Jacques Faraut
Khelifa Harzallah

Semi-groupes d'opérateurs invariants et opérateurs dissipatifs invariants

Annales de l'institut Fourier, tome 22, nº 2 (1972), p. 147-164
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1972__22_2_147_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
22, 2 (1972), 147-164.

SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS INVARIANTS ET OPÉRATEURS DISSIPATIFS INVARIANTS

par Jacques FARAUT et Khélifa HARZALLAH

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction.

Soit X un espace localement compact, nous désignons par $C_0(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs complexes tendant vers 0 à l'infini. Muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

l'espace $C_0(X)$ est un espace de Banach.

Nous considérons un groupe G de transformations continues de X. A tout g de G nous associons la transformation τ_g de $C_0(X)$ définie par

$$\tau_g f(x) = f(g^{-1}x).$$

Nous dirons qu'un opérateur A sur $C_0(X)$ est invariant s'il commute avec les transformations τ_g.

Considérons un semi-groupe fortement continu de contractions de l'espace $C_0(X)$, $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$, et supposons que chaque opérateur P_t commute avec les transformations τ_g. Le générateur infinitésimal (D_A, A) de ce semi-groupe possède les propriétés suivantes :

a) son domaine D_A est dense;

b) il est dissipatif, c'est-à-dire que pour une fonction f du domaine D_A nous avons

$$f(x) = \sup |f| \Longrightarrow \mathrm{Re}\, Af(x) \leqslant 0.$$

c) il commute avec les transformations τ_g, c'est-à-dire que pour tout g de G nous avons

$$\begin{aligned} \tau_g D_A &= D_A \\ \tau_g A &= A\tau_g. \end{aligned}$$

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant : Que devons-nous supposer sur l'espace X et le groupe G pour que l'énoncé suivant soit vrai :

Soit (D_A, A) un opérateur sur $C_0(X)$ vérifiant les conditions *a.b.c.*, alors il est préfermé et le plus petit prolongement fermé de l'opérateur (D_A, A) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions invariantes de $C_0(X)$.

Nous savons déjà que l'énoncé est vrai si $X = \mathbf{R}^n$ et G est le groupe des translations et si nous supposons que le domaine D_A contient les fonctions de classe C^∞ à support compact [1].

Nous établirons le résultat suivant :

Supposons que X est un espace riemannien symétrique. Soit (D_A, A) un opérateur sur $C_0(X)$ vérifiant

a) le domaine D_A contient l'espace $\mathcal{D}(X)$ des fonctions de classe C^∞ sur X à support compact;

b) l'opérateur (D_A, A) est dissipatif;

c) l'opérateur (D_A, A) commute avec les transformations τ_g.

Alors l'opérateur (D_A, A) est préfermé et son plus petit prolongement fermé est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions invariantes de $C_0(X)$.

Le cas des semi-groupes d'opérateurs positifs invariants a déjà été étudié dans une optique différente par G. A. Hunt [6] et R. Gangolli [2].

2. Semi-groupes de contractions et opérateurs dissipatifs.

Définition 2.1. — *Un opérateur* (D_A, A) *sur* $C_0(X)$ *est dit dissipatif si,* f *étant une fonction de* D_A *telle qu'au point* x *on ait* $f(x) = \|f\|$, *on a* $\operatorname{Re} Af(x) \leqslant 0$.

Le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions de $C_0(X)$ est dissipatif.

Proposition 2.1. — *Un opérateur dissipatif de domaine dense est préfermé.*

Soit (D_A, A) un opérateur dissipatif, ce qui peut s'exprimer de la façon suivante : si f est une fonction de D_A, et si $|f|$ atteint son maximum au point x, alors

$$\operatorname{Re}\,[Af(x).\overline{f(x)}] \leqslant 0.$$

Supposons au contraire que l'opérateur (D_A, A) ne soit pas préfermé, c'est-à-dire qu'il existe une suite f_n de fonctions de D_A telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} Af_n = g \neq 0.$$

