ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE GARANÇON

Homotopie et holonomie de certains feuilletages de co-dimension 1

Annales de l'institut Fourier, tome 22, n° 2 (1972), p. 61-71

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_61_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 61-71.

HOMOTOPIE ET HOLONOMIE DE CERTAINS FEUILLETAGES DE CODIMENSION 1

par Maurice GARANÇON

1. Introduction.

Ce travail trouve son origine dans le chapitre v de l'article « Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes » ([2]) de A. Haefliger. Dans ce chapitre, l'auteur s'intéresse aux structures transversalement analytiques, de codimension 1, et démontre que dans ce cas : « Une transversale fermée, représente un élément d'ordre infini du groupe fondamental de l'espace muni d'un tel feuilletage ». On peut alors remarquer que la plus grande partie des théorèmes démontrés dans la suite, ne font appel à l'analycité, qu'à travers cette propriété des transversales fermées.

Dans ce travail nous étudions les variétés munies d'un feuilletage de codimension 1 et nous montrons que la propriété, pour les transversales fermées de représenter un élément d'ordre infini du groupe fondamental, peut s'énoncer à l'aide d'une relation entre l'holonomie et l'homotopie des feuilles (paragraphe 2).

L'intérêt de cette formulation, réside dans le fait que les feuilletages transversalement analytiques ne sont pas les seuls à satisfaire cette relation (paragraphe 3 et 4).

En terminant je veux remercier le Professeur M. W. Hirsch, pour l'intérêt qu'il a montré pour ce travail.

2. Feuilletages de codimension 1. Homotopie et holonomie.

Dans tout ce qui suit M sera une variété connexe, sans bord, de dimension $n \geqslant 3$, munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^r, $r \geqslant 2$, de codimension 1 et transversalement orientable.

Si F est une feuille de $\mathcal{F}$ nous appelons i_F l'inclusion $F \to M$, $\varphi_F : \pi_1(F, x) \to G_0$ une antireprésentation d'holonomie associée à F, où G_0 est le pseudo-groupe des germes de difféomorphismes de la droite réelle R, qui préservent l'origine.

Rappelons le résultat suivant qui est bien connu.

2.1. Proposition. — *Soit* $\tilde{M}$ *un revêtement connexe de* M *avec* $p : \tilde{M} \to M$ *pour projection de revêtement. L'image réciproque* $\tilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ *du feuilletage* $\mathcal{F}$ *de* M *est alors un feuilletage de* $\tilde{M}$ *dont les feuilles sont des revêtements des feuilles de* $\mathcal{F}$.

2.2. Lemme. — *Soient* F *une feuille de* $\mathcal{F}$, *et*

$$C : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \to M$$

une transversale de $\mathcal{F}$ *telle que* $C(0) = x$, $C(1) = y$, *avec* x *et* y *deux points de* F. Si $f : [0, 1] \to F \subset M$ *est une courbe dans* F *telle que* $f(0) = y$ et $f(1) = x$, *alors il existe une transversale fermée passant par* y *et homotope au lacet* $\overline{C}_* f$ *basé en* y. (Ici $\overline{C} = C|[0,1]$.)

Preuve. — (Cf. [2] p. 322.) Prolongeons d'abord f par une application $g : [0, 1] \times [0,1] \to M$ telle que :

i) $g(t, u)$ est, pour u fixe, contenu dans une seule feuille.

ii) $g(t, 0) = f(t)$.

iii) $g(t, u)$ est, pour t fixe, une transversale C_t homéomorphe a $[0,1]$.

iv) C_0 et C_1 sont situées sur C et sans point commun.

Lorsque u croît de 0 à 1, $g(0, u)$ et $g(1, u)$ décrivent C_0 et C_1 dans le même sens par rapport à C (par exemple celui de x à y), ceci parce que le feuilletage est supposé orienté. On définit alors une courbe $h: [0, 2] \to M$ par

$$h(s) = \begin{cases} g(s, (2\varepsilon' - 1)s + 1 - \varepsilon') & \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ C'(s) & \text{si} \quad 1 \leqslant s \leqslant 2 \end{cases}$$

où $C'(s)$ est une reparamétrisation de C entre $g(0,1 - \varepsilon')$ et $g(1, \varepsilon')$, et où ε' est arbitrairement petit $\left(0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}\right)$.

h est un lacet transverse à $\mathcal{F}$, basé en y, avec des angles en $g(0,1 - \varepsilon')$ et $g(1, \varepsilon')$. Il est facile de construire à l'aide de g, une homotopie entre h et $\overline{C}_* f$, et en arrondissant les angles de h on obtient la transversale fermée différentiable recherchée.

