ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PAUL BERTRANDIAS

Espaces Lp relatifs à une famille de mesures

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 4 (1971), p. 267-291

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_4_267_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 4 (1971), p. 267-291.

ESPACES L^p RELATIFS A UNE FAMILLE DE MESURES

par Jean-Paul BERTRANDIAS

Dans certains problèmes d'analyse fonctionnelle, les intersections d'espaces L^p définis sur un espace localement compact X par rapport à une famille S de mesures s'introduisent naturellement (Bertrandias [2], [3], Lumer [15]). Les propriétés de ces espaces sont reliées étroitement aux propriétés de compacité de la famille S. Dans cet article, nous étudierons quelques-unes de ces relations.

La première partie est essentiellement consacrée aux problèmes d'approximation : l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions continues à support compact n'est en général pas dense et il est intéressant de caractériser les fonctions qu'on peut approcher par des éléments de $\mathcal{K}$ (théorèmes I et III). Une question liée à celle-ci est celle de la compacité relative de la boule unité de $\mathcal{K}$ (théorème III et IV).

Dans la seconde partie, l'espace X est un groupe localement compact commutatif. Le groupe dual s'applique canoniquement dans les espaces étudiés. Les conditions de continuité faible ou forte de cette application sont données par le théorème V. Des propriétés de compacité relative de l'image sont aussi étudiées (théorèmes VI et VII).

A. ESPACES $\bigcap$ SUR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

1. Définitions - Notations.

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des mesures (de Radon) complexes bornées sur l'espace localement compact X.

Soit S un ensemble de mesures positives bornées.

Au nombre réel p supérieur ou égal à 1, on associe l'ensemble des fonctions complexes f définies sur X, appartenant à $L^p(s)$ quel que soit $s \in S$ et telles que

$$(1) \quad \|f\|_{L^p(s)} = \left(\int_X |f|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M \text{ quel que soit } s \text{ dans } S.$$

Sur cet ensemble, la relation « $f \sim g$ si $f - g$ est s-nul pour tout s dans S » est une relation d'équivalence. Nous désignerons l'espace des classes d'équivalence $\tilde{f}$ par $\bigcap_S$ ou simplement $\cap$. L'application $f \longmapsto \tilde{f}$ qui, à une fonction vérifiant (1), associe sa classe d'équivalence, sera appelée *application canonique.*

L'espace $\cap$ est d'une façon évidente un espace vectoriel normé, la norme étant donnée par

$$\|\tilde{f}\|_\cap = \sup_{s \in S} \|f\|_{L^p(s)}.$$

Cet espace est complet pour cette norme (Lumer [15]).

On vérifie immédiatement que si $\Gamma(S)$ est l'enveloppe convexe de S, les espaces $\bigcap_S$ et $\bigcap_{\Gamma(S)}$ sont les mêmes. Nous supposerons donc dans la suite que S *est un ensemble convexe de mesures positives bornées.*

Soit $\mathcal{K}$ l'espace des fonctions continues à support compact.

On s'intéressera à l'application canonique de $\mathcal{K}$ dans $\cap$. On voit facilement que :

— pour que cette application soit définie, il faut et il suffit que S soit borné pour la topologie vague $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ ([6], ch. III, § 1, n° 9),

— pour que cette application soit continue pour les topologies d'espaces normées ($\mathcal{K}$ étant muni de la norme $\| \ \|_\infty$ de la convergence uniforme et $\mathcal{M}$ de sa norme de dual de $\mathcal{K}$), il faut et il suffit que S soit borné en norme dans $\mathcal{M}$.

Nous supposerons donc que *l'ensemble convexe* S *est borné en norme par* 1 :

$$\int_X ds \leqslant 1 \quad \text{quel que soit } s \text{ dans } S.$$

Dans ces conditions, l'application canonique $\sim\, : \mathcal{K} \to \cap$ est continue pour les topologies faibles $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ et $\sigma(\cap, \cap')$

et elle admet une application transposée $\cap' \to \mathcal{M}$, cette application étant continue pour les topologies faibles $\sigma(\cap', \cap)$ et $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$. Nous noterons $\backsim$ cette application transposée.

Enfin, nous supposerons dans la suite que *l'ensemble* S *est fermé pour la topologie vague* $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ donc *compact* pour cette topologie.

2. Espace $\cup$ associé à un espace $\cap$.

Notons $\bigcup\limits_{S}$ ou simplement $\cup$ l'espace des mesures complexes bornées σ définies par $d\sigma = \rho\, ds$, la mesure s variant dans S et ρ variant dans l'ensemble des fonctions appartenant à $L^q(s)$ $\left(\text{avec } \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$. On posera [1] :

$$\|\sigma\|_{\cup} = \inf_{\substack{d\sigma = \rho\, ds \\ s \in S}} \|\rho\|_{L^q(s)} \tag{2}$$

1° *L'ensemble* $\cup$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}$.

En effet, si σ appartient à $\cup$ et si λ est un nombre complexe, la mesure $\lambda\sigma$ appartient évidemment à $\cup$.

