractériser parmi les ensembles de Sidon discrets ceux qui sont topologiques, on introduit la notion suivante :

DEFINITION 1.3. — *Le compact* $K \subset G$ *est associé à l'ensemble* $\Lambda \subset \Gamma$ *s'il existe une constante* A *telle que pour tout polynôme trigonométrique* $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda (x, \lambda)$,

$$\operatorname{Sup}_{x \in G} |P(x)| \leqslant A \operatorname{Sup}_{x \in K} |P(x)|$$

Si K est associé à $\Lambda$ et si de plus $\Lambda$ est un ensemble de Sidon discret, il existe une constante C telle que pour tout polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda (x, \lambda)$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| \leq C \sup_{x \in K} |P(x)| \tag{1.2.}$$

*On dira dans ce cas que le couple* (K , C) *est associé à* $\Lambda$.

Remarquons que si le couple (K , C) est associé à $\Lambda$, alors pour tout $x$ dans G et $\gamma$ dans $\Gamma$, $(\{x\} + K, C)$ est associé à $\{\gamma\} + \Lambda$.

Une condition nécessaire immédiate pour qu'il existe un compact K associé à $\Lambda$ est celle-ci ([16], p. 10) :

PROPOSITION 1.1. – *Si le compact* K *de* G *est associé à l'ensemble* $\Lambda \subset \Gamma$, *il existe un voisinage* V *de* 0 *dans* $\Gamma$ *tel que pour tous* $\lambda$ *et* $\lambda'$ *distincts dans* $\Lambda$, $\lambda - \lambda' \notin V$.

Nous utiliserons souvent la caractérisation suivante des compacts associés à un ensemble de Sidon ([12], p. 44) :

PROPOSITION 1.2. – *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un compact* K *symétrique* ($-K = K$) *de* G *soit associé à un ensemble de Sidon* $\Lambda$ *est qu'il existe* $D = D(\Lambda, K) > 0$, $\delta = \delta(\Lambda, K)$, $0 < \delta < 1$, *tels que pour toute fonction* $b$ *définie sur* $\Lambda$ *et à valeurs dans* $\{-1, 1\}$, *il existe une mesure* $\mu$ *dans* M(G), *à support dans* K, *telle que*

$$\|\mu\| \leq D \quad , \quad \sup_{\lambda \in \Lambda} |\hat{\mu}(\lambda) - b(\lambda)| \leq \delta$$

*Le couple* $(K, 2D(1 - \delta)^{-1})$ *est alors associé à* $\Lambda$.

THEOREME 1.1. – *Supposons* $\Gamma$ *métrisable. Pour tout sous-ensemble* $\Lambda$ *de* $\Gamma$, *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\Lambda$ *est un ensemble de Sidon discret et possède un compact associé.*

ii) $\Lambda$ *est un ensemble de Sidon topologique* ([13], [15]).

Si $\Gamma$ n'est pas métrisable, ce résultat ne subsiste pas : un ensemble d'interpolation (pour l'algèbre des fonctions presque-périodiques sur **R**) infini de nombres réels est un ensemble de Sidon topologique du compactifié de Bohr de **R** qui n'a pas de compact associé dans $\mathbf{R}_d$, le groupe **R** avec la topologie discrète ([13], p. 35).

Dans toute la suite nous supposons $\Gamma$ métrisable, notons d une distance invariante sur $\Gamma$ et $d(0, \gamma - \gamma') = |\gamma - \gamma'|$ pour tous $\gamma$ et $\gamma'$ dans $\Gamma$. D'autre part, sauf mention explicite du contraire, l'expression ensemble de Sidon désignera un ensemble de Sidon topologique.

DEFINITION 1.4. — *Pour tout sous-ensemble $\Lambda$ de $\Gamma$, le pas de $\Lambda$ est le nombre*

$$p(\Lambda) = \inf\{|\lambda - \lambda'|\ ,\ \lambda \in \Lambda\ ,\ \lambda' \in \Lambda,\ \lambda \neq \lambda'\}$$

Il découle du théorème 1.1. et de la proposition 1.1. que tout ensemble de Sidon a un pas strictement positif. Une deuxième conséquence immédiate du théorème 1.1. s'exprime en termes de stabilité [13] :

DEFINITION 1.5. — *Soit $\Omega$ un voisinage de l'origine dans $\Gamma$. Un sous-ensemble $\Lambda'$ de $\Gamma$ est dit $\Omega$-voisin d'un sous-ensemble $\Lambda$ de $\Gamma$ s'il existe une bijection $\lambda \to \lambda'$ de $\Lambda$ sur $\Lambda'$ telle que $\lambda - \lambda' \in \Omega$.*

DEFINITION 1.6.— *Soit* P *une propriété relative à un sous-ensemble de $\Gamma$. On dit que $\Lambda$ est stable (par rapport à la propriété* P) *s'il existe un voisinage $\Omega$ de l'origine dans $\Gamma$ tel que tout ensemble $\Omega$-voisin de $\Lambda$ a la propriété* P.

PROPOSITION 1.3. — *Tout ensemble de Sidon d'un groupe $\Gamma$ métrisable est stable par rapport aux propriétés suivantes :*

$(P_1)$ : $\Lambda$ *est un ensemble de Sidon*

$(P_2)$ : $\Lambda$ *a un compact associé.*

Soit E une partie fermée de $\Gamma$. Rappelons que B(E) (resp. A(E)) désigne l'algèbre de Banach des restrictions à E des fonctions de l'algèbre $B(\Gamma)$ des transformées de Fourier des mesures de Radon bornées sur G (resp. de l'algèbre $A(\Gamma)$ des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(G)$), munie de la norme quotient

$$\|f\|_{B(E)} = \inf\{\|\mu\| \ ; \mu \in M(G), \hat{\mu}|_E = f\}$$

$$\text{resp.} \quad \|f\|_{A(E)} = \inf\{\|g\| \ ; g \in L^1(G), \hat{g}|_E = f\}$$

Dans [15], Y. Meyer démontre que si $\Lambda$ est un ensemble de Sidon de nombres réels, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le prolongement d'un élément de $\ell^\infty(\Lambda)$ à un élément de $B(\Lambda + [-\varepsilon, \varepsilon])$ peut-être réalisé par une application linéaire et continue de $\ell^\infty(\Lambda)$ dans $B(\Lambda + [-\varepsilon, \varepsilon])$,

Dans un groupe $\Gamma$ métrisable, ce résultat s'exprime de la façon suivante ([15], [16]) :

THÉORÈME 1.2. – (*Théorème d'élargissement*). *Soit* $\Lambda$ *un ensemble de Sidon associé au couple* (K , C), *où* K *est un compact de* G. *Pour tout* $C' > C$ *il existe* $\delta = \delta(K, C') > 0$ *tel que pour toute fonction complexe bornée* $b$ *définie sur* $\Lambda$ *et tout élément* $f$ *de* $A(B_\delta)$, où $B_\delta = \{\gamma \in \Gamma, |\gamma| \leq \delta\}$ *la fonction* $\varphi$ *définie sur* $\Lambda + B_\delta$ *par*

$$\varphi(\gamma) = b(\lambda) f(\gamma - \lambda) \quad (\gamma \in \Gamma, \lambda \in \Lambda, |\gamma - \lambda| \leq \delta)$$

*appartient à* $B(\Lambda + B_\delta)$ *et*

$$\|\varphi\|_{B(\Lambda + B_\delta)} \leqslant C' \|f\|_{A(B_\delta)} \|b\|_\infty$$

Pour conclure, citons une condition arithmétique nécessaire pour que $\Lambda$ soit un ensemble de Sidon [10] :

THÉORÈME 1.3. – (condition des mailles) *Soit* $\Lambda \subset \Gamma$ *un ensemble de Sidon discret qui vérifie* (1.1). *Etant donnés* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *dans* $\Gamma$, *soit* E *l'ensemble de points de* $\Gamma$ *de la forme* $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \gamma_i$, *où* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *sont des entiers tels que* $\sum_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \leq 2^s$. *Alors*

$$\operatorname{card}(E \cap \Lambda) \leq (16\,C)^2\, ns$$

## 2. La réunion d'ensembles de Sidon topologiques.

G et $\Gamma$ désignent toujours deux groupes abéliens localement compacts en dualité, $\Gamma$ étant métrisable.