Nous supposerons que $\|g\| = 1$. A cause de la densité de D_A, il existe une fonction u de D_A telle que

$$\|g - u\| \leqslant \frac{1}{4}.$$

Posons $h_n = u + cf_n$, où c est une constante positive. Soit x_n un point où $|h_n|$ atteint son maximum, on peut extraire de la suite x_n une suite convergeant vers un point x_0 du compactifié d'Alexandroff de X; en x_0 la fonction $|u|$ atteint son maximum, donc x_0 appartient à X. Pour tout n nous avons

$$\operatorname{Re}\{[Au(x_n) + cAf_n(x_n)]\overline{[u(x_n) + cf_n(x_n)]}\} \leqslant 0$$

en passant à la limite suivant la sous-suite considérée

$$\operatorname{Re}\{[Au(x_0) + cg(x_0)]\overline{u(x_0)}\} \leqslant 0$$

or $\operatorname{Re}[g(x_0)\overline{u(x_0)}]$ est positif, et si nous choisissons c assez grand nous aboutissons à une contradiction (par exemple si $c > 8\,\|Au\|$).

THÉORÈME 2.2. — *Soit* (D_A, A) *un opérateur sur* $C_0(X)$ *possédant les propriétés suivantes :*

a) son domaine D_A *est dense ;*

b) il est dissipatif ;

c) pour tout λ *positif l'espace* $(\lambda I - A)D_A$ *est dense. Alors l'opérateur* (D_A, A) *est préfermé, et son plus petit prolongement fermé est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions de* $C_0(X)$.

a) Nous montrons d'abord la majoration suivante

$$\forall f \in D_A, \qquad \|f\| \leqslant \frac{1}{\lambda} \|\lambda f - Af\|$$

Soit f une fonction de D_A, et x_0 un point où $|f|$ atteint son maximum; soit c un nombre complexe de module 1 tel que $cf(x_0)$ soit réel positif, et posons

$$g = cf, \quad h = \lambda g - Ag$$

nous avons

$$\|h\| \geqslant \operatorname{Re} h(x_0) = \lambda g(x_0) - \operatorname{Re} Ag(x_0) \geqslant \lambda \|g\|$$

d'où la majoration annoncée.

b) Soit $(D_{\tilde{A}}, \tilde{A})$ le plus petit prolongement fermé de (D_A, A), nous montrons que pour tout λ positif, $\lambda I - \tilde{A}$ est une bijection de $D_{\tilde{A}}$ sur $C_0(X)$. En effet par passage à la limite nous obtenons

$$\forall f \in D_{\tilde{A}}, \qquad \|f\| \leqslant \frac{1}{\lambda} \|\lambda f - \tilde{A}f\|$$

donc $\lambda I - \tilde{A}$ est une injection. Soit g un élément de $C_0(X)$, d'après la troisième hypothèse faite sur (D_A, A), il existe une suite f_n de fonctions de D_A telle que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda f_n - Af_n = g.$$

A cause de la majoration montrée en *a*), la suite f_n est de Cauchy, soit f sa limite, et puisque l'opérateur $(D_{\tilde{A}}, \tilde{A})$ est fermé, f appartient à $D_{\tilde{A}}$ et $\lambda f - \tilde{A}f = g$, donc $\lambda I - \tilde{A}$ est une surjection.

c) Soit R_λ l'inverse de $\lambda I - \tilde{A}$, résolvante de $(D_{\tilde{A}}, \tilde{A})$; à cause de la majoration établie en *a*), R_λ est un opérateur borné et $\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$. La conclusion du théorème résulte alors du théorème de Hille-Yosida.

Remarque. — Le théorème 2.2 peut également être démontré à l'aide de résultats de Lumer et Phillips sur les semi-produits intérieurs [8].

3. Opérateurs invariants dans le cas d'un espace homogène.

Soit G un groupe localement compact, unimodulaire, K un sous-groupe compact de G, et soit $X = G/K$. Soit π l'application canonique

$$\pi : G \to X = G/K$$

et nous posons $0 = \pi(e)$ où e désigne l'élément neutre de G.

Nous noterons $M(X)$ l'espace des mesures complexes bornées sur X. Si E est un espace de fonctions (ou de mesures ou de distributions) sur X nous noterons $E^\natural$ le sous-espace de E constitué des éléments de E invariants par K.

Soient μ et ν deux mesures de $M^\natural(X)$ et soient $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\nu}$ les mesures sur G biinvariantes par K dont les images par π sont égales à μ et ν. Le produit de convolution $\tilde{\mu} * \tilde{\nu}$ est une mesure bornée sur G biinvariante par K, donc est une mesure bornée sur X invariante par K que nous noterons $\mu * \nu$. Ainsi l'espace $M^\natural(X)$ est une algèbre de convolution.