D'autre part, si $d\sigma_1 = \rho_1\, ds_1$ et $d\sigma_2 = \rho_2\, ds_2$ sont deux éléments de $\cup$, on a, pour toute fonction φ continue à support compact,

$$\left|\int_X \varphi(\rho_1\, ds_1 + \rho_2\, ds_2)\right| \leqslant \left(\int_X |\varphi|^p\, ds_1\right)^{\frac{1}{p}} n_1 + \left(\int_X |\varphi|^p\, ds_2\right)^{\frac{1}{p}} n_2$$

d'après l'inégalité de Hölder, en posant $n_1 = \|\rho_1\|_{L^q(s_1)}$ et $n_2 = \|\rho_2\|_{L^q(s_2)}$. La concavité de l'application $x \longmapsto x^{\frac{1}{p}}$ pour $x \geqslant 0$ montre que

$$\left|\int_X \varphi(\rho_1\, ds_1 + \rho_2\, ds_2)\right| \leqslant (n_1 + n_2)\|\varphi\|_{L^p(s)} \tag{3}$$

avec
$$ds = \frac{n_1}{n_1 + n_2}\, ds_1 + \frac{n_2}{x_1 + n_2}\, ds_2.$$

[1] La borne inférieure est un minimum car l'application

$$s \longmapsto \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{K} \\ \int_X \varphi\, d\sigma \neq 0}} \left|\int_X \varphi\, d\sigma\right| \left(\int_X |\varphi|^p ds\right)^{-\frac{1}{p}}$$

est semi-continue inférieurement pour la topologie vague sur le compact S.

Comme S est convexe, s appartient à S et comme l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(s)$, il existe une fonction ρ appartenant à $L^q(s)$ telle que

$$\int_X \varphi(d\sigma_1 + d\sigma_2) = \int_X \varphi\, \rho ds \qquad \text{quel que soit} \qquad \varphi \in \mathcal{K}.$$

On en déduit que la mesure $d\sigma_1 + d\sigma_2$ est égale à la mesure $\rho\, ds$ et appartient bien à $\mathcal{U}$.

2° *L'expression* (2) *définit une norme sur* $\mathcal{U}$.

Si σ est un élément de $\mathcal{U}$ et λ un scalaire, on a évidemment

$$\|\lambda\sigma\|_{\mathcal{U}} = |\lambda|\; \|\sigma\|_{\mathcal{U}}.$$

L'inégalité de Hölder montre que

$$\|\sigma\|_{\mathcal{M}} = \int_X |\rho|\; ds \leqslant \|\rho\|_{L^q(s)} \|s\|_{\mathcal{M}}$$

pour tout $s \in S$ tel que $d\sigma = \rho\; ds$, donc $\|\sigma\|_{\mathcal{M}} \leqslant \|\sigma\|_{\mathcal{U}}$, ce qui montre que $\|\sigma\|_{\mathcal{U}} = 0$ si et seulement si la mesure σ est nulle.

L'inégalité triangulaire provient de l'inégalité (3) qui donne :

$$\|\rho\|_{L^q(s)} \leqslant n_1 + n_2 = \|\rho_1\|_{L^q(s_1)} + \|\rho_2\|_{L^q(s_2)};$$

en prenant les bornes inférieures, on obtient

$$\|\rho\; ds\|_{\mathcal{U}} = \|\sigma_1 + \sigma_2\|_{\mathcal{U}} \leqslant \|\sigma_1\|_{\mathcal{U}} + \|\sigma_2\|_{\mathcal{U}}.$$

3° *Compacité de la boule unité de* $\mathcal{U}$.

Soit Σ la boule unité fermée de $\mathcal{U}$.

Proposition I. — *L'ensemble* Σ *est compact pour la topologie vague* $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$.

Démonstration. — L'ensemble Σ étant borné en norme dans $\mathcal{M}$, il est relativement compact pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$. Toute base de filtre Φ sur Σ admet donc au moins un point adhérent μ dans $\mathcal{M}$. Il suffit de montrer que μ appartient aussi à Σ.

Soit Φ_0 une base d'un filtre plus fin que le filtre de base Φ et convergeant vers μ. A chaque élément P de Φ_0, on associe la partie P' de S formée par les mesures s telles que $\rho\, ds$ appartienne à P pour une fonction ρ appartenant à la boule unité de $L^q(s)$. Cet ensemble de parties $\Phi'_0 = \{P'\}_{P\in\Phi_0}$ est une base de filtre sur S. Comme S est compact, elle admet au moins un point adhérent s_0 dans S.

Soit maintenant ψ un élément quelconque de $\mathcal{K}$. On a

$$\left|\int_X \psi\, d\sigma\right| \leqslant \left|\int_X \psi\, \rho\, ds\right| \leqslant \left(\int_X |\psi|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout élément σ de Σ tel que $d\sigma = \rho\, ds$ avec $s \in S$. Donc

$$\inf_{\sigma\in P}\left|\int_X \psi\, d\sigma\right| \leqslant \inf_{s\in P'}\left|\int_X |\psi|^p\, ds\right|^{\frac{1}{p}}.$$