2.3. Lemme. — *Soit* $C: [0,1] \to F$, $C(0) = C(1) = x$, *un lacet dans une feuille* F, *qui représente un élément non nul de l'holonomie de* F, *alors il existe une transversale fermée* γ *telle que* $C \cup \gamma$ *borde un cylindre dans* M.

Preuve. — Considérons $h: [0,1] \times [0,1] \to M$ une application telle que :

i) $h(t, 0) = C(t)$.

ii) $h(t, s)$, t fixe, est un morceau de transversale.

iii) $h(t, s)$, s fixe, est contenu dans une feuille.

iv) $h(0, s)$ et $h(1, s)$ décrivent une même transversale, disons T, et dans le même sens, puisque $\mathcal{F}$ est transversalement orientable.

L'application $\emptyset: T \to T$ donnée par $\emptyset(h(0, s)) = h(1, s)$ est un difféomorphisme local qui réalise l'élément du pseudogroupe d'holonomie de F associé à C, ([3]), comme celui-ci est non trivial, il existe un s tel que $h(1, s) \neq h(0, s)$; supposons par exemple que $h(1, s) = h(0, s')$ avec $s' > s$, alors la droite L joignant $(0, s')$ à $(1, s)$, dans $[0,1] \times [0,1]$, est envoyée par h sur une transversale fermée γ qui borde avec C un cylindre, image par h de la partie de $[0,1] \times [0,1]$

située entre L et $[0,1] \times \{0\}$ (voir fig. 1). On arrondit l'angle de γ, si nécessaire, et on a le résultat.

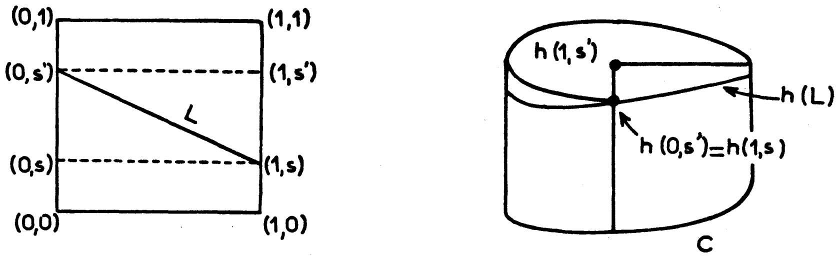

Fig. 1

Nous procédons maintenant à la démonstration du théorème fondamental de ce travail.

2.4. Théorème. — *Toute transversale fermée de* $\mathscr{F}$ *représente un élément d'ordre infini du groupe fondamental de* M *si et seulement si la relation*

(A) $$\operatorname{Ker} (i_F)_* \subseteq \operatorname{Ker} \varphi_F$$

est vérifiée pour toute feuille F *de* $\mathscr{F}$.

Preuve. — Si $\varphi : S^1 \to M$ représente une transversale fermée homotope à l'application constante, nous reprenons l'argument de [2]; on peut construire une extension $\bar{\varphi} : D^2 \to M$, au disque D^2, de telle sorte que :

i) $\bar{\varphi}$ soit une immersion en position générale par rapport au feuilletage $\mathscr{F}$.

ii) le feuilletage induit $\bar{\varphi}^{-1}(\mathscr{F})$, sur D^2, possède des singularités isolées, dont deux ne sont pas sur une même feuille.

On démontre alors, en [3], que sur D^2 le feuilletage $\bar{\varphi}^{-1}(\mathscr{F})$ possède un cycle limite minimal, c'est-à-dire une courbe close C, telle que $\bar{\varphi}(C)$ est contenue dans une feuille F, représente un élément d'ordre infini de l'holonomie de F, mais représente zéro pour l'homotopie de M.

Inversement si une courbe C sur une feuille F représente un élément non trivial de l'holonomie de F, par le lemme 2.3, elle borde un cylindre avec une transversale fermée γ.

Donc si C est homotope au lacet constant dans M, il en est de même de γ.

Remarque. — La condition (A) est satisfaite par :

i) les feuilletages transversalement analytiques (voir [2]), et en particulier les feuilletages sans holonomie,

ii) les feuilletages tels que $(i_F)_*$ est injectif pour toute feuille F. (Voir [1] pour un exemple de tels feuilletages.)

2.5. Corollaire. — *Si* M *munie de* $\mathcal{F}$ *satisfait la condition* (A), Ker φ_F *contient tous les éléments d'ordre fini de* $\pi_1(F)$.