Soit f une fonction de $C_0(X)$; posons $\tilde{f} = f \circ \pi$. Soit μ une mesure de $M^\natural(X)$, et soit $\tilde{\mu}$ comme ci-dessus. Le produit de convolution $\tilde{f} * \tilde{\mu}$ est une fonction continue sur G qui tend vers 0 à l'infini et qui est invariante à droite par K, donc est une fonction continue sur X tendant vers 0 à l'infini que nous noterons $f * \mu$. Ainsi l'algèbre $M^\natural(X)$ opère sur l'espace $C_0(X)$ par convolution.

Soit μ une mesure de $M^\natural(X)$ et soit A l'opérateur de $C_0(X)$ défini par

$$Af = f * \mu.$$

L'opérateur A est borné et commute avec les transformations τ_g, en effet

$$\delta_g * (\tilde{f} * \tilde{\mu}) = (\delta_g * \tilde{f}) * \tilde{\mu}$$

ce qui se traduit par

$$\tau_g A f = A \tau_g f.$$

Soit μ une mesure de $M^\natural(X)$, $\tilde{\mu}$ définie comme ci-dessus, la mesure $\check{\tilde{\mu}}$, symétrique de $\tilde{\mu}$, est biinvariante par K donc est une mesure de $M^{\natural}(X)$ que nous noterons $\check{\mu}$.

Considérons maintenant un opérateur borné A sur $C_0(X)$ commutant avec les transformations τ_g. L'application

$$f \longmapsto Af(0)$$

est une forme linéaire continue sur $C_0(X)$, elle est donc définie par une mesure bornée. Cette mesure est invariante par K. Soit μ la mesure de $M^{\natural}(X)$ définie par

$$\int f\, d\check{\mu} = Af(0).$$

Soient f une fonction de $C_0(X)$, x un point de X et g un élément de G tel que $gx = 0$. Posons

$$h = \tau_g f$$

nous avons

$$\begin{aligned} Af(x) = Af(g^{-1}0) = Ah(0) &= \int h(y)\, d\check{\mu}(y) \\ &= \int f(g^{-1}y)\, d\check{\mu}(y) = f * \mu(x). \end{aligned}$$

Ainsi l'algèbre des opérateurs invariants sur $C_0(X)$ est isomorphe à l'algèbre de convolution $M^{\natural}(X)$.

4. Espace $\dot{\mathcal{B}}(X)$.

Nous supposons à partir de maintenant que X est un espace riemannien symétrique. Nous noterons $\mathsf{D}(X)$ l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur X [4].

Nous noterons $\mathcal{D}(X)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur X à support compact.

DÉFINITION 4.1. — *Une fonction f définie sur* X *appartient à l'espace* $\dot{\mathcal{B}}(X)$ *si f est de classe* C^∞ *et si, pour tout opérateur différentiel invariant* D, *la fonction* Df *est une fonction qui tend vers* 0 *à l'infini.*

Nous considérerons sur $\dot{\mathcal{B}}(X)$ la topologie d'EVTLC définie par les semi-normes

$$p_D(f) = \operatorname{Sup}|Df| \quad (D \in \mathsf{D}(X)).$$

PROPOSITION 4.1. — *L'espace* $\mathfrak{D}(X)$ *est un sous-espace dense de* $\dot{\mathfrak{B}}(X)$.

Pour démontrer cette proposition il suffit de prouver qu'il existe une suite d'ouverts U_n et une suite de fonctions φ_n de $\mathfrak{D}^{\natural}(X)$ vérifiant

a) $U_n \subset U_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$.

b) $\varphi_n = 1$ sur U_n.

c) Pour tout opérateur différentiel invariant D il existe une constante C(D) telle que

$$\forall n, \forall x, \qquad |D\varphi_n(x)| \leqslant C(D).$$

La démonstration en est très simple dans le cas euclidien; dans le cas d'un espace symétrique de type non compact on en trouvera la démonstration dans Langlands [7] p. 119 et dans Helgason [5] p. 571.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur X, posons $\tilde{f} = f \circ \pi$. Soit T une distribution sur X à support compact invariante par K et $\tilde{T}$ la distribution sur G biinvariante par K et vérifiant

$$\langle \tilde{T}, \tilde{f} \rangle = \langle T, f \rangle.$$

La fonction $\tilde{f} * \tilde{T}$ est une fonction définie sur G invariante à droite par K, donc est une fonction sur X que nous noterons $f * T$.