En prenant les limites suivant Φ_0 et en tenant compte de la continuité des applications $\sigma \longmapsto \int_X \psi\, d\sigma$ et $s \longmapsto \int_X |\psi|^p\, ds$, on a

$$\lim_{P\in\Phi_0}\inf_{m\in P}\left|\int_X \psi\, d\sigma\right| \leqslant \lim_{P\in\Phi_0}\inf_{s\in P'}\left(\int_X |\psi|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{P'\in\Phi'_0}\inf_{s\in P'}\left(\int_X |\psi|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lim_{\Phi_0}\left|\int_X \psi\, d\sigma\right| \leqslant \lim_{\Phi'_0}\inf\left(\int_X |\psi|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left|\int_X \psi\, d\mu\right| \leqslant \left(\int_X |\psi|^p\, ds_0\right)^{\frac{1}{p}} = \|\psi\|_{L^p(s_0)}.$$

L'application $\psi \longmapsto \int_X \psi\, d\mu$ est une fonctionnelle linéaire bornée par 1 sur $\mathcal{K}$ considéré comme sous-espace (dense) de $L^p(s_0)$. Il existe donc un élément ρ de $L^q(s_0)$ tel que

$$\|\rho\|_{L^q(s_0)} \leqslant 1$$

et

$$\int_X \psi\, d\mu = \int_X \psi\, \rho\, ds_0 \quad \text{pour tout } \psi \text{ dans } \mathcal{K}.$$

Par suite, $d\mu = \rho\, ds_0$ et μ appartient bien à Σ.

3. Relations entre les espaces $\cap$ et $\cup$.

Si σ est un élément de $\cup$ et $\tilde{f}$ un élément de $\cap$, on a

$$\left|\int_X f\,d\sigma\right| = \left|\int_X f\rho\,ds\right| \leqslant \|f\|_{L^p(s)}\|\rho\|_{L^q(s)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{\cap}\|\rho\|_{L^q(s)}$$

$$\left|\int_X f\,d\sigma\right| \leqslant \|\tilde{f}\|_{\cap}\|\sigma\|_{\cup} \tag{4}$$

Les applications

$$\lambda_f : \cup \to \mathbf{C} \quad \text{définie par} \quad \sigma \longmapsto \int_X f\,d\sigma$$

et

$$l_\sigma : \cap \to \mathbf{C} \quad \text{définie par} \quad \tilde{f} \longmapsto \int_X f\,d\sigma$$

sont linéaires et bornées. Elles définissent respectivement des éléments des espaces de Banach $\cup'$ et $\cap'$.

Proposition II. — *Les applications*

$$\lambda : \cap \to \cup' \quad \textit{définie par} \quad \tilde{f} \longmapsto \lambda_f$$

et

$$l : \cup \to \cap' \quad \textit{définie par} \quad \sigma \longmapsto l_\sigma$$

sont des applications linéaires et isométriques.

Le schéma suivant résume les différentes applications introduites :

$$\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \cap \xrightarrow{\lambda} \cup'$$
$$\mathcal{M} \xleftarrow{\sim} \cap' \xleftarrow{l} \cup$$

Deux résultats intermédiaires de la démonstration de la proposition II sont intéressants :

Proposition III. — *L'image de la boule unité* $B(\cap')$ *de* $\cap'$ *par l'application transposée* $\backsim$ *est l'ensemble* Σ.

Proposition IV. — *Soit* Λ *le sous-espace vectoriel fermé engendré dans* $\cap$ *par l'image* $\tilde{\mathcal{K}}$ *de* $\mathcal{K}$. *Le dual fort* Λ' *de l'espace de Banach* Λ *s'identifie à l'espace normé* $\cup$.

Démonstrations.

1° *L'application* λ *est linéaire et isométrique.*

Les applications λ et l sont évidemment linéaires.

L'inégalité (4) montre que $\|\lambda_f\|_{\cup'} \leqslant \|\tilde{f}\|_{\cap}$.

Si $\tilde{f}$ est un élément de $\cap$ et si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un élément s_0 de S tel que

$$\|\tilde{f}\|_{\cap} - \varepsilon \leqslant \|f\|_{L^p(s_0)}$$

Par suite :

$$\|\tilde{f}\|_{\cap} - \varepsilon \leqslant \sup_{\|\rho\|_{L^q(s_0)} \leqslant 1} \left|\int_X f\rho\, ds_0\right| \leqslant \sup_{\|\sigma\|_{\cup} \leqslant 1} \left|\int_X f\, d\sigma\right| = \|\lambda_f\|_{\cup'},$$

ce qui entraîne bien que $\|\lambda_f\|_{\cup'} = \|f\|_{\cup}$.

2° *L'image de* Σ *par* l *est dense dans* $B(\cap')$.

On a $\|f\|_{\cap} = \|\lambda_f\|_{\cup'} = \sup_{\sigma\in\Sigma} |(\lambda_f, \sigma)| = \sup_{\sigma\in\Sigma} |(f, l_\sigma)|$. Pour que $|(f, l_\sigma)| \leqslant 1$ quel que soit $\sigma \in \Sigma$, il faut et il suffit que $\|f\|_{\cap} \leqslant 1$. La polaire dans $\cap$ de l'image $l(\Sigma)$ de Σ est donc la boule unité de $\cap$ et le théorème de la bipolaire montre alors que l'adhérence de $l(\Sigma)$ pour la topologie faible $\sigma(\cap', \cap)$ est la boule unité de $\cap'$.

3° *La composée de* l *et* $\backsim$ *est l'application identité :* $\tilde{l}_\sigma = \sigma$.