Preuve. — Soit C un lacet sur une feuille F, représentant un élément de $\pi_1(F)$, qui n'est pas dans Ker φ_F. D'après le lemme 2.3 la courbe C borde un cylindre avec une transversale fermée, donc représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(M)$, et à fortiori de $\pi_1(F)$.

En prouvant le corollaire 2.5 nous avons également prouvé :

2.6. Corollaire. — *Si* M *satisfait la condition* (A), *les éléments d'ordre fini de* $(i_F)_*(\pi_1(F))$ *sont tous dans* $(i_F)_*(\mathrm{Ker}\ \varphi_F)$.

2.7. Corollaire. — *Si* M *munie de* $\mathcal{F}$ *satisfait la condition* (A), *tout revêtement* $\tilde{M}$, *muni de* $\tilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ *satisfait la condition* (A).

Preuve. — Si $\tilde{M}$ ne satisfait pas la condition (A), il existe une transversale fermée à $\tilde{\mathcal{F}}$ homotope au lacet constant, cette transversale se projette par p, sur une transversale fermée à $\mathcal{F}$, homotope au lacet constant.

2.8. Théorème. — *Si* M *satisfait la condition* (A) *et si* $\pi_1(M)$ *ne contient que des éléments d'ordre fini alors :*

i) *toute feuille est fermée,*

ii) *le feuilletage est sans holonomie,*

iii) M *n'est pas compacte.*

Preuve. — (Cf. [2].)

i) Si une feuille n'est pas fermée, il existe une transversale qui la coupe en deux points. Le lemme 2.2 permet alors de construire une transversale fermée, ce qui contredit l'hypothèse sur $\pi_1(M)$.

ii) Supposons qu'il existe un lacet C, sur une feuille F, qui représente un élément non trivial de l'holonomie. D'après le lemme 2.3, C borde un cylindre avec une transversale fermée. C'est une contradiction.

iii) Il est bien connu que si M est compacte il existe une transversale fermée.

Remarque. — La preuve de i) montre, de plus, qu'une transversale coupe une feuille en un point au plus.

2.9. Théorème. — *Si* M *munie de* $\mathcal{F}$ *satisfait la condition* (A), *et si* $\pi_1(M)$ *possède un sous-groupe cyclique d'indice fini, alors :*

i) *toute transversale fermée coupe une feuille en un nombre fini de points au plus,*

ii) *toute feuille est propre, en particulier il n'y a pas de feuille partout dense,*

iii) *il existe au moins une feuille fermée,*

iv) *si M est compact, il existe une feuille compacte.*

Preuve. — Soit $p : \tilde{M} \to M$, le revêtement universel de M et $\tilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ le feuilletage induit sur $\tilde{M}$. D'après 2.7, $\tilde{M}$ munie de $\tilde{\mathcal{F}}$ satisfait la condition (A). On en conclut, en appliquant le théorème 2.8 et la remarque qui le suit, que dans $\tilde{M}$ une transversale rencontre une feuille en un point au plus.

Considérons dans M, une transversale fermée T, qui coupe une feuille F au point x. T représente un élément α, d'ordre infini de $\pi_1(M, x)$. Appelons G_α le sous-groupe de $\pi_1(M, x)$, engendré par α ; c'est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(M, x)$. Ainsi $p^{-1}(T)$ se compose d'un nombre fini de transversales, de $\tilde{\mathcal{F}}$, disons $T_1, \ldots, T_r$. Soit $\tilde{F}$ une feuille couvrant F, chaque T_i coupe $\tilde{F}$ en un point au plus et donc T rencontre F en r points au plus. Ceci prouve i).

Pour prouver ii), rappelons qu'une feuille est propre s'il existe une transversale qui la coupe en un seul point. Considérons T une transversale qui coupe une feuille F en x. Si T recoupe F en y, on joint x et y par une courbe quelconque, dans F. Par 2.2 il existe une transversale fermée S coupant F en y. D'après i) S coupe F en un nombre fini de points, et y est donc un point isolé de cette intersection. Un voisinage ouvert de y dans S, rencontrant F en y seulement, constituera la transversale cherchée. Ceci prouve ii).

Il est bien connu que ii) implique iii) ([2], [5]). Que iii) implique iv) est trivial.