PROPOSITION 4.2. — *Soit* T *une distribution sur* X *à support compact invariante par* K, *l'application* $f \longmapsto f * T$ *est continue de* $\dot{\mathfrak{B}}(X)$ *dans* $C_0(X)$.

Soit H un compact de X. Sur $C^\infty(H)$ nous considérons les deux topologies définies de la façon suivante

— pour la première une suite f_n tend vers 0 si toutes les dérivées de f_n tendent uniformément vers 0 sur H,

— pour la seconde une suite f_n tend vers 0 si, pour tout opérateur différentiel invariant D sur X, Df_n tend uniformément vers 0 sur H.

Il est clair que la première est une topologie d'espace de Fréchet. Il en est de même de la seconde car il existe un opérateur différentiel invariant elliptique, par exemple l'opérateur de Laplace-Beltrami. D'autre part la première est plus fine que la seconde, elles sont donc égales.

Soit alors f une fonction de $\dot{\mathcal{B}}(X)$, d'après ce qui précède la restriction à H de $\tau_g f$ tend vers 0 dans $C^\infty(H)$ quand g tend vers l'infini. Par conséquent l'application $g \longmapsto \tau_g f$ de G dans $C^\infty(X)$ est continue et tend vers 0 à l'infini. Nous avons

$$\tilde{f} * \tilde{T}(g) = \langle \check{T}, \tau_{g^{-1}} f \rangle$$

où $\check{T}$ est l'image par π de la distribution symétrique de $\tilde{T}$.

La fonction $\tilde{f} * \tilde{T}$ est continue sur G et tend vers 0 à l'infini, donc la fonction $f * T$ appartient à $C_0(X)$.

De plus si une suite f_n de fonctions tend vers 0 dans $\dot{\mathcal{B}}(X)$ les fonctions $\tau_g f_n$ tendent vers 0 dans $C^\infty(X)$ uniformément par rapport à g, et par suite les fonctions $f_n * T$ tendent vers 0 uniformément.

5. Distributions dissipatives et opérateurs dissipatifs invariants.

Définition 5.1. — *Soit* T *une distribution sur* X. *Nous dirons que* T *est dissipative (sous-entendu relativement à* 0*) si, pour toute fonction* φ *de* $\mathcal{D}(X)$ *on a*

$$\varphi(0) = \sup |\varphi(x)| \Longrightarrow \operatorname{Re} \langle T, \varphi \rangle \leqslant 0.$$

Proposition 5.1. — *Soit* T *une distribution dissipative sur* X. *La restriction de* T *à* $X - \{0\}$ *est une mesure, la restriction de* T *au complémentaire d'un voisinage quelconque de* 0 *est une mesure bornée. La distribution* T *est la somme d'une distribution à support compact et d'une mesure bornée.*

Soit V un voisinage de 0, soit g une fonction de $\mathcal{D}(X)$ dont le support est contenu dans V et vérifiant

$$g(0) = 1, \qquad |g| \leqslant 1.$$

Soit f une fonction de $\mathcal{D}(X)$ dont le support est contenu dans le complémentaire de V, posons $M = \sup |f|$. Soit c un nombre complexe de module 1 tel que le nombre $\langle T, cf \rangle$ soit réel positif. Posons

$$h = Mg + cf$$

alors nous avons

$$h(0) = \sup |h|,$$

donc

$$\mathrm{Re}\,\langle T, h\rangle = M\,\mathrm{Re}\,\langle T, g\rangle + |\langle T, f\rangle| \leqslant 0$$

et par suite

$$|\langle T, f\rangle| \leqslant \mathrm{Re}\,\langle -T, g\rangle . \mathrm{Sup}\,|f|.$$

Il en résulte que la restriction de la distribution T au complémentaire de V est une mesure bornée, et que la restriction de T à $X - \{0\}$ est une mesure.

Soit α une fonction de $\mathfrak{D}(X)$ égale à 1 au voisinage de 0,

$$T = \alpha T + (1 - \alpha)T$$

la distribution αT est à support compact, et la distribution $(1 - \alpha)T$ est une mesure bornée.

Soit T une distribution dissipative sur X invariante par K. Elle peut se décomposer en

$$T = S + \sigma$$

où S est une distribution à support compact invariante par K et σ une mesure bornée invariante par K.