En effet, d'après les définitions de $\backsim$ et l_σ, on a :

$$(\tilde{f}, l_\sigma) = (f, \tilde{l}_\sigma) = \int_X f\, d\tilde{l}_\sigma \qquad \text{quel que soit} \qquad f \in \mathcal{K},$$
$$(\tilde{f}, l_\sigma) = (\lambda_f, \sigma) = \int_X f\, d\sigma \qquad \text{quel que soit} \qquad f \in \mathcal{K}.$$

On en déduit bien que les mesures bornées $\tilde{l}_\sigma$ et σ sont égales.

4° *L'image de* $B(\cap')$ *par l'application* $\backsim$ *est l'ensemble* Σ.

D'après le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité $B(\cap')$ de $\cap'$ est compacte pour la topologie $\sigma(\cap', \cap)$. Son image par l'application continue $\backsim$ est un compact de $\mathcal{M}$ pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$. Ce compact contient Σ et est contenu dans l'adhérence de Σ pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ d'après 2° et 3°. Comme Σ est compact pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ d'après la proposition I, on en déduit bien la proposition III.

5° *Le dual fort de* Λ *est l'espace normé* $\cup$.

L'orthogonal Λ^0 de Λ dans $\cap'$ est le noyau de l'application transposée $\backsim$ et le dual fort de Λ s'identifie à l'espace quotient $\cap'/\Lambda^0$ muni de la norme quotient ([5], Ch. 4, § 4 et 5) ou encore à l'image de l'application transposée munie de la norme correspondante.

D'après 4°, l'image de l'application transposée est exactement l'ensemble $\cup \subseteq \mathcal{M}$. Il reste donc à comparer les normes dans $\cup$ et dans Λ'. Soit B la boule unité fermée de l'espace quotient $\cap'/\Lambda^0 = \Lambda'$. Identifiée à une partie de $\cup$ ou $\mathcal{M}$, elle contient l'image de $B(\cap')$ par $\backsim$ et est contenue dans l'image de toute boule de rayon $1 + \varepsilon > 1$. D'après 4°, on a donc :

$$\Sigma \subseteq B \subseteq (1 + \varepsilon)\Sigma.$$

Par suite

$$\begin{cases} \|\sigma\|_{\cup} \leqslant 1 \Longrightarrow \|\sigma\|_{\Lambda'} \leqslant 1, \\ \|\sigma\|_{\Lambda'} \leqslant 1 \Longrightarrow \|\sigma\|_{\cup} \leqslant 1 + \varepsilon, \end{cases}$$

d'où

$$\|\sigma\|_{\Lambda'} \leqslant \|\sigma\|_{\cup} \leqslant (1 + \varepsilon)\, \|\sigma\|_{\Lambda'},$$

ce qui montre que $\|\sigma\|_{\cup} = \|\sigma\|_{\Lambda'}$ et donne la proposition IV.

6° *L'application* l *est isométrique.*

D'après l'inégalité (4), on a $\|l_\sigma\|_{\cap'} \leqslant \|\sigma\|_{\cup}$ et d'après 5°) :

$$\|\sigma\|_{\cup} = \|\sigma\|_{\Lambda'} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{K} \\ \|\tilde{f}\|_\Lambda \leqslant 1}} \left| \int_X f \, d\sigma \right| \leqslant \sup_{\substack{\tilde{f} \in \cap \\ \|\tilde{f}\|_\cap \leqslant 1}} \left| \int_X f \, d\sigma \right| = \|l_\sigma\|_{\cap'},$$

ce qui montre bien que $\|\sigma\|_{\cup} = \|l_\sigma\|_{\cap'}$ et achève la démonstration de la proposition II.

On peut se demander à quelles conditions les isométries l et λ sont surjectives. Une réponse est donnée par la proposition suivante.

Proposition V. — α) *L'application* l *est un isomorphisme si et seulement si l'image* $\tilde{\mathcal{K}}$ *de* $\mathcal{K}$ *est dense dans* $\cap$ *(c'est-à-dire si* $\Lambda = \cap$*).*

β) *L'application* λ *est un isomorphisme si et seulement si la boule unité* $B(\cap)$ *de l'espace* $\cap$ *est compacte pour la topologie faible* $\sigma(\cap, l(\cup))$ *(et alors on a* $\Lambda'' = \cap$*).*

Démonstration. — Les applications l et λ sont transposées l'une de l'autre ainsi que $\sim$ et $\backsim$. Les propriétés de dualité montrent que :

α) l'image de l'application $\sim$ est dense dans $\cap$ si et seulement si $\backsim$ est injective c'est-à-dire si et seulement si l est surjective (d'après 3° et 4°);

β) la polaire de $\lambda(B(\cap))$ est l'image réciproque par l de la boule unité de $\cap'$ c'est-à-dire la boule unité $B(\cup)$ de $\cup$. Donc l'adhérence de $\lambda(B(\cap))$ pour $\sigma(\cup', \cup)$ est le compact $B(\cup')$, ce qui permet d'obtenir facilement le résultat.

La condition de compacité intervenant dans β a été introduite par T. S. Pitcher [17]. Il a montré que, si $p > 1$, elle est réalisée en particulier si S est dominé c'est-à-dire s'il existe une mesure positive bornée μ telle que toutes les mesures de S soient absolument continues par rapport à μ. Cette condition est elle-même réalisée si S est compact pour la topologie affaiblie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ (voir [11], 4.23.4).