Nous allons employer la méthode introduite par S. Drury dans [5]. Soit $p$ un entier positif, considérons le groupe fini $\Omega = \{-1, 1\}^p$ muni de la mesure de Haar $d\omega$. Le dual $\hat{\Omega}$ de $\Omega$ peut-être identifié à $\{0, 1\}^p$, la dualité entre $\Omega$ et $\Omega$ s'exprimant alors de la façon suivante: si $\omega = (\omega_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \Omega$ et $\chi = (\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \hat{\Omega}$,

$$(\omega, \chi) = \prod_{1 \leq j \leq p} \omega_j^{\varepsilon_j} \tag{2.1.}$$

LEMME 2.1. – *Soit* $X = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *un ensemble de Sidon fini associé au couple* $(K, C)$, *où* $K$ *est un compact de* $G$. *Pour tout* $\omega = (\omega_j)_{1 \leq j \leq p} \in \Omega$, *il existe* $\sigma_\omega \in M(G)$, *à support compact* $K + K$, *telle que*

1) $\|\sigma_\omega\| \leq C^2$

2) $\hat{\sigma}_\omega(\lambda_j) = \omega_j, \quad 1 \leq j \leq p$

3) $\sup \|g_\gamma\|_{A(\Omega)} \leq C^2$, où $g_\gamma$ *est la fonction définie sur* $\Omega$ *par* $\omega \to \hat{\sigma}_\omega(\gamma)$.

*Démonstration.* – Pour tout $\omega = (\omega_j)_{1 \leq j \leq p} \in \Omega$, soit $\mu_\omega \in M(G)$ à support dans $K$ telle que $\|\mu_\omega\| \leqslant C$ et $\hat{\mu}_\omega(\lambda_j) = \omega_j \quad (1 \leq j \leq p)$. Posons

$$\sigma_\omega = \int_\Omega \mu_{\omega'} * \mu_{\omega\omega'^{-1}} \, d\omega'$$

Alors $\sigma_\omega \in M(G)$, $\sigma_\omega$ est à support dans $K + K$ et $\|\sigma_\omega\| \leqslant C^2$. Pour tout $\gamma$ dans $\Gamma$,

$$\hat{\sigma}_\omega(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)\, d\sigma_\omega(x) = \int_\Omega \left(\int_G (-x, \gamma)\, d(\mu_{\omega'} * \mu_{\omega\omega'^{-1}})(x)\right) d\omega$$

$$= \int_\Omega \hat{\mu}_{\omega'}(\gamma)\, \hat{\mu}_{\omega\omega'^{-1}}(\gamma)\, d\omega'$$

Pour $\gamma = \lambda_j \in X$, on obtient $\hat{\sigma}_\omega(\lambda_j) = \omega_j$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$. Pour $\gamma \in \Gamma$, la fonction $g_\gamma : \omega \to \hat{\sigma}_\omega(\gamma)$ est le produit de convolution sur $\Omega$ de la fonction $\omega \to \hat{\mu}_\omega(\gamma)$ avec elle-même, donc $g_\gamma \in A(\Omega)$ et

$$\|g_\gamma\|_{A(\Omega)} = \int_\Omega |\hat{\mu}_\omega(\gamma)|^2 \, d\omega \leqslant C^2.$$

THÉORÈME 2.1. — *Soit* $X = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *une partie finie de* $\Gamma$ *associée au couple* $(K, C)$, *où* $K$ *est un compact de* $G$. *Soient* $\beta$ *et* $\delta$ *des constantes positives. Il existe une fonction* $g$ *dans* $L^1(G)$, *à support compact* $K'$, $K' = K'(\delta, \beta, K, C)$, *telle que*

1) $\|g\|_1 \leqslant 2\sqrt{2}\, C^3 \beta^{-1/2}$

2) $\hat{g}(\lambda_j) = 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$

3) $|\hat{g}(\gamma)| \leqslant \beta$ pour tout $\gamma$ dans $\Gamma$ tel que $d(\gamma, X) \geqslant \delta$.

*Démonstration.* — Considérons d'abord le cas où pour tout $\lambda \in X$, $-\lambda \in X$ et $2\lambda \neq 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Pour tout $\omega = (\omega_j)_{1 \leqslant j \leqslant p} \in \Omega$, considérons la mesure $\sigma_\omega$ donnée par le lemme 2.1. et le produit de Riesz

$$R_\omega(x) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} R_j(x)$$

où

$$R_j(x) = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\, \omega_j\, [(x, \lambda_j) + (-x, \lambda_j)] \qquad (1 \leq j \leq p)$$

Remarquons que $R_\omega \geq 0$ et

$$\int_\Omega R_\omega(x)\, d\omega = \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} \int_{\{-1,1\}} R_j(x)\, d\omega_j = 1.$$

Il existe $b$ dans $L^1(G)$, à support compact $K_0 = K_0(\varepsilon, \delta), b \geqslant 0$, $\|b\|_1 = 1$ et $|\hat{b}(\gamma)| < \varepsilon^2$ pour $\gamma \in \Gamma$ tel que $|\gamma| \geq \delta$. Posons

$$R = \int_\Omega (\sigma_\omega * (R_\omega\, b))\, d\omega.$$

Pour tout $\omega$ dans $\Omega$, $\sigma_\omega * (R_\omega\, b) \in L^1(G)$ et a son support dans $K' = K + K + K_0$, donc il en est de même pour $R$ et

$$\|R\|_1 = \int_G |R(x)|\, dx \leqslant \int_\Omega \|\sigma_\omega * (R_\omega\, b)\|_1\, d\omega \leqslant C^2 \int_\Omega \|R_\omega\, b\|_1\, d\omega =$$

$$= C^2 \int_G b(x) \left( \int_\Omega R_\omega(x)\, d\omega \right) dx = C^2 \int_G b(x)\, dx = C^2.$$

Pour tout $\gamma$ dans $\Gamma$,

$$\hat{\mathrm{R}}(\gamma) = \int_{\mathrm{G}} (-x\,,\gamma)\, \mathrm{R}(x)\, dx = \int_{\Omega} \left[\int_{\mathrm{G}} (-x\,,\gamma)(\sigma_\omega * \mathrm{R}_\omega b)(x) dx\right] d\omega$$

$$= \int_{\Omega} \hat{\sigma}_\omega(\gamma)\, \widehat{(\mathrm{R}_\omega b)}(\gamma) d\omega$$

$\alpha$) Si $\gamma = \gamma_j \in \mathrm{X}$, $\hat{\sigma}_\omega\,(\gamma) = \omega_j$ et l'on obtient

$$\hat{\mathrm{R}}(\lambda_j) = \int_{\Omega} \omega_j \widehat{(\mathrm{R}_\omega b)}(\lambda_j)\, d\omega = \int_{\mathrm{G}} (-x\,,\lambda_j)\, b(x) \left(\int_{\Omega} \omega_j\, \mathrm{R}_\omega\,(x)\, d\omega\right) dx$$

or

$$\int_{\Omega} \omega_j\, \mathrm{R}_\omega\,(x)\, d\,\omega =$$

$$= \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq p \\ k \neq j}} \int_{\{-1,1\}} \mathrm{R}_k\,(x)\, d\omega_k\right)\left(\int_{\{-1,1\}} \left[\omega_j + \frac{\varepsilon}{2}((x\,,\lambda_j) + (-x\,,\lambda_j))\right] d\omega_j\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}((x\,,\lambda_j) + (-\,x\,,\lambda_j))$$

d'où

$$\hat{\mathrm{R}}(\lambda_j) = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \hat{b}(2\lambda_j)) \qquad (1 \leq j \leq p)$$

$\beta$) Pour $\gamma$ quelconque dans $\Gamma$, utilisons la condition (3) du lemme 2.1. :

$$\hat{\sigma}_\omega\,(\gamma) = \sum_{\chi \in \hat{\Omega}} a(\gamma, \chi)\,(\omega\,,\chi) \quad , \quad \sum_{\chi \in \hat{\Omega}} |a(\gamma\,,\chi)| \leqslant \mathrm{C}^2.$$

Alors

$$|\hat{\mathrm{R}}(\gamma)| = |\sum_{\chi \in \hat{\Omega}} a(\chi\,,\gamma) \int_{\Omega} (\omega\,,\chi) \widehat{(\mathrm{R}_\omega b)}\,(\gamma) d\omega| \leqslant \mathrm{C}^2 \max_{\chi \in \hat{\Omega}} |b_\chi|$$

où

$$b_\chi = \int_\Omega (\omega,\chi)\,\widehat{R_\omega b}(\gamma)\,d\omega = \int_\Omega (-x,\gamma)\,b(x)\left(\int_\Omega (\omega,\chi)\,R_\omega(x)\,d\omega\right)dx$$