Si f est une fonction de $\dot{\mathcal{B}}(X)$ le produit de convolution $f * T$ est bien défini, et l'application A de $\dot{\mathcal{B}}(X)$ dans $C_0(X)$ définie par

$$Af = f * T$$

est continue, invariante et dissipative, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété

$$f(x) = \sup |f| \Longrightarrow \mathrm{Re}\, Af(x) \leqslant 0.$$

Et on a la réciproque suivante

Proposition 5.2. — *Soit* A *une application linéaire de* $\mathfrak{D}(X)$ *dans* $C_0(X)$ *dissipative et invariante, alors il existe une distribution dissipative* T *sur* X, *unique, invariante par* K *telle que pour toute fonction* f *de* $\mathfrak{D}(X)$ *on ait*

$$Af = f * T.$$

L'opérateur $(\mathfrak{D}(X), A)$ sur $C_0(X)$ est dissipatif et de domaine dense, donc est préfermé et par suite l'application A

est fermée et, d'après le théorème du graphe fermé, l'application A est continue, donc l'application

$$f \longmapsto Af(0)$$

est une distribution sur X, qui est invariante par K. Nous poserons

$$Af(0) = \langle \check{T}, f \rangle.$$

Par suite de l'invariance de l'application A nous avons

$$Af = f * T.$$

Enfin il est clair que la distribution T est dissipative.

6. Quelques propriétés de la Transformation de Fourier.

Nous avons supposé que X est un espace riemannien symétrique. Il en résulte que l'algèbre $M^{\natural}(X)$ est commutative. Nous noterons dx une mesure sur X invariante par G.

Nous appellerons Z l'ensemble des fonctions sphériques de type positif et dz la mesure de Plancherel, nous noterons $f \longmapsto \hat{f}$ la transformation de Fourier-Plancherel : nous avons pour toute fonction f de $L^{2\natural}(X)$ [3]

$$\int |f(x)|^2 \, dx = \int |\hat{f}(z)|^2 \, dz.$$

Si la fonction f est à support compact

$$\hat{f}(z) = \int \overline{\varphi(x, z)} \, f(x) \, dx.$$

Si la fonction $\hat{f}$ est à support compact

$$f(x) = \int \varphi(x, z) \, \hat{f}(z) \, dz.$$

Les fonctions sphériques sont des fonctions propres des opérateurs différentiels invariants sur X : si D est un opérateur différentiel invariant

$$D_x \varphi(x, z) = \hat{D}(z) \, \varphi(x, z)$$

où $\hat{D}$ désigne une fonction continue sur Z.

1) *Espaces* $\mathcal{F}_0(X)$ *et* $\mathcal{F}(X)$.

DÉFINITION 6.1. — *Nous appellerons* $\mathcal{F}_0(X)$ *le sous-espace de* $L^{2\natural}(X)$ *des fonctions* f *dont la transformée de Fourier* $\hat{f}$ *est à support compact.*

PROPOSITION 6. 1. — *L'espace* $\mathcal{F}_0(X)$ *est contenu dans* $\dot{\mathcal{B}}(X)$.
Soit f une fonction de $\mathcal{F}_0(X)$.

a) La fonction $\hat{f}$ est de carré intégrable et à support compact, donc est intégrable, et par suite elle est le produit de deux fonctions de carré intégrable :

$$\hat{f} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2.$$

Il en résulte que

$$f = f_1 * f_2$$

où f_1 et f_2 désignent deux fonctions de $L^{2\natural}(X)$, et donc f est une fonction de $C_0(X)$.

b) La fonction $\hat{f}$ étant à support compact nous avons

$$f(x) = \int \varphi(x, z)\hat{f}(z)\, dz$$

et par suite f est de classe C^∞ (même analytique). Soit D un opérateur différentiel invariant,

$$\begin{aligned} Df(x) &= \int D_x\varphi(x, z)\hat{f}(z)\, dz \\ &= \int \varphi(x, z)\, \hat{D}(z)\hat{f}(z)\, dz \end{aligned}$$

ainsi la transformée de Fourier de la fonction Df est de carré intégrable et à support compact, donc Df appartient à $C_0(X)$.

DÉFINITION 6.2. — *Nous appellerons* $\mathcal{F}(X)$ *le sous-espace de* $\dot{\mathcal{B}}(X)$ *engendré par l'ensemble*

$$\{\tau_g f \mid g \in G, \quad f \in \mathcal{F}_0(X)\}.$$

Nous noterons $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à support compact.