Une conséquence du théorème III donné plus loin est donc que $\alpha \Longrightarrow \beta$ et qu'on peut énoncer le résultat suivant :

Proposition VI. — *Si $p > 1$, l'espace $\cap$ est réflexif si et seulement si $\mathcal{K}$ est dense dans $\cap$.*

4. Prolongements de l'application canonique $\mathcal{K} \to \cap$.

Soit $\mathcal{M}'$ le dual de l'espace $\mathcal{M}$ muni de sa norme et soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}'$ contenant $\mathcal{K}$.

On sait que $\mathcal{K}$ est dense dans $\mathcal{M}'$ pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}', \mathcal{M})$ donc que $\mathcal{K}$ est dense dans $\mathcal{F}$ pour la topologie $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{M})$. Si l'application canonique $\sim$: $\mathcal{K} \to \cap$ se prolonge en une application $\mathcal{F} \to \cap$ continue pour les topologies faibles $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ et $\sigma(\cap, \cap')$, on notera encore cette application $\sim$ et on l'appellera aussi application canonique de $\mathcal{F}$ dans $\cap$.

Un raisonnement classique de dualité ([12], [11], § 9.3) permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème I. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) L'application canonique $\mathcal{F} \to \cap$ existe et est continue pour les topologies faibles $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ et $\sigma(\cap, \cap')$.

b) L'ensemble Σ est compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Ces conditions entrainent les propriétés suivantes :

c) L'image $\widetilde{B(\mathcal{K})}$ de la boule unité de $\mathcal{K}$ est dense dans l'image $\widetilde{B(\mathcal{F})}$ de la boule unité de $\mathcal{F}$.

d) L'image $\tilde{\mathcal{K}}$ *de* $\mathcal{K}$ *est dense dans l'image* $\tilde{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ (autrement dit : $\tilde{\mathcal{F}} \subseteq \Lambda$).

Remarque I. — Dans le cas où $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de fonctions universellement mesurables et bornées (considérées comme éléments de $\mathcal{M}$) tel que l'application canonique (au sens du paragraphe 1) soit continue pour $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{M})$ et $\sigma(\cap, \cap')$, on vérifie facilement que les deux définitions de l'application canonique coïncident. Pour un tel espace, les quatre propriétés *a*), *b*), *c*) et *d*) sont équivalentes.

Remarque II. — Dans *c*) et *d*), la condition de densité est relative indifféremment à la topologie de la norme ou à la topologie affaiblie $\sigma(\cap, \cap')$. Les ensembles qui interviennent sont en effet convexes et leurs adhérences sont les mêmes pour ces deux topologies.

Remarque III. — On peut prendre pour espace $\mathcal{F}$ un espace dont l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}$ pour la norme $\| \ \|_{\mathcal{M}}$ contienne $\mathcal{K}$. En effet, la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \overline{\mathcal{F}})$ et $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ ont mêmes restrictions à tout ensemble borné de $\mathcal{M}$, en particulier à S et Σ. D'autre part, si l'application canonique existe, elle est continue pour les topologies définies par les normes $\| \ \|_{\mathcal{M}}$ et $\| \ \|_{\cap}$.

Dans le théorème I, la condition *b*) est une condition portant sur l'ensemble Σ. Pour obtenir une condition analogue portant sur l'ensemble S, il faut faire une hypothèse supplémentaire sur l'espace $\mathcal{F}$. Nous formulerons cette hypothèse au moyen d'une structure intervenant d'une manière naturelle dans certains problèmes d'analyse harmonique (voir Th. V et [3]).

On sait qu'on peut munir $\mathcal{M}'$ d'une structure d'algèbre stellaire commutative ([9], Ch. I, § 6) en définissant un « produit d'Arens » ([1], [10]) de la manière suivante :

— A $m \in \mathcal{M}$ et $\varphi \in \mathcal{K}$, on associe l'élément m_φ de $\mathcal{M}$ défini par

$$(m_\varphi, \psi) = \int_X \psi\varphi \, dm \qquad \text{quel que soit} \qquad \psi \in \mathcal{K}$$

— A $\Phi \in \mathcal{M}'$ et $m \in \mathcal{M}$, on associe l'élément Φ_m de

$\mathcal{M}$ défini par

$$(\Phi_m, \varphi) = \int_X \varphi \, d\Phi_m = (\Phi, m_\varphi) \qquad \text{quel que soit} \qquad \varphi \in \mathcal{K}.$$

— On définit le produit $\Phi\Psi$ de deux éléments Φ et Ψ de $\mathcal{M}'$ par

$$(\Phi\Psi, m) = (\Psi, \Phi_m) \qquad \text{quel que soit} \qquad m \in \mathcal{M}.$$

L'involution est définie par

$$(\Phi^*, m) = \overline{(\Phi, \overline{m})} \qquad \text{quel que soit} \qquad m \in \mathcal{M}$$

Le produit d'Arens prolonge à $\mathcal{M}'$ le produit ponctuel défini sur $\mathcal{K}$ et coïncide avec celui-ci lorsque Φ et Ψ sont représentées par des fonctions.

Le calcul fonctionnel dans les algèbres stellaires ([9], Ch. I, § 6) permet de définir l'application $\Phi \longmapsto (\Phi\Phi^*)^{\frac{p}{2}} = |\Phi|^p$ dans $\mathcal{M}'$, cette application prolongeant la même application définie sur les fonctions.