Tout $\chi$ dans $\hat{\Omega}$ s'écrit sous la forme (2.1.) ; notons $n_\chi$ l'ensemble d'indices $j$, $1 \leq j \leq n$, tels que $\varepsilon_j = 1$. Alors

$$\int_\Omega (\omega,\chi)\,R_\omega(x)\,d\omega = \prod_{j\in n_\chi} \int_{\{-1,1\}} (\omega_j + \frac{\varepsilon}{2}[(x,\lambda_j) + (-x,\lambda_j)])\,d\omega_j =$$

$$= \prod_{j\in n_\chi} \frac{\varepsilon}{2}((x,\lambda_j) + (-x,\lambda_j))$$

On en déduit que si card$(n_\chi) \geqslant 2$, $|b_\chi| \leqslant \varepsilon^2$. Si card$(n_\chi) = 1$, alors $(\omega,\chi) = \omega_j$ et

$$b_\chi = \frac{\varepsilon}{2}(\hat{b}(\gamma - \lambda_j) + \hat{b}(\gamma + \lambda_j)) \quad (1 \leq j \leq p).$$

Enfin, si $\chi = 1$, $b_\chi = \hat{b}(\gamma)$. Finalement,

$$\max_{\chi\in\hat{\Omega}} |b_\chi| \leqslant \max\{\varepsilon^2,\ \max_{1\leqslant j\leqslant p} \frac{\varepsilon}{2}|\hat{b}(\gamma - \lambda_j) + \hat{b}(\gamma + \lambda_j)|,\ |\hat{b}(\gamma)|\}$$

On en déduit que pour tout $\gamma$ dans $\Gamma$ tel que $d(\gamma, X \cup (-X) \cup \{0\}) \geqslant \delta$, $|\hat{R}(\gamma)| \leqslant C^2\ \varepsilon^2$. Pour éviter les restrictions imposées à X et pour obtenir une majoration de $|\hat{R}(\gamma)|$ pour tout $\gamma$ tel que $d(\gamma, X) > \delta$, nous utiliserons le procédé suivant [19]. Considérons le groupe produit $G' = G \times T$ et le sous-ensemble $X' = X \times \{1\}$ de $\Gamma \times Z$. Alors $X'$ est associé au couple $(K \times \{0\}, C)$ et $X'$ est tel que pour tout $\lambda' \in X'$, $-\lambda' \notin X'$ et $2\lambda' \neq 0$. Par le raisonnement antérieur, en remplaçant $b$ par $b' \in L^1(G')$ telle que $b'(x,t) = b(x)$, pour $(x,t) \in G \times T$, on obtient une fonction $R' \in L^1(G \times T)$, à support dans $K' \times T$, $\|R'\|_1 \leq C^2$, et telle que

$$\hat{R}'(\lambda_j, 1) = \frac{\varepsilon}{2} \quad (1 \leq j \leq p)$$

$$|\hat{R}'(\gamma, 1)| \leq C^2\,\varepsilon^3 \qquad (d(\gamma, X) \geq \delta).$$

Pour vérifier la dernière inégalité il suffit de remarquer que

$$(\gamma\,,1) \pm \lambda' \pm \lambda'' \notin \Gamma \times \{0\},$$

quels que soient $\lambda'$ et $\lambda''$ dans $X'$ et $\gamma$ dans $\Gamma$, et que $b'$ a son spectre dans $\Gamma' \times \{0\}$. Pour conclure la démonstration, il suffit de choisir $\varepsilon$ assez petit et de poser

$$g(x) = \frac{2}{\varepsilon} \int_{T} e^{-it}\ R'(x\,,t)dt \qquad (x \in G).$$

*Remarque.* — C'est le support, et non la norme de la fonction $g$ que nous venons de construire, qui dépend de la constante $\delta$.

COROLLAIRE 2.1. — *Soit* $\Lambda$ *un ensemble de Sidon dans* $\Gamma$ *associé au couple* $(K\,,C)$, *où* $K$ *est un compact de* $G$. *Soient* $\beta$ *et* $\delta$ *des constantes positives. Il existe une mesure* $\mu \in M(G)$, *à support compact, telle que*

(1) $\|\mu\| \leqslant 2\sqrt{2}\ C^3\ \beta^{-1/2}$

(2) $\hat{\mu}(\lambda) = 1$ *pour tout* $\lambda$ *dans* $\Lambda$

(3) $|\hat{\mu}(\gamma)| < \beta$ *pour tout* $\gamma$ *dans* $\Gamma$ *tel que* $d(\gamma\,,\Lambda) \geq \delta$.

*Démonstration.* — Considérons l'ensemble filtrant $\mathfrak{F}$ des parties finies de $\Lambda$. D'après le théorème 2.1., il existe un compact $K'$ de $G$ tel que, pour tout $X \in \mathfrak{F}$, il existe une fonction $g_X \in L^1(G)$, à support dans $K'$, satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3). La famille $(g_X)_{X \in \mathfrak{F}}$ possède alors une valeur d'adhérence $\mu \in M(G)$, pour la topologie faible de $M(G)$ ([7], p. 458) qui satisfait aux conditions (1), (2) et (3).

COROLLAIRE 2.2. — *Soient* $\Lambda_1$ *et* $\Lambda_2$ *deux ensembles de Sidon dans* $\Gamma$ *tels que* $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ *ait un pas positif. Alors* $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ *est un ensemble de Sidon.*

*Démonstration.* — Soit $\delta$ tel que $0 < \delta < p(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$. Supposons que $\Lambda_i$ est associé à $(K_i\,, C_i)$, d'après le corollaire 2.1. il existe un compact $K_i'$ dans $G$ et une mesure $\mu_i \in M(G)$, à support dans $K_i'$, telle que :

$$\|\mu_i\| \leqslant 4\, C_i^{7/2}\ ,\ \hat{\mu}_i(\lambda) = 1 \quad \text{pour} \quad \lambda \in \Lambda_i,$$

$$|\hat{\mu}_i(\gamma)| < (2\, C_i)^{-1} \quad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma,\, d(\gamma, \Lambda_i) \geq \delta. \quad (i = 1\,, 2).$$

Nous utiliserons la proposition 1.2. pour montrer que $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ est un ensemble de Sidon. Soit $b$ une fonction définie sur $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Alors il existe $\nu_i \in M(G)$ telle que $\|\nu_i\| \leqslant C_i$ et $\hat{\nu}_i(\lambda) = b(\lambda)$ pour $\lambda$ dans $\Lambda_i$ $(i = 1, 2)$. La mesure

$$\mu = \mu_1 * \nu_1 + \mu_2 * \nu_2$$

a son support dans le compact $K = (K_1 + K_1') \cup (K_2 + K_2')$ et

$$|\hat{\mu}(\lambda) - b(\lambda)| \leq 1/2 \qquad (\lambda \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2).$$

On en déduit que $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ est associé à $(K\,, C)$ dès que

$$C \geqslant 16(C_1^{9/2} + C_2^{9/2}).$$

## 3. Une propriété d'élargissement. (1)

Reprenons les notations du théorème 1.2. d'élargissement. Lorsque la fonction $f$ de $A(\Gamma)$ a son support dans $B_\delta$, nous montrerons que la fonction $\varphi$ correspondante admet des extensions à $B(\Gamma)$ dont le module, en dehors de $\Lambda + B_\delta$, est arbitrairement petit.

LEMME 3.1. – *Soit* $X = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *un ensemble de Sidon fini associé au couple* $(K\,, C)$, *où* $K$ *est un compact de* $G$. *Pour tout* $C' > C$ *il existe* $\delta = \delta(K\,, C') > 0$ *tel que pour tout* $\omega = (\omega_j)_{1 \leq j \leq p} \in \Omega$, *il existe* $\sigma_\omega \in M(G)$ *telle que*

1) $\|\sigma_\omega\| \leqslant C'^2$

2) $\hat{\sigma}_\omega(\gamma) = \omega_j \quad (\gamma \in \Gamma,\ |\gamma - \lambda_j| \leq \delta\,,\ 1 \leq j \leq p)$

3) $\sup_{\gamma \in \Gamma} \|g_\gamma\|_{A(\Omega)} \leq C'^2$, où $g_\gamma$ *est la fonction définie sur* $\Omega$ *par* $\omega \to \hat{\sigma}_\omega(\gamma)$.

(1) Une propriété d'élargissement plus forte est établie par l'auteur dans un article ultérieur : "Interpolation linéaire approchée des fonctions bornées sur un ensemble de Sidon", Colloquium Mathematicum, XXVIII 2, (1973).