2.10. Corollaire. — *Soit* M *une variété compacte et connexe de dimension* 3, *dont le groupe fondamental* $\pi_1(M)$ *contient un sous-groupe cyclique d'indice fini. Alors tout feuilletage de codimension* 1, *sur* M, *possède une feuille compacte.*

Preuve. — On peut, en passant à un revêtement à deux feuillets convenable, supposer le feuilletage transversalement orientable. Si le feuilletage satisfait la condition (A), nos hypothèses et le théorème 2.9 impliquent l'existence d'une feuille compacte. D'un autre côté, si le feuilletage ne satisfait pas la condition (A), c'est-à-dire s'il existe une transversale fermée homotope à zéro dans M, on peut appliquer les résultats de S. P. Novikov (Voir A. Haefliger : Travaux de Novikov sur les feuilletages. Exposé 339, Séminaire Bourbaki, 1967/1968.) D'après ces résultats, l'existence d'une transversale fermée homotope à zéro implique l'existence d'un cycle évanouissant; et en dimension 3, l'existence d'un tel cycle sur une feuille, implique la compacité de cette feuille.

2.11. Proposition. — *S'il existe une transversale fermée de* $\mathcal{F}$ *et un lacet dans une feuille, qui représentent des éléments d'un sous-groupe de* $\pi_1(M, x)$ *engendré par un seul élément* α, *alors il existe une transversale fermée homotope au lacet constant dans* M.

Preuve. — Soient C_1 une transversale fermée passant par x, et C_2 un lacet sur F_x basé au point x, qui représentent le même élément de $\pi_1(M, x)$. Une construction analogue à celle du lemme 2.2 (avec $x = y$) montre qu'il existe une transversale fermée passant par x, et homotope au lacet

$C_{2*}C_1^{-1}$. Comme d'autre part ce lacet est homotope au lacet constant, la proposition est prouvée.

Si α est un lacet dans M, passant par x, nous désignerons par G_α le sous-groupe de $\pi_1(M, x)$ engendré par la classe d'homotopie de α.

2.12. Proposition. — *Si* M *munie de* $\mathcal{F}$ *satisfait la condition* (A), *alors toute feuille* F *coupée, en* x, *par une transversale fermée* α *satisfait à la condition :*

$$(i_F)_*(\pi_1(F, x)) \cap G_\alpha = \{e\}.$$

Preuve. — Si γ est un élément de $(i_F)_*(\pi_1(F, x)) \cap G_\alpha$ on peut le représenter par un lacet sur F, au point x, et aussi par une transversale fermée, au point x. La proposition 2.11 implique alors l'existence d'une transversale fermée nulle homotope, ce qui contredit (A).

2.13. Théorème. — *Soit* M *une variété feuilletée, satisfaisant la condition* (A), *et telle que* $\pi_1(M)$ *contienne un sous-groupe cyclique d'indice fini, alors toute feuille coupée par une transversale fermée est sans holonomie. En particulier toute feuille dont l'holonomie est non triviale est fermée.*

Preuve. — Soit α une transversale fermée, G_α le sous-groupe engendré par la classe de α dans $\pi_1(M, x)$. Soit F la feuille coupée par α au point x. Si un élément β de $\pi_1(F, x)$ n'est pas dans Ker φ_F, il représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(F, x)$ et $(i_F)_*(\beta)$ représente un élément d'ordre infini de $\pi_1(M, x)$, en vertu des corollaires 2.5 et 2.6. D'après l'hypothèse faite sur le groupe $\pi_1(M)$, il y a un entier k tel que $(i_F)_*(\beta^k)$ soit dans G_α ; la proposition 2.12 dit alors que $(i_F)_*(\beta^k) = 0$. C'est une contradiction, β est donc dans Ker φ_F, et ainsi $\varphi_F = 0$.

Si F n'est pas fermée, il existe une transversale qui la coupe en deux points. Le lemme 2.2 permet alors de construire une transversale fermée qui coupe F. Le résultat s'en suit.

2.14. Corollaire. — *Avec les hypothèses du théorème* 2.13, *s'il existe une transversale fermée coupant toutes les feuilles, le feuilletage est sans holonomie. De plus le groupe* $(i_F)_*(\pi_1(F))$

est un groupe $G(\mathcal{F})$ *indépendant de la feuille* F, *et on a une suite exacte :*

$$0 \to G(\mathcal{F}) \to \pi_1(M) \to Z \to 0.$$

Preuve. — Le feuilletage n'a pas d'holonomie par le théorème 2.13 et la seconde partie résulte de [4].

2.15. Corollaire. — *Avec les mêmes hypothèses que dans le corollaire précédent, si* M *est compacte, toutes les feuilles sont compactes et* M *est fibrée sur le cercle.*

Preuve. — Si M est compacte, il existe une feuille compacte, par le théorème 2.9. Il n'y a pas d'holonomie par le corollaire 2.14. On en conclut que toutes les feuilles sont compactes et sans holonomie. Alors d'après [6] M est fibrée sur le cercle.