Si s est une mesure positive bornée, l'application $L^1(s) \to \mathcal{M}$ qui associe à l'élément r de $L^1(s)$ la mesure $r\,ds$ de densité r par rapport à s est continue et sa transposée $h : \mathcal{M}' \to L^\infty(s)$ est un homomorphisme continu d'algèbre stellaire commutative de $\mathcal{M}'$ dans $L^\infty(s)$ (voir [1]).

On a $h(|\Phi|^p) = |h(\Phi)|^p$ et, par suite

$$\int_X |h(\Phi)|^p \, ds = \int_X h(|\Phi|^p) \, ds = (|\Phi|^p, s)$$

Si on note $\|\Phi\|_{L^p(s)}$ la quantité $(|\Phi|^p, s)^{\frac{1}{p}}$, on peut écrire une « inégalité de Hölder » :

$$|(\Phi, r\,ds)| = \left|\int_X h(\Phi)\, r\,ds\right| \leqslant \left(\int_X |h(\Phi)|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |r|^q \, ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$|(\Phi, r\,ds)| \leqslant \|\Phi\|_{L^p(s)} \|r\|_{L^q(s)}$$

Théorème II. — *Soit* $\mathcal{F}$ *une sous-algèbre auto-adjointe de* $\mathcal{M}'$ *dont l'adhérence pour la norme* $\| \ \|_{\mathcal{M}'}$ *contient* $\mathcal{K}$. *Les conditions a) et b) du théorème* I *sont équivalentes à :*

b') L'ensemble S *est (relativement) compact pour la topologie* $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Démonstration. — Compte tenu de la remarque III sur le théorème précédent, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est fermée et est donc une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{M}'$ contenant $\mathcal{K}$.

Supposons que Σ soit compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Comme S s'identifie à une partie de Σ, il est relativement compact pour cette topologie. Comme S est compact pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ par hypothèse, il est fermé pour la topologie plus forte $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ et il est compact pour cette topologie. Donc $b) \Longrightarrow b')$.

Supposons que S soit compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Soit Φ une base de filtre sur Σ. D'après la proposition I, elle admet un point adhérent μ dans Σ pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$. Il suffit de montrer que ce point est aussi adhérent pour la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Reprenons les notations de la démonstration de la proposition I. Φ_0 est une base de filtre convergeant vers μ pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$. On lui a associé une base de filtre Φ'_0 sur S. D'après l'hypothèse, celle-ci admet un point adhérent s_0 pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ et, par suite, pour la topologie plus faible $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$. On a donc $d\mu = \rho\, ds_0$.

Soit Φ'_1 une base d'un filtre sur S plus fin que le filtre de base Φ'_0 et convergeant vers s_0 pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. A tout élément P'_1 de Φ'_1 et à tout élément P_0 de Φ_0, on associe la partie P_2 de Σ formée par les mesures $dm = \rho\, ds$ telles que m appartienne à P_0, s appartienne à P'_1 et la fonction ρ appartienne à la boule unité de $L^q(s)$. L'ensemble $\{P_2\}$ de ces parties est une base Φ_2 d'un filtre plus fin que le filtre de base Φ_0 donc convergeant aussi vers μ pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$. L'ensemble des parties $P'_2 = P'_1 \cap P'_0$ est une base de filtre sur S convergeant vers s_0 pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Supposons que μ ne soit pas limite de Φ_2 pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ et montrons que cette propriété est incompatible avec les hypothèses. Il existe un élément f de $\mathcal{F}$ tel que

$$\limsup_{\Phi_2} |(f, m - \mu)| = \varepsilon > 0.$$

Comme $\mathcal{K}$ est dense dans $L^p(s_0)$, il existe un élément ψ de $\mathcal{K}$ (identifié à un élément de $\mathcal{F}$ noté aussi ψ) tel que

$$\left(\int_X |h(f) - \psi|^p\, ds_0\right)^{\frac{1}{p}} = \|f - \psi\|_{L^p(s_0)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors

$$|(f, m - \mu)| \leqslant |(f - \psi, \mu)| + |(\psi, \mu - m)| + |(\psi - f, m)|.$$

Pour chaque terme du second membre, on a :

$$|(f - \psi, \mu)| = |(f - \psi, \rho\, ds_0)| \leqslant \|f - \psi\|_{L^p(s_0)} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$\lim\limits_{\Phi_2} |(\psi, \mu - m)| = 0$ car ψ appartient à $\mathcal{K}$,

$$|(\psi - f, m)| = |(\psi - f, \rho\, ds)| \leqslant \|\psi - f\|_{L^p(s)} = (|\psi - f|^p, s)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme on a supposé que $\mathcal{F}$ est fermée, $|\psi - f|^p$ appartient à $\mathcal{F}$ et on en déduit que

$$\begin{aligned} \limsup_{\Phi_2} |(\psi - f, m)| &\leqslant \lim_{\Phi_2} (|\psi - f|^p, s)^{\frac{1}{p}} \\ &= (|\psi - f|^p, s_0)^{\frac{1}{p}} = \|\psi - f\|_{L^p(s_0)} < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\varepsilon = \limsup_{\Phi_2} |(f, m - \mu)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$$

d'où la contradiction. L'élément μ de Σ est bien adhérent à Φ_2 donc à Φ_0 et à Φ, ce qui montre que $b') \Longrightarrow b)$.