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.1., quitte à remplacer les mesures d'interpolation $\mu_\omega$ par des mesures $\mu'_\omega$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\mu'_\omega \in \mathrm{M(G)}\,,\ \|\mu'_\omega\| \leqslant \mathrm{C}'\,, \hat{\mu}'_\omega(\gamma) = \omega_j\ (|\gamma - \lambda_j| \leqslant \delta,\ 1 \leqslant j \leqslant p).$$

Ces mesures $\mu'_\omega$ sont fournies par le théorème 1.2. lorsqu'on prend $f \in \mathrm{A(B_\delta)}$ telle que $f(\gamma) = 1$, pour $\gamma$ dans $\mathrm{B}_\delta$. Dans ce cas, $\|f\|_{\mathrm{A(B_\delta)}} = 1$ ([18], p. 53).

THEOREME 3.1. – *Soit* $\mathrm{X} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ *une partie finie de* $\Gamma$ *associée au couple* (K , C), *où* K *est un compact de* G. *Pour tout* $\mathrm{C}' > \mathrm{C}$ *il existe* $\delta = \delta(\mathrm{K}, \mathrm{C}') > 0$ *tel que pour tout* $\beta > 0$ *et toute fonction* $f$ *de* $\mathrm{A}(\Gamma)$ *à support dans* $\mathrm{B}_\delta$, *il existe* $g_\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1(\mathrm{G})$ *telle que*

1) $\|g_\mathrm{X}\|_1 \leq 2\sqrt{2}\ \mathrm{C}'^3\ \|f\|^{3/2}_{\mathrm{A}(\Gamma)}\ \beta^{-1/2}$

2) $\hat{g}_\mathrm{X}(\gamma) = \sum\limits_{1 \leq j \leq p} f(\gamma - \lambda_j) \quad (\gamma \in \mathrm{X} + \mathrm{B}_\delta).$

3) $|\hat{g}_\mathrm{X}(\gamma)| < \beta \quad (\gamma \in \Gamma,\ d(\gamma, \mathrm{X}) \geq \delta).$

La démonstration suit celle du théorème 2.1., la fonction $b$ étant remplacée par $x \to \int_\Gamma (x, \gamma)\, f(\gamma)\, d\gamma$.

COROLLAIRE 3.1. – *Soit* $\Lambda$ *un ensemble de Sidon de* $\Gamma$ *associé au couple* (K , C). *Pour tout* $\mathrm{C}' > \mathrm{C}$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $\beta > 0$, *toute fonction* $f$ *de* $\mathrm{A}(\Gamma)$ *à support dans* $\mathrm{B}_\delta$ *et toute fonction* $b$ *à valeurs complexes et bornée sur* $\Lambda$, *il existe une mesure* $\mu \in \mathrm{M(G)}$ *telle que :*

1) $\|\mu\| \leqslant 2\mathrm{C}'^4\,(2\mathrm{C}'\ \|f\|^3_{\mathrm{A}(\Gamma)}\ \|b\|^3_\infty\ \beta^{-1})^{1/2}$

2) $\hat{\mu}(\gamma) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} b(\lambda)\, f(\gamma - \lambda) \qquad (\gamma \in \Lambda + \mathrm{B}_\delta)$

3) $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \beta \qquad (\gamma \in \Gamma,\ d(\gamma, \Lambda) \geq \delta)$

*Démonstration.* — Considérons d'abord le cas où $b(\lambda) = 1$, pour $\lambda \in \Lambda$. Le corollaire 3.1. s'obtient alors du théorème antérieur par un passage à la limite, comme dans le corollaire 2.1. Remarquons que les fonctions $g_X$ fournies par le théorème 3.1. n'ayant pas un support compact, pour montrer que la valeur d'adhérence $\mu$ correspondante satisfait aux conditions (2) et (3), l'on teste $\hat{\mu}$ sur des fonctions de $L^1(\Gamma)$ à support compact, de la façon suivante.

Pour tout $h$ dans $L^1(\Gamma)$ à support compact contenu dans $\Lambda + B_\delta$,

$$\int_\Gamma h(\gamma)\,\hat{\mu}(\gamma)\,d\gamma = \int_G \hat{h}(x)\,d\mu(x) = \lim_{\mathfrak{F}} \int \hat{h}(x)\,g_X(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\mathfrak{F}} \int_\Gamma h(\gamma)\,\hat{g}_X(\gamma)\,d\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} \int_G h(\gamma) f(\gamma-\lambda)\,d\gamma$$

(on suppose, pour simplifier les notations, que $\mu = \lim_{\mathfrak{F}} g_X$). On en déduit que pour presque tout $\gamma$ dans $\Lambda + B_\delta$, $\hat{\mu}(\gamma) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} f(\gamma - \lambda)$. La fonction $\hat{\mu}$ étant continue, l'égalité a lieu pour tout $\gamma$ dans $\Lambda + B_\delta$, et la condition (2) est vérifiée.

Pour tout $h$ dans $L^1(\Gamma)$ à support compact contenu dans le complémentaire de $\Lambda + B_\delta$,

$$\left|\int_\Gamma h(\gamma)\,\hat{\mu}(\gamma)\,d\gamma\right| = \left|\lim_{\mathfrak{F}} \int_\Gamma h(\gamma)\,\hat{g}_X(\gamma)\,d\gamma\right| \leqslant \beta\,\|h\|_1 .$$

La continuité de $\hat{\mu}$ alliée à cette inégalité montre que $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \beta$ pour tout $\gamma$ dans $\Gamma$ tel que $d(\gamma, \Lambda) \geq \delta$.

Dans le cas où $b$ est un élément quelconque de $l^\infty(\Lambda)$, il suffit de considérer la mesure $\mu * \mu'$, où $\mu'$ est une mesure telle que $\|\mu'\| \leqslant C'\,\|b\|_\infty$ et $\hat{\mu}'(\gamma) = b(\lambda)$ si $\gamma \in \Gamma$, $\lambda \in \Lambda$, $|\gamma - \lambda| \leq \delta$ (théorème 1.2.).

## 4. Stabilité des ensembles de Sidon topologiques.

Nous avons déjà signalé (proposition 1.3.) que tout ensemble de Sidon est stable par rapport aux propriétés $(P_1)$ et $(P_2)$. Par contre, un ensemble qui a la propriété $(P_2)$ est en général loin d'être stable. L'exemple le plus frappant est celui de l'ensemble Z des entiers relatifs : aucune suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels telle que $\lim_{n\to\infty} (n - \lambda_n) = 0$ et $\lambda_n \neq n$ pour une infinité de valeurs de l'entier $n$ ne possède de compact associé [17].

On démontre facilement que le fait d'être stable par rapport à la propriété $(P_2)$ est caractéristique des ensembles de Sidon d'un groupe non discret :

PROPOSITION 4.1. — *Soit $\Lambda$ un sous-ensemble d'un groupe $\Gamma$ métrisable et non discret qui est stable par rapport à la propriété* $(P_2)$. *Alors $\Lambda$ est un ensemble de Sidon.*

*Démonstration.* — Il nous suffit de montrer que $\Lambda$ est un ensemble de Sidon discret, donc que toute partie dénombrable $\Lambda'$ de $\Lambda$ est un ensemble de Sidon discret [18]. Considérons une telle partie $\Lambda'$ et soit $\Omega$ un voisinage de l'origine dans $\Gamma$ tel que tout ensemble $\Omega$ - voisin de $\Lambda'$ ait un compact associé. Nous pouvons alors construire un ensemble $\Lambda''$ indépendant ([18], p. 97) $\Omega$ - voisin de $\Lambda'$ et tel que $\lim_{n\to\infty} (\lambda' - \lambda'') = 0$ où $\lambda' \to \lambda''$ est une bijection de $\Lambda'$ sur $\Lambda''$. L'ensemble $\Lambda''$ est un ensemble de Sidon discret ([18], p. 126) et possède un compact associé, donc $\Lambda''$ est un ensemble de Sidon topologique. $\Lambda''$ est alors stable par rapport à la propriété $(P_1)$ et par conséquent il existe une partie finie $\Lambda'_0$ de $\Lambda'$ telle que $\Lambda'\backslash\Lambda'_0$ soit un ensemble de Sidon topologique. On en déduit que $\Lambda'$ lui-même est un ensemble de Sidon topologique et a fortiori un ensemble de Sidon discret.

## 5. Compacts associés à un ensemble de Sidon dont le pas tend vers l'infini.

G et $\Gamma$ désignent deux groupes abéliens localement compacts en dualité, $\Gamma$ étant métrisable.