LEMME. — *Soit* V_n *une base de voisinages compacts de* 0 *invariants par* K, *et pour tout* n *soit* α_n *une fonction de* $C_c^\natural(X)$ *vérifiant*

$$\alpha_n \geqslant 0, \qquad \int \alpha_n(x)\, dx = 1, \qquad \operatorname{supp}(\alpha_n) \subset V_n.$$

Soit f une fonction de $C_0(X)$, la suite $f * \alpha_n$ converge vers f dans $C_0(X)$.

Proposition 6.2. — *L'espace* $\mathcal{F}(X)$ *est un sous-espace dense de* $C_0(X)$.

Notons $\overline{\mathcal{F}(X)}$ l'adhérence de $\mathcal{F}(X)$ dans $C_0(X)$.

a) Soient f et g deux fonctions de $C_c(X)$. D'après la formule de Plancherel nous avons

$$f * g(x) = \int \varphi(x, z)\hat{f}(z)\hat{g}(z)\, dz.$$

La fonction $\hat{f}\hat{g}$ étant intégrable, il existe une suite de fonctions $\hat{h}_n$ mesurables bornées à support compact telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int |\hat{f}(z)\hat{g}(z) - \hat{h}_n(z)|\, dz = 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \|f * g - h_n\|_\infty = 0$$

donc que $f * g$ appartient à $\overline{\mathcal{F}(X)}$, et en tenant compte du lemme il en résulte que $C_0^\natural(X)$ est contenu dans $\overline{\mathcal{F}(X)}$.

b) Soit α une fonction de $C_c^\natural(X)$ et f une fonction de $C_c(X)$, nous avons

$$f * \alpha = \int f(g)\tau_g\alpha\, dg.$$

Cette intégrale peut être considérée comme une intégrale vectorielle dans l'espace de Banach $C_0(X)$, et $f * \alpha$ est limite dans $C_0(X)$ de sommes de Riemann du type

$$\sum_i f(g_i)\tau_{g_i}\alpha m(E_i)$$

et par suite $f * \alpha$ appartient à $\overline{\mathcal{F}(X)}$, et en tenant compte du lemme il en résulte que $C_0(X)$ est contenu dans $\overline{\mathcal{F}(X)}$.

2) *Transformées de Fourier des distributions dissipatives.*

Proposition 6.3. — *Soit* T *une distribution dissipative sur* X, *invariante par* K, *la fonction* $\hat{T}$ *définie sur* Z *par*

$$\hat{T}(z) = \langle T_x, \overline{\varphi(x, z)}\rangle$$

est continue sur Z *et a une partie réelle négative ou nulle.*

Soit V un voisinage compact de 0. La distribution T peut se décomposer en

$$T = S + \sigma$$

où S est une distribution dont le support est contenu dans V et σ est une mesure bornée. Nous avons

$$\hat{T}(z) = \langle S_x, \ \overline{\varphi(x, z)}\rangle + \int \overline{\varphi(x, z)}\, d\sigma(x)$$

donc $\hat{T}$ est une fonction continue sur Z.

Soit g_n une suite de fonctions de $\mathfrak{D}(X)$ vérifiant

$$0 \leqslant g_n \leqslant 1$$
$$g_n(x) = 1 \quad \text{sur} \quad V$$

et en tout point x,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$$

nous avons

$$\begin{aligned}\hat{T}(z) &= \langle S_x, \ \overline{\varphi(x, z)}\rangle + \lim_{n\to\infty} \int \overline{\varphi(x, z)} g_n(x)\, d\sigma(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle T_x, \ \overline{\varphi(x, z) g_n(x)}\rangle\end{aligned}$$

et nous avons pour tout x et tout z

$$|\overline{\varphi(x, z)} g_n(x)| \leqslant \varphi(0, z) g_n(0) = 1$$

donc

$$\text{Re}\,\langle T_x, \overline{\varphi(x, z)} g_n(x)\rangle \leqslant 0$$

et par suite

$$\text{Re}\,\hat{T}(z) \leqslant 0.$$

PROPOSITION 6.4. — *Soit f une fonction de $\mathcal{F}_0(X)$ et T une distribution dissipative invariante par K, alors $f * T$ appartient à $\mathcal{F}_0(X)$ et nous avons*