2.16. Corollaire. — *Avec les mêmes hypothèses que le théorème* 2.13, *si* M *est compacte et le feuilletage transversalement analytique, alors il n'y a qu'un nombre fini de feuilles dont l'holonomie est non triviale.*

Preuve. — Les feuilles dont l'holonomie est non triviale sont compactes, d'après le théorème 2.13. Elles sont donc en nombre fini, d'après le théorème 4, chapitre v de [2].

3. Feuilletages avec $(i\ )_*$ injectif pour toute feuille F.

3.1. Proposition. — *Soit* M *une variété feuilletée telle que :*

i) $\pi_1(M)$ *contient un groupe cyclique libre d'indice fini,*

ii) $(i_F)_* : \pi_1(F) \to \pi_1(M)$ *est injective pour toute feuille* F.

Alors toute feuille coupée par une trvnsversale fermée est sans holonomie et possède un groupe fondamental fini.

Preuve. — ii) implique que M satisfait la condition (A). Si F est coupée par une transversale fermée α la proposition 2.12 donne

$$(i_F)_*(\pi_1(F, x)) \cap G_\alpha = \{e\}.$$

Donc $(i_F)_*(\pi_1(F))$, qui est isomorphe à $\pi_1(F)$, est fini, et par le corollaire 2.3, F n'a pas d'holonomie.

3.2. Corollaire. — *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition* 3.1, *et si* M *est compacte avec une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles, alors toutes les feuilles sont compactes et ont un groupe fondamental fini.*

Preuve. — i) et le théorème 2.9 assurent l'existence d'une feuille compacte; le résultat s'en suit par la proposition 3.1 et le théorème de stabilité globale de Reeb.

4. Actions localement libres de R^{n-1} sur M.

Pour les propriétés générales des actions localement libres de R^{n-1} sur M, nous renvoyons le lecteur à [1].

4.1. Théorème. — *Soit* $\varphi: R^{n-1} \times M \to M$ *une action localement libre sur une variété* M. *Si* $\pi_1(M)$ *contient un sous-groupe, sans élément d'ordre fini, et d'indice fini, alors pour toute feuille* F *du feuilletage induit on a :*

$$(i_F)_* : \pi_1(F) \to \pi_1(M)$$

est injective.

Preuve. — Si M est compacte, ce théorème est prouvé en [1]. Pour le prouver en toute généralité, il suffit de remarquer que la preuve de [1] n'utilise pas la compacité.

4.2. Corollaire. — *Toute action localement libre, sur une variété* M *dont le groupe fondamental est fini, est libre. De plus* M *n'est pas compacte.*

Preuve. — D'après 4.1, M satisfait la condition (A). Donc M n'est pas compacte, par le théorème 2.8. Les feuilles sont soit simplement connexes, soit possèdent un groupe fondamental abélien libre; cette seconde possibilité est à éliminer en vertu du théorème 4.1.

4.3. Corollaire. — *Soit* $\varphi: R^{n-1} \times M \to M$ *une action localement libre. Si* $\pi_1(M)$ *contient un sous-groupe cyclique d'indice fini, alors :*

i) *M n'est pas compacte,*

ii) *Toute feuille coupée par une transversale fermée est simplement connexe.*

Preuve. — Si M est compacte le théorème 2.9 assure l'existence d'une feuille compacte, qui est un tore T^{n-1}. Comme $n \geqslant 3$, $\pi_1(M)$ doit contenir un sous-groupe abélien libre a deux générateurs, (par 4.1). Ceci contredit l'hypothèse faite sur $\pi_1(M)$.

Pour ii), si une feuille F est coupée par une transversale fermée, elle a un groupe fondamental fini, par la proposition 3.1. Comme les feuilles ont des groupes libres ou sont simplement connexes, on a le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Garançon, Le rang de certaines variétés closes, *Annales de l'institut Fourier*, Tome XX, Fasc. 1 (1970).

[2]'A. Haefliger, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 32 (1958).

[3] A. Haefliger, Variétés feuilletées, *Annal. della Scuola Normale Superiore di Pisa*, III, XVI (1962).

[4] C. Lamoureux, Feuilletages de codimension 1. Holonomie et homotopie, *C.R. Académie des Sciences*, Tome 270, N° 26 (Juin 1970).

[5]'G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Actualités Scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris (1952).

[6] D. Tischler, On fibering certain foliated manifolds overs S^1 Topology, Vol. 9, N° 2 (1970).

Manuscrit reçu le 15 mars 1971.
accepté par G. Reeb

Maurice Garançon,
Département de Mathématiques,
Université du Québec à Montréal,
Boîte postale 3050,
Montréal 110 (Canada).