DEFINITION 5.1. — *On dit que le pas du sous-ensemble* $\Lambda$ de $\Gamma$ *tend vers l'infini si*

$$\lim(\lambda - \lambda') = \infty \quad (\lambda , \lambda' \in \Lambda , \lambda \neq \lambda' , \lambda , \lambda' \to \infty)$$

Autrement dit, pour tout voisinage compact F de l'origine dans $\Gamma$, il existe une partie compacte $\Lambda_F$ de $\Lambda$ telle que pour tous $\lambda$ et $\lambda'$ distincts dans $\Lambda \setminus \Lambda_F$ , $\lambda - \lambda' \notin F$.

DÉFINITION 5.2. – *Le compact* $K \subset G$ *est associé à l'ensemble* $\Lambda \subset \Gamma$ *au sens large s'il existe une partie finie* $\Lambda_K$ *de* $\Lambda$ *telle que* K *soit associé à* $\Lambda \setminus \Lambda_K$. *Analoguement, le couple* (K , C) *est associé à l'ensemble de Sidon* $\Lambda$ *au sens large s'il existe une partie finie* $\Lambda_K$ *de* $\Lambda$ *telle que* (K , C) *soit associé à* $\Lambda \setminus \Lambda_K$.

Dans le cas d'un ensemble de Sidon dont le pas tend vers l'infini, l'existence de la mesure d'interpolation fournie par le corollaire 3.1. permet d'obtenir assez simplement le résultat suivant :

THÉORÈME 5.1. – *Soit* $\Lambda$ *un ensemble de Sidon d'un groupe* $\Gamma$ *métrisable dont le pas tend vers l'infini. Tout compact* K *de* G *d'intérieur non vide est associé à* $\Lambda$ *au sens large.*

*Démonstration.* – D'après la remarque qui suit la définition 1.3., il suffit de considérer le cas où K est un voisinage compact et symétrique de l'origine. Soit alors V un voisinage compact et symétrique de l'origine tel que $V + V \subset K$, et

$$a = |V|^{-1} \chi_V * \chi_V \tag{5.1.}$$

où $\chi_V$ est la fonction caractéristique de V et $|V|$ note la mesure de Haar de V. Alors $a \in L^1(G)$, $a \geqslant 0$, $\hat{a} \geqslant 0$, $\|a\|_1 = \hat{a}(0) = 1$ et $\hat{a} \in L^1(\Gamma)$.

Nous allons montrer que les conditions de la proposition 1.2. sont vérifiées par $\Lambda \setminus \Lambda_K$, où $\Lambda_K$ est une partie finie de $\Lambda$. Soit $b$ une fonction définie sur $\Lambda$ à valeurs dans $\{-1 , 1\}$, nous déterminerons une mesure $\nu$ de la forme $a\mu$, $\mu \in M(G)$, et telle que

$$|\hat{\nu}(\lambda) - b(\lambda)| \leqslant 1/2 \quad , \quad \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_K . \tag{5.2.}$$

Choisissons $\mu$. Soient $C'$ et $\delta$ les constantes qu'interviennent dans le corollaire 3.1., nous supposons $\delta$ assez petit pour que la condition suivante soit vérifiée :

$$\sup_{\gamma \in B_\delta , x \in K} |(x , \gamma) - 1| \leq \alpha \tag{5.3.}$$

où $\alpha$ est une constante que nous préciserons ensuite, $0 < \alpha < 1$.

Posons :

$$f = |B_{\delta/2}|^{-2}\, \chi_{B_{\delta/2}} * \chi_{B_{\delta/2}} \quad , \beta = \min\{1 \,,\, \alpha \, \|\hat{a}\|_1^{-1} \,,\, |B_{\delta/2}|^{-1}\} \tag{5.4.}$$

D'après le corollaire 3.1., il existe une mesure $\mu \in M(G)$ satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3).

Choisissons $\Lambda_K$. Soit F une partie compacte et symétrique de $\Gamma$, $B_\delta \subset F$, telle que

$$\int_{\Gamma \setminus F} \hat{a}(\gamma)\, d\gamma \leq \alpha |B_{\delta/2}| \tag{5.5.}$$

$\Lambda_K$ sera une partie finie de $\Lambda$ telle que pour tous $\lambda$ et $\lambda'$ distincts dans $\Lambda \setminus \Lambda_K$, $\lambda - \lambda' \notin F + B_\delta$.

Posons $\nu = a\, \mu$. Alors $\|\nu\| \leqslant \|a\|_\infty \, \|\mu\| = D(\Lambda, K)$. Evaluons $\hat{\nu}(\lambda)$ pour $\lambda$ dans $\Lambda \setminus \Lambda_K$ :

$$\hat{\nu}(\lambda) = \int_\Gamma \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda - \gamma)\, d\gamma = \int_{\{\lambda\} + B_\delta} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda - \gamma)\, d\gamma \, +$$

$$+ \int_{\{\lambda\} + (F \setminus B_\delta)} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda - \gamma)\, d\gamma + \int_{\Gamma \setminus (\{\lambda\} + F)} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda - \gamma)\, d\gamma$$

D'après le choix de $\Lambda_K$, $d(\{\lambda\} + (F \setminus B_\delta), \Lambda \setminus \Lambda_K) \geq \delta$, d'où $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \beta$ pour $\gamma \in \{\lambda\} + (F \setminus B_\delta)$ et

$$\left| \int_{\{\lambda\} + (F \setminus B_\delta)} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda - \gamma)\, d\gamma \right| \leqslant \beta \int_\Gamma \hat{a}(\gamma)\, d\gamma \leqslant \alpha. \tag{5.6.}$$

D'après le choix de F,

$$\left| \int_{\Gamma \setminus (\{\lambda\} + F)} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda - \gamma)\, d\gamma \right| \leq \alpha \tag{5.7.}$$

car $\|\mu\|_\infty < |B_{\delta/2}|^{-1}$ d'après les conditions (2) et (3) du corollaire 3.1.

La dernière intégrale à évaluer s'écrit

$$\int_{\{\lambda\} + B_\delta} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda - \gamma)\, d\gamma = \int_{\{\lambda\} + B_\delta} b(\lambda)\, f(\gamma - \lambda)\, d\gamma \, +$$

$$+ \int_{\{\lambda\} + B_\delta} b(\lambda)\, f(\gamma - \lambda)\, (\hat{a}(\lambda - \gamma) - 1)\, d\gamma = b(\lambda) + L_\lambda \tag{5.8.}$$

D'après la condition 5.3.,

$$|L_\lambda| = \left|\int_{\{\lambda\}+B_\delta} b(\lambda) f(\gamma - \lambda)(\hat{a}(\lambda - \gamma) - 1)\, d\gamma\right| \leq \sup_{\gamma \in B_\delta} |\hat{a}(\gamma) - 1| \leq$$

$$\leq \sup_{\gamma \in B_\delta,\, x \in K} |(x, \gamma) - 1| \leq \alpha \quad (5.9.)$$

D'après les conditions (5.6.), (5.7.), (5.8.) et (5.9.),

$$|\hat{\nu}(\lambda) - b(\lambda)| \leq 3\,\alpha \leq 1/2$$

si $\alpha = 1/6$, ce qui conclut la démonstration.

Lorsque G n'est pas connexe, nous ne pouvons pas espérer étendre le théorème 5.1. à tout ensemble de Sidon de $\Gamma$. En effet, si $\Lambda$ a une infinité d'éléments dans l'orthogonal de la composante connexe de l'origine dans G, alors aucun voisinage compact et connexe de l'origine de G ne peut-être associé à $\Lambda$ au sens large. Cette remarque sera illustrée par le théorème 5.2.

DEFINITION 5.3. – *Le sous-ensemble* $\Lambda$ *d'un groupe abélien localement compact* $\Gamma$ *est un ensemble de Sidon de première espèce s'il existe une constante* C, *ne dépendant que de* $\Lambda$, *telle que pour tout compact* K *d'intérieur non vide du dual* G *de* $\Gamma$ *le couple* (K, C) *soit associé à* $\Lambda$ au sens large.

Si $\Lambda$ est un ensemble de Sidon de première espèce le pas de $\Lambda$ tend vers l'infini.