$$\widehat{f * T}(z) = \hat{f}(z)\hat{T}(z).$$

La distribution T peut se décomposer en

$$T = S + \sigma$$

où S est une distribution à support compact, et σ est une mesure bornée. D'autre part

$$f(x) = \int \varphi(x, z)\hat{f}(z)\, dz$$

donc

$$\langle S, f\rangle = \int \langle S_x, \quad \varphi(x, z)\rangle \hat{f}(z)\, dz$$

et

$$\int f(x)\, d\sigma(x) = \int \Big[\int \varphi(x, z)\, d\sigma(x)\Big] \hat{f}(z)\, dz$$

d'où finalement

$$\langle T, f\rangle = \int \langle T_x, \quad \varphi(x, z)\rangle \hat{f}(z)\, dz$$

et nous avons, si $x = \pi(g)$

$$f * T(x) = \langle \check{T}_y, f(gy)\rangle.$$

La distribution T étant invariante par K nous avons

$$\langle \check{T}_y, \quad f(gy)\rangle = \langle \check{T}_x, \quad \int_K f(gky)\, dk\rangle$$

or

$$\begin{aligned}\int_K f(gky)\, dk &= \int_Z \int_K \varphi(gky, z) \hat{f}(z)\, dk\, dz \\ &= \int_Z \varphi(x, z)\varphi(y, z)\hat{f}(z)\, dz\end{aligned}$$

d'où

$$f * T(x) = \int_Z \langle \check{T}_y, \quad \varphi(y, z)\rangle \varphi(x, z) \hat{f}(z)\, dz$$

et comme $\check{\varphi}(\cdot, z) = \overline{\varphi(\cdot, z)}$, nous avons finalement

$$f * T(x) = \int \hat{T}(z)\varphi(x, z)\hat{f}(z)\, dz$$

c'est-à-dire

$$\widehat{f * T}(z) = \hat{T}(z)\hat{f}(z).$$

7. Opérateurs dissipatifs invariants et semi-groupes de contractions invariantes sur $C_0(X)$.

THÉORÈME 7. 1. — *Soit* (D_A, A) *un opérateur sur* $C_0(X)$ *vérifiant*

a) son domaine D_A *contient* $\mathfrak{D}(X)$;

b) il est dissipatif;

c) il commute avec les transformations τ_g.

Alors l'opérateur (D_A, A) *est préfermé et son plus petit prolongement fermé est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contractions invariantes.*

D'après la proposition 2.1, l'opérateur (D_A, A) étant dissipatif et de domaine dense est préfermé. Soit $(D_{\tilde{A}}, \tilde{A})$ son plus petit prolongement fermé. Nous allons montrer que pour tout λ positif $(\lambda I - \tilde{A})\, D_{\tilde{A}}$ contient l'espace $\mathcal{F}(X)$ qui est dense dans $C_0(X)$ (Proposition 6.2), le théorème sera ainsi démontré (Théorème 2.2).

D'après la proposition 5.2 il existe une distribution dissipative T invariante telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(X), \qquad A\varphi = \varphi * T.$$

Soit f une fonction de $\dot{\mathcal{B}}(X)$, soit φ_n une suite de fonctions de $\mathcal{D}(X)$ qui converge vers f dans l'espace $\dot{\mathcal{B}}(X)$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f \qquad (\text{dans } C_0(X))$$
$$\lim_{n\to\infty} A\varphi_n = f * T \quad (\text{dans } C_0(X))$$

donc la fonction f appartient à $D_{\tilde{A}}$ et nous avons

$$\tilde{A}f = f * T.$$

Soit $\lambda > 0$ et g une fonction de $\mathcal{F}_0(X)$, nous allons montrer qu'il existe une fonction f de $D_{\tilde{A}}$ telle que

$$(\lambda I - \tilde{A})f = g.$$

D'après la proposition 6.4 si f est une fonction de $\mathcal{F}_0(X)$ nous avons

$$\widehat{(\lambda I - \tilde{A})f} = (\lambda - \hat{T}(z))\hat{f}(z)$$

et d'après la proposition 6.3 la fonction $\hat{T}$ est continue et de partie réelle négative, donc la fonction

$$\frac{\hat{g}(z)}{\lambda - \hat{T}(z)}$$

est de carré intégrable et son support est compact, elle est par suite la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f de $\mathcal{F}_0(X)$ et pour cette fonction f nous avons

$$\widehat{(\lambda I - \tilde{A})f} = \hat{g}$$