5. Compacité faible des applications canoniques.

Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions universellement mesurables et bornées et soit $\mathcal{G}$ le sous-espace de $\mathcal{B}$ engendré par les fonctions caractéristiques des fermés de X. Si $\overline{\mathcal{G}}$ est l'adhérence de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{B}$ pour la norme de la convergence uniforme, on a $\mathcal{K} \subseteq \overline{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{B}$ et il est intéressant d'appliquer à $\overline{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{B}$ les théorèmes I et II compte tenu du résultat suivant de Grothendieck ([12], p. 150) :

Une partie P *de l'espace* $\mathcal{M}$ *est relativement compacte pour la topologie affaiblie* $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ *si et seulement si elle est relativement compacte pour la topologie faible* $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{G})$.

Rappelons qu'on dit qu'une application linéaire T d'un espace normé E dans un espace de Banach F est faiblement compacte (resp. compacte) si elle transforme la boule unité de E en une partie relativement faiblement compacte (resp. relativement compacte) de F. Une application ayant cette propriété est continue et sa transposée ${}^t\mathrm{T}$ a la même propriété, la réciproque étant vraie : T est faiblement compacte (resp. compacte) si et seulement si ${}^t\mathrm{T}$ est faiblement compacte (resp. compacte). ([11], ch. 9).

Ces divers résultats permettent de déduire des théorèmes I et II l'énoncé suivant ($\mathcal{F}$ désignant un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach $\mathfrak{M}'$ dont l'adhérence pour la norme contient $\mathcal{K}$) :

Théorème III. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

a) L'application canonique $\mathcal{B} \to \cap$ *est continue pour* $\sigma(\mathcal{B}, \mathfrak{M})$ *et* $\sigma(\cap, \cap')$.

a') L'application canonique $\mathcal{G} \to \cap$ *est continue pour* $\sigma(\mathcal{G}, \mathfrak{M})$ *et* $\sigma(\cap, \cap')$.

a'') L'application canonique $\mathfrak{M}' \to \cap$ *existe et est continue pour* $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ *et* $\sigma(\cap, \cap')$.

b) L'ensemble Σ *est compact pour la topologie affaiblie* $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ *ou* $\sigma(\mathfrak{M}, \mathcal{G})$.

b') L'ensemble S *est (relativement) compact pour la topologie affaiblie* $\sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ *ou* $\sigma(\mathfrak{M}, \mathcal{G})$.

c) $\widetilde{\mathrm{B}(\mathcal{K})}$ *est dense dans* $\widetilde{\mathrm{B}(\mathcal{G})}$ *ou* $\widetilde{\mathrm{B}(\mathcal{B})}$.

d) $\tilde{\mathcal{K}}$ *est dense dans* $\tilde{\mathcal{G}}$ *ou* $\tilde{\mathcal{B}}$.

e) $\widetilde{\mathrm{B}(\mathcal{F})}$ *est relativement compacte pour* $\sigma(\cap, \cap')$.

f) Les applications canoniques $\mathcal{F} \to \cap$ *sont faiblement compactes.*

6. Compacité des applications canoniques.

Pour que l'application canonique $\mathcal{F} \to \cap$ soit compacte, il est nécessaire que les mesures s de S soient toutes *atomiques* ([7], § 5, n° 10). Cette propriété intervient à cause du résultat suivant.

Lemme — *Soit* α *une mesure de Radon positive bornée. L'image canonique de la boule unité de* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathrm{L}^p(\alpha)$ *est* *(relativement) compacte pour la topologie de la norme* $\| \ \|_{L^p(\alpha)}$ *si et seulement si la mesure* α *est atomique.*

Démonstration. — Supposons que la mesure α soit atomique. Comme α est bornée, elle est portée par un ensemble au plus dénombrable I. Étant donné une suite quelconque d'éléments de la boule unité $B(\mathcal{B})$ de $\mathcal{B}$, on peut en extraire par le procédé diagonal une suite qui converge ponctuellement sur I vers une fonction f appartenant à $B(\mathcal{B})$. L'image canonique de cette suite est une suite convergente dans $L^p(\alpha)$ vers l'image de f. L'image canonique de $B(\mathcal{B})$ est donc (relativement) compacte.

Supposons que la mesure α ne soit pas atomique.

On peut décomposer α en une somme $\mu + \nu$ d'une mesure atomique μ portée par un ensemble au plus dénombrable I et d'une mesure diffuse ν non nulle ([7], § 5, n° 10).

Il existe une partie mesurable A de X telle que

$$\nu(A) = k > 0.$$

Lorsque E parcourt l'ensemble des parties mesurables de A, l'ensemble des valeurs de $\nu(E)$ est l'intervalle $[0, k]$ ([7] § 5, ex. 7). On construit une suite de fonctions f_n appartenant à la boule unité de $\mathcal{B}$ de la façon suivante :

— Il existe une partie mesurable E_1 de E telle que $\nu(E_1) = \dfrac{k}{2}$; la fonction f_1 sera la fonction caractéristique de l'ensemble $E_1 \cap \complement I$.