THEOREME 5.2. – *Supposons que* G *est un groupe compact métrisable dont tous les éléments sont de même ordre p, p premier. Soit* $\Lambda$ *un ensemble de Sidon de* $\Gamma$. *Tout compact d'intérieur non vide de* G *est associé à* $\Lambda$ *au sens large si et seulement si le pas de* $\Lambda$ *tend vers l'infini, et dans ce cas* $\Lambda$ *est un ensemble de Sidon de première espèce.*

*Démonstration.* – La condition sur le pas de $\Lambda$ est suffisante d'après le théorème 5.1. Le fait que $\Lambda$ soit alors un ensemble de Sidon de première espèce découle de ([3], théorème 2), et du résultat suivant : tout ensemble de Sidon de $\Gamma$ est une réunion finie d'ensembles indépendants ([7], p. 576).

Supposons maintenant que le pas de $\Lambda$ ne tend pas vers l'infini. Il existe alors deux suites infinies $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ et $(\lambda'_j)_{j\geq 1}$ de points de $\Lambda$ telles que $\lambda_j - \lambda'_j = \lambda_0 \in \Gamma$. Si K est un voisinage compact de l'origine dans G contenu dans le noyau de $\lambda_0$, alors K n'est associé à aucune partie de $\Lambda$ dont le complémentaire est fini, car

$$\sup_{x\in K} |(x, \lambda_j) - (x, \lambda'_j)| = 0 \quad , \quad \sup_{x\in G} |(x, \lambda_j) - (x, \lambda'_j)| \geq \sqrt{2} \quad (j \geq 1)$$

## 6. Compacts associés à un ensemble de Sidon.

Nous rappelons que G et $\Gamma$ désignent deux groupes abéliens localement compacts en dualité, $\Gamma$ étant métrisable. Nous allons établir, sous l'hypothèse que G est connexe, que tout compact d'intérieur non vide de G est associé à tout ensemble de Sidon de $\Gamma$.

Les deux lemmes qui suivent établissent, pour tout ensemble de Sidon de $\Gamma$, une "décomposition par blocs" d'un nombre fini d'éléments. Cette décomposition était connue dans certains cas particuliers d'ensembles de Sidon de nombres réels ([21], [6]).

LEMME 6.1. – *Soit $\Lambda$ un ensemble de Sidon dans $\Gamma$. Il existe un entier positif m (ne dépendant que de $\Lambda$) tel que, pour tout compact* F *de $\Gamma$, il existe une partie finie $\Lambda'$ de $\Lambda$ telle que* $(\gamma + F) \cap (\Lambda \setminus \Lambda')$ *ait au plus m éléments, pour tout $\gamma$ dans $\Gamma$.*

*Démonstration.* – Supposons que pour tout entier positif $m$, il existe un compact F dans $\Gamma$ tel que, pour toute partie finie $\Lambda'$ de $\Lambda$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que l'ensemble $E = (\gamma' + F) \cap (\Lambda \setminus \Lambda')$ ait au moins m éléments. Remarquons que l'ensemble E est fini, car $\Lambda$ a un pas positif (définition 1.4.). Nous pouvons alors définir par récurrence une suite $(\gamma_j)_{j\geq 1}$ de points de $\Gamma$ et une suite $(E_j)_{j\geq 1}$ de parties finies de $\Lambda$ deux à deux disjointes qui sont de la forme

$$E_j = \{\gamma_j + \gamma_j^1, \ldots, \gamma_j + \gamma_j^m ; \gamma_j^i \in F \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

Pour tout $i$ tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, la suite $(\gamma_j^i)_{j\geq 1}$ de points du compact F possède une sous-suite convergente dont la limite $\gamma^i$ appartient à F. Pour tout $\delta > 0$ on peut donc par un procédé diagonal déterminer une suite croissante $(j_s)_{s\geqslant 1}$ et $\gamma^1, \ldots, \gamma^m$ dans F tels que $|\gamma^i_{j_s} - \gamma^i| < \delta$ pour $s \geqslant 1$ et $1 \leqslant i \leqslant m$. Remarquons que le pas de $\Lambda$ étant positif, les points $\gamma^1, \ldots, \gamma^m$ sont deux à deux distincts. Considérons l'ensemble :

$$\Lambda'' = \Big(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} \{\gamma_{j_s} + \gamma^i,\ s \geqslant 1\}\Big) \cup (\Lambda\setminus\Lambda_0),$$

où
$$\Lambda_0 = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant m} \{\gamma_{j_s} + \gamma^i_{j_s},\ s \geq 1\}.$$

L'ensemble $\Lambda''$ est $B_\delta$-voisin de $\Lambda$ (définition 1.5.) donc $\Lambda_2$ est un ensemble de Sidon avec constante 2C, si $\Lambda$ est un ensemble de Sidon avec constante C et si $\delta$ est choisi assez petit (proposition 1.2.). Or $\Lambda''$ contient $m^2$ éléments de la maille

$$\Big\{\sum_{1\leq i\leq m} \varepsilon_i \gamma_{j_i} + \sum_{1\leq i\leq m} \varepsilon'_i \gamma^i,\ \sum_{1\leq i\leq m} |\varepsilon_i| + \sum_{1\leq i\leq m} |\varepsilon'_i| \leq 2\Big\}.$$

D'après le théorème 1.3., on doit alors avoir $m^2 \leq 2(32\ \mathrm{C})^2 m$, ce qui est impossible pour tout entier $m > 2(32\ \mathrm{C})^2$

LEMME 6.2. – *Soit* $\Lambda$ *un ensemble de Sidon et m un entier positif satisfaisant au lemme 6.1. Soit F une partie compacte et symétrique* $(-\mathrm{F} = \mathrm{F})$ *de* $\Gamma$ *telle que* $0 \in \mathrm{F}$. *On peut écrire* $\Lambda$ *sous la forme* $\Lambda_0 \cup (\bigcup_{i\in \mathrm{I}} \Lambda_i)$, où $\Lambda_0$ *est un ensemble fini ; chaque* $\Lambda_i$ *est un ensemble fini ayant au maximum m éléments ; pour i et i' dans* I, $i \neq i'$, $\lambda - \lambda' \notin \mathrm{F}$ *si* $\lambda \in \Lambda_i$ *et* $\lambda' \in \Lambda_{i'}$.

*Démonstration.* – Considérons la partie finie $\Lambda_0$ de $\Lambda$ telle que la propriété énoncée dans le lemme 6.1. soit vérifiée, F étant remplacé par mF. Appelons F-chaîne toute suite finie $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de points de $\Gamma$ deux à deux distincts tels que $\lambda_{j+1} - \lambda_j \in \mathrm{F}$ pour $1 \leqslant j \leqslant p-1$. Toute F-chaîne de points de $\Lambda\setminus\Lambda_0$ a au maximum m éléments. En effet, soit $\lambda_1 \ldots, \lambda_p$ une telle F-chaîne, si $p > m$ alors

$$\mathrm{card}\ \{(\lambda_1 + m\mathrm{F}) \cap (\Lambda\setminus\Lambda_0)\} > m,$$

ce qui contredit le lemme 6.1. Définissons la relation $\mathcal{R}$ suivante entre éléments de $\Lambda\setminus\Lambda_0$ : $\lambda\ \mathcal{R}\ \lambda'$ s'il existe une F-chaîne $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$

d'éléments de $\Lambda \setminus \Lambda_0$ telle que $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_p = \lambda'$. On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que chaque classe d'équivalence suivant $\mathcal{R}$ est finie et a au maximum m éléments. On en déduit aisément le lemme 6.2.

COROLLAIRE.– *Tout ensemble de Sidon de* $\Gamma$ *est une réunion finie d'ensembles de Sidon dont le pas tend vers l'infini, lorsque* G *est métrisable.*

Le lemme 6.3. est la généralisation, pour un groupe G connexe et dénombrable à l'infini, d'un résultat de A. Zygmund établi pour G = T ou **R** [21]. L'hypothèse de connexité est essentielle, on l'utilisera à travers le résultat suivant : tout polynôme sur un groupe connexe s'annule sur un ensemble qui est de mesure nulle ([1], p. 79). La démonstration du lemme 6.3. suit celle de [21].

LEMME 6.3. – *Supposons* G *connexe. Soit m un entier positif,* K ⊂ G *un ensemble de mesure de Haar positive et a une fonction de* $L^1(G)$, *à support dans* K, *positive et non nulle. Pour tout* $\delta > 0$ *il existe* $\varepsilon = \varepsilon(K, a, m, \delta)$ *tel que pour tout polynôme trigonométrique* $\sum_{1 \leq i \leq m} c_i(x, \gamma_i)$ *tel que* $|\gamma_i - \gamma_j| \geqslant \delta$ *pour* $1 \leqslant i,j \leqslant m$, $i \neq j$,

$$\int_K \Big| \sum_{1 \leq i \leq m} c_i(x, \gamma_i) \Big|^2 a(x)\, dx \geqslant \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq m} |c_i|^2 \qquad (6.1.)$$

LEMME 6.4. – *Soient* G, *m*, K, *a et* $\delta$ *comme dans le lemme 6.3. Soit* E *l'ensemble de matrices carrées de la forme*

$$H = [\hat{a}(\gamma_i - \gamma_j)]_{1 \leq i,j \leq k} \qquad (6.2.)$$

*où* $2 \leq k \leq m$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ *sont des éléments de* $\Gamma$ *tels que* $|\gamma_i - \gamma_j| \geq \delta$ pour $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. *Alors il existe* $M = M(K, a, m, \delta) > 0$ *tel que det* $H \geqslant M$ *pour tout* H *dans* E.

*Démonstration.* – La fonction $\hat{a}$ étant définie positive toute matrice H donnée par (6.2.) est hermitienne. H a donc k valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et det $H = \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Le lemme 6.3. permet de déterminer une minoration uniforme de ces valeurs propres. En effet, soit $Y = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbf{C}^k$, posons $P(x) = \sum_{1 \leq i \leq m} c_i(x, \gamma_i)$. Alors

$$\overline{Y}\ H\ {}^tY = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \overline{c}_i\, c_j\, \hat{a}(\gamma_i - \gamma_j) = \sum \overline{c}_i\, \widehat{\mathrm{Pa}}(\gamma_i) =$$

$$= \int_G |P(x)|^2\ a(x)\, dx \geqslant \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq k} |c_i|^2$$

En particulier si $\lambda$ est une valeur propre de H et Y un vecteur propre non nul associé, $\overline{Y}\ H\ {}^tY = \lambda \sum_{1 \leq i \leq k} |c_i|^2$, d'où $\lambda \geqslant \varepsilon$. Si on pose $M = \min\{\varepsilon^2, \varepsilon^m\}$, on a $\det H \geq M$.

THÉORÈME 6.1. – *Supposons* G *connexe. Soit* $\Lambda$ *un ensemble de Sidon dans* $\Gamma$. *Alors tout compact* K *d'intérieur non vide de* G *est associé à* $\Lambda$ *au sens large.*

*Démonstration.* – Nous reprenons les notations du théorème 5.1. La preuve du théorème 6.1. diffère de celle du théorème 5.1. dans le choix de $\Lambda_K$ et de la mesure $\mu \in M(G)$ telle que $\nu = a\mu$ satisfasse 5.2.

Déterminons $\Lambda_K$. Soit $\Lambda_0 \cup (\bigcup_{i \in I} \Lambda_i)$ la décomposition de $\Lambda$ fournie par le lemme 6.2., relative à $m$ et à la partie compacte et symétrique $F + B_\delta$ de $\Gamma$, où F satisfait (5.5.). On pose $\Lambda_K = \Lambda_0$.

Soit $b$ une fonction définie sur $\Lambda \setminus \Lambda_0$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Pour déterminer $\mu$, nous allons d'abord construire une fonction bornée $c$ sur $\Lambda$ de la façon suivante. Soit $i \in I$ tel que $\Lambda_i$ n'a qu'un élément $\lambda$, on pose alors $c(\lambda) = b(\lambda)$. Soit $i \in I$ tel que

$$\Lambda_i = \{\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}\}\ ,\quad 2 \leq k \leq m\ ;$$

on considère le système linéaire

$$\sum_{1 \leq s \leq k} x_s\, \hat{a}(\lambda_{i_r} - \lambda_{i_s}) = b(\lambda_{i_r}) \qquad (1 \leq r \leq k).$$

D'après le lemme 6.4. le déterminant de ce système linéaire est supérieur ou égal à M, donc il y a une solution unique $(x_1, \ldots, x_k)$ satisfaisant à

$$|x_s| \leqslant m\,!\ \ \mathrm{M}^{-1} \qquad (1 \leq s \leq k)$$

On pose alors $c(\lambda_{i_s}) = x_s$ pour $1 \leqslant s \leqslant k$. La fonction $c$ ainsi définie sur $\Lambda$ satisfait à

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |c(\lambda)| \leq \max \{1\ , m\,!\ \mathrm{M}^{-1}\} = \mathrm{A}.$$

D'après le corollaire 3.1., il existe une mesure $\mu \in M(G)$ telle que :

$$\|\mu\| \leqslant 2\,\mathrm{C}'^4\,(2\mathrm{C}'\,|\mathrm{B}_{\delta/2}|^{-3}\ \mathrm{A}^3\ \beta^{-1})^{1/2}$$

$$\hat{\mu}(\gamma) = c(\lambda) f(\gamma - \lambda) \qquad (\gamma \in \Lambda + \mathrm{B}_\delta) \qquad (6.3.)$$

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \beta \qquad (\gamma \in \Gamma\ ,\ d(\gamma\ , \Lambda) > \delta) \qquad (6.4.)$$

où $\delta$ satisfait (5.3.), $f$ et $\beta$ satisfont (5.4.).

Posons $\nu = a\mu$, alors $\|\nu\| \leq \mathrm{D}(\Lambda\ , \mathrm{K})$. Evaluons $\hat{\nu}(\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{\mathrm{K}}$, par exemple

$$\lambda = \lambda_{i_r} \in \Lambda_i = \{\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}\} \qquad (1 \leq k \leq m)\ :$$

$$\hat{\nu}(\lambda_{i_r}) = \int_\Gamma \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda_{i_r} - \gamma)\, d\gamma = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3$$

où

$$\mathrm{I}_1 = \sum_{1 \leq s \leq k} \int_{\{\lambda_{i_s}\} + \mathrm{B}_\delta} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda_{i_r} - \gamma)\, d\gamma$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\mathrm{J}_r} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda_{i_r} - \gamma)\, d\gamma$$

avec $\mathrm{J}_r = \{\gamma \in \{\lambda_{i_r}\} + \mathrm{F},\ d(\gamma\ , \Lambda_i) > \delta\}$, et

$$\mathrm{I}_3 = \int_{\mathrm{J}'_r} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda_{i_r} - \gamma)\, d\gamma$$

avec $\mathrm{J}'_r = \Gamma \setminus \Big\{ \mathrm{J}_r \cup \Big( \bigcup_{1 \leqslant s \leqslant k} (\{\lambda_{i_s}\} + \mathrm{B}_\delta) \Big) \Big\}.$

Les intégrales $I_2$ et $I_3$ s'évaluent comme dans (5.6.) et (5.7.), d'où

$$|I_2| \leq \alpha \quad , \quad |I_3| \leq \alpha\, A.$$

L'intégrale $I_1$ s'écrit $I_1' + I_1''$, où

$$I_1' = \sum_{1 \leq s \leq k} \int_{\{\lambda_{i_s}\} + B_\delta} \hat{\mu}(\gamma)\, \hat{a}(\lambda_{i_r} - \lambda_{i_s})\, d\gamma \quad , \quad I_1'' = I_1 - I_1'$$

D'après la condition (6.3.) et le choix de $c$,

$$I_1' = \sum_{1 \leqslant s \leqslant k} c(\lambda_{i_s})\, \hat{a}(\lambda_{i_r} - \lambda_{i_s}) \int_{\{\lambda_{i_s}\} + B_\delta} f(\gamma - \lambda_{i_s})\, d\gamma = b(\lambda_{i_r})$$

D'après les conditions (6.3.) et (5.3.),

$$|I_1''| \leq A \sum_{1 \leq s \leq k} \sup_{\gamma \in \{\lambda_{i_s}\} + B_\delta} |\hat{a}(\lambda_{i_r} - \gamma) - \hat{a}(\lambda_{i_r} - \lambda_{i_s})| \leq$$

$$\leq k\, A \sup_{\gamma \in B_\delta} (\sup_{x \in K} |(x\,,\gamma) - 1|) \leq \alpha\, m\, A$$

Finalement,

$$|\hat{\nu}(\lambda_{i_r}) - b(\lambda_{i_r})| \leq |I_1 - b(\lambda_{i_r})| + |I_2| + |I_3| \leq \alpha(1 + (m+1)\, A) \leq 1/2$$

si on choisit $\alpha \leqslant (2 + 2(m + 1)\, A)^{-1}$, ce qui conclut la démonstration.

Montrons qu'il est superflu d'exclure une partie finie de l'ensemble de Sidon $\Lambda$ pour qu'un compact d'intérieur non vide lui soit associé.

THÉORÈME 6.1. bis. — *Supposons* G *connexe. Tout compact de* G *d'intérieur non vide est associé à tout ensemble de Sidon de* $\Gamma$.

Nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration s'inspire d'une étude analogue faite dans ([1], p. 77) :

LEMME 6.5. — *Supposons* G *connexe. Si le sous-ensemble* $\Lambda$ *de* $\Gamma$ *est associé à un compact* K *de* G, *pour tout voisinage de l'origine* W *dans* G *et pour tout* $\lambda_1$ *dans* $\Gamma$, $\Lambda \cup \{\lambda_1\}$ *est associé à* K + W.

*Démonstration.* – Pour toute partie X de $\Gamma$, notons $C_X(G)$ (resp. $C_X(K)$) l'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur G (resp. sur le compact K de G) de l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques à spectre dans X. On démontre facilement d'après le théorème de Banach ([18], p. 258) que l'application restriction de $C_X(G)$ dans $C_X(K)$ est un isomorphisme si et seulement si X est associé à K.

Si $\Lambda$ est associé à K, a fortiori $\Lambda$ est associé à K + W et l'application restriction de $C_\Lambda(G)$ dans $C_\Lambda(K + W)$ est un isomorphisme. Excluons le cas trivial où $\lambda_1$ appartient à $\Lambda$. Alors $C_{\Lambda \cup \{\lambda_1\}}(G)$ est somme directe topologique de ses sous-espaces fermés $C_\Lambda(G)$ et $C_{\{\lambda_1\}}(G)$. Pour montrer que $\Lambda \cup \{\lambda_1\}$ est associé à K + W, il suffit donc de vérifier que $C_{\Lambda \cup \{\lambda_1\}}(K + W)$ est somme directe topologique de ses sous-espaces fermés $C_\Lambda(K + W)$ et $C_{\{\lambda_1\}}(K + W)$. Ceci est réalisé si le caractère $\lambda_1$ n'appartient pas à $C_\Lambda(K + W)$. Supposons, par absurde, que $\lambda_1 \in C_\Lambda(K + W)$. Vu que $\Lambda$ est associé à K + W, il existe $g$ dans $C_\Lambda(G)$, $g \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda(x, \lambda)$, telle que pour tout $x$ dans K + W,

$$g(x) = (x, \lambda_1), \tag{6.5.}$$

Or, pour tout $h$ fixé dans W,

$$g_h(x) = g(x + h) - (h, \lambda_1) g(x)$$

appartient à $C_\Lambda(G)$ et est nulle sur K ; comme $\Lambda$ est associé à K, $g_h \equiv 0$. Par conséquent, pour tout $\lambda$ dans $\Lambda$ et $h$ dans W,

$$c_\lambda [(h, \lambda) - (h, \lambda_1)] = 0$$

G étant connexe, un caractère non nul ne peut pas être égal à 1 sur un ouvert non vide. Alors $c_\lambda = 0$ pour tout $\lambda$ dans $\Lambda$ et $g \equiv 0$, ce qui contredit (6.5.).

*Démonstration du théorème 6.1. bis.* Soit $\Lambda$ un ensemble de Sidon de $\Gamma$ et K un compact d'intérieur non vide de G. On peut supposer que K est un voisinage de l'origine dans G ; soit alors V un voisinage compact de l'origine tel que $V + V \subset K$. D'après le théorème 6.1. il existe une partie finie $\Lambda_V$ de $\Lambda$ telle que V soit associé à $\Lambda \setminus \Lambda_V$. Soit W un voisinage de l'origine dans G tel que $p\, W \subset V$, où $p$ est le nombre d'éléments de $\Lambda_V$. D'après le lemme 6.5., $V + pW$ est associé à $\Lambda$.

*Remarque 6.1.* – On pourrait se demander si le fait d'être associé à tout compact d'intérieur non vide de G est caractéristique des ensembles de Sidon. La réponse est négative et l'ensemble

$$P = \bigcup_{n \geq 1} [(19)^n \, n \, ! \, \{1, \ldots, n\}]$$

de P. Rosenthal fournit un contre-exemple ([7], p. 442).

*Remarque 6.2.* – A. Bonami démontre [2] que si G est connexe, tout compact K de mesure positive de G est associé à tout ensemble de Sidon $\Lambda$ de $\Gamma$ au sens de $L^2(G)$, c'est-à-dire : il existe une constante $\eta$ telle que pour tout polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda (x, \lambda)$$

on ait

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2 \leq \eta \int_E |P(x)|^2 \, dx$$

Mais le théorème 6.1. (resp. 6.1. bis) ne peut pas s'étendre à tout compact K de mesure positive ou à tout compact K de mesure suffisamment grande. En effet, soit $\Lambda = (\lambda_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de Sidon d'entiers et $(a_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que

$$\sum_{j \geq 1} |a_j|^2 < \infty \quad , \quad \sum_{j \geq 1} |a_j| = \infty. \tag{6.6.}$$

Alors la fonction $f(x) = \sum_{j \geq 1} a_j \, e^{i\lambda_j x}$ appartient à $L^2(T)$ et les sommes de Fejer de $f$ convergent presque partout vers $f$.

D'après le théorème d'Egoroff pour tout $\epsilon > 0$ il existe un sous-ensemble compact $K_\epsilon$ du cercle, de mesure supérieure à $1 - \epsilon$, et tel que les sommes de Fejer de $f$ convergent uniformément vers $f$ sur $K_\epsilon$. Si $K_\epsilon$ était associé à $\Lambda$, alors $f$ aurait une série de Fourier absolument convergente, ce qui contredit (6.6).

D'autre part, on peut trouver des exemples de sous-ensembles compacts de R, d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue nulle, qui sont associés à une suite de Hadamard de nombres réels [9].

## BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BONAMI, Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$. Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay, 1970.

[2] A. BONAMI, Communication orale.

[3] M. DECHAMPS-GONDIM, Compacts associés à un ensemble de Sidon. *Comptes-rendus,* t. 271, (1970), 590.

[4] M. DECHAMPS-GONDIM, Sur les ensembles de Sidon topologiques. *Comptes-rendus,* t. 271, (1970), 1247.

[5] S.W. DRURY, Sur les ensembles de Sidon. *Comptes-rendus,* t. 271, (1970), 162.

[6] V.F. GAPOSKIN, A question on the absolute convergence of lacunary series. *Izv. Akad.N.S.S.S.R., Ser. Mat.,* 31, (1967), 1271-1288.

[7] E. HEWITT and K. ROSS, Abstract Harmonic Analysis. Vol I, II. Springer Verlag, (1970).

[8] J.P. KAHANE, Sur les fonctions moyennes périodiques bornées. *Ann. Inst. Fourier,* 7, (1957), 293-314.

[9] J.P. KAHANE and H. HELSON, A Fourier method in diophantine problems. *J. Anal. Math* 15, (1965), 245-262.

[10] J.P. KAHANE, Séries de Fourier absolument convergentes, Springer-Verlag, 1970.

[11] J.F. MELA, Suites lacunaires de Sidon, ensembles propres et points exceptionnels, *Ann. Inst. Fourier,* 14, (1964), 533-538.

[12] J.F. MELA, Approximation diaphantienne et ensembles lacunaires, *Bull. Soc. Math. Fr.,* 19, (1969), 26-54.

[13] J.F. MELA, Sur certains ensembles exceptionnels en Analyse de Fourier, *Ann. Inst. Fourier,* 18, (1968), 31-71.

[14] J.F. MELA, Problèmes de pseudo-périodicité, à paraître.

[15] Y. MEYER, Elargissement des ensembles de Sidon sur la droite, *Sem. d'Anal. Harm. d'Orsay,* (1967-1968), exposé n° 2.

[16] Y. MEYER, Nombres de Pisot, Nombres de Salem et Analyse Harmonique, Springer Verlag, 117, (1970).

[17] Y. MEYER et J.P. SCHREIBER, Quelques fonctions moyennes périodiques non bornées, *Ann. Inst. Fourier,* 19, (1969), 231-236.

[18] W. RUDIN, Fourier Analysis on Groups, Inters. tr, (1962).

[19] N. VAROPOULOS, Some combinatorial problems in harmonic analysis. Summer School in Harm. Analysis, Warwick, (1968).

[20] A. ZYGMUND, Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles des puissances, *Studia Math.,* 3, (1931), 77-91.

[21] A. ZYGMUND, On a theoreme of Hadamard, *Ann. Soc. Polon. Math.,* 21, (1948), 52-69.

Manuscrit reçu le 14 juin 1971

Myriam DECHAMPS
Département de Mathématiques
Université de Paris XI
91 – ORSAY