— Il existe deux parties mesurables $E_2 \subseteq E_1$ et $E_3 \subseteq E - E_1$ telles que $\nu(E_2) = \nu(E_3) = \dfrac{k}{2^2}$; la fonction f_2 sera la fonction caractéristique de l'ensemble $(E_2 \cup E_3) \cap \complement I \dots$ etc.

La suite $\{f_n\}$ est telle que $\|f_n - f_m\|_{L^p(\alpha)} = \left(\dfrac{k}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ pour $n \neq m$. Elle n'admet donc aucune sous-suite convergente et l'image canonique de la boule unité de $\mathcal{B}$ n'est certainement pas (relativement) compacte.

THÉORÈME IV. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

α) *Les applications canoniques* $\mathcal{F} \to \cap$ *sont compactes pour* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}'$.

β) *L'ensemble* Σ *est un ensemble de mesures atomiques compact pour la topologie de la norme dans* $\mathcal{M}$.

γ) *L'ensemble* S *est un ensemble de mesures atomiques (relativement) compact pour la topologie de la norme dans* $\mathcal{M}$.

Démonstration. — Supposons que l'application canonique $\mathcal{K} \to \cap$ soit compacte. Elle est faiblement compacte et continue; sa transposée est continue. On en déduit, d'après la proposition III, que Σ est relativement compact pour la topologie de la norme. Comme Σ et $S \subseteq \Sigma$ sont vaguement compacts (proposition I), ces deux ensembles sont fortement fermés donc fortement compacts.

D'après le théorème III, l'image de la boule unité de $\mathcal{K}$ est alors dense dans l'image de la boule unité de $\mathcal{B}$, qui est donc aussi relativement compacte : l'application $\mathcal{B} \to \cap$ donc compacte.

Si s est une mesure quelconque appartenant à S, l'application canonique $\cap \to L^p(s)$ est continue car $\|f\|_{L^p(s)} \leqslant \|\tilde{f}\|_{\cap}$. L'image de la boule unité de $\mathcal{B}$ dans L^p doit donc être relativement compacte. Le lemme montre que cela entraîne que les mesures de S (et par suite de Σ) doivent être atomiques. On a donc $\alpha) \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow \gamma)$.

Supposons que S soit un ensemble compact de mesures atomiques. Soit I la plus petite partie de X portant toutes les mesures de S.

Chaque mesure σ de Σ est une mesure atomique portée par I. Les ensembles S et Σ s'identifient donc à des parties de l'espace de Banach $\mathcal{M}(I)$ des mesures bornées sur l'espace discret I ou de l'espace de Banach $l^1(I)$ des suites sommables indexées par I. Or, on sait que dans $l^1(I)$, les ensembles compacts pour la topologie de la norme et les ensembles compacts pour la topologie affaiblie $\sigma(l^1(I), l^\infty(I))$ sont les mêmes ([5] ch. IV, § 5, ex. 4). L'ensemble S est compact pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}(I), l^\infty(I))$ et le théorème II, appliqué à l'espace $X = I$ et à l'espace $\mathcal{F} = \mathcal{B} = l^\infty(I)$, montre que Σ est compact pour $\sigma(l^1(I), l^\infty(I))$ donc est compact pour la norme dans $\mathcal{M}(I)$ ou $\mathcal{M}(X)$. Par suite $\gamma) \Longrightarrow \beta)$.

Supposons que Σ soit un ensemble compact de mesures atomiques. La proposition III montre que l'application transposée $\backsim$ est compacte; l'application $\sim : \mathcal{K} \to \cap$ est aussi compacte ainsi que les applications $\mathcal{F} \to \cap$ d'après le théorème III. Donc $\beta) \Longrightarrow \alpha)$.

B. ESPACES $\cap$ SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

1. Définitions - Notations.

On suppose maintenant que X est un groupe localement compact commutatif G.

Soit Γ le groupe localement compact commutatif dual de G. C'est l'ensemble des caractères unitaires de G, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues γ définies sur G et à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes de module 1 telles que

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

On notera $\langle \gamma, x \rangle$ les valeurs $\gamma(x)$ de γ.

L'opération de Γ est la multiplication ponctuelle des fonctions γ et la topologie de Γ est la topologie de la convergence compacte, c'est-à-dire de la convergence uniforme sur les compacts de G ([9], ch. II, § 1).

On utilisera dans la suite les propriétés classiques de la transformation de Fourier (Bourbaki [9], Rudin [16]). Si μ est un élément de $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$, on notera $\hat{\mu}$ sa transformée de Fourier qui est définie sur Γ par

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \langle \gamma, x \rangle \, d\mu(x).$$

La fonction $\hat{\mu}$ appartient à l'espace $\mathcal{C}(\Gamma)$ des fonctions continues et bornées sur Γ ou, d'une manière plus précise, à l'espace $\mathcal{C}_u(\Gamma)$ des fonctions uniformément continues et bornées sur Γ.

L'application $\frown : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{C}_u(\Gamma)$ est continue pour les topologies définies par les normes. Elle admet une application transposée $\mathcal{C}'_u(\Gamma) \to \mathcal{M}'(G)$ qu'on notera aussi $\frown$:

$$(\mu, \hat{\lambda}) = (\hat{\mu}, \lambda) \qquad \text{quel que soit} \qquad \mu \in \mathcal{M}(G).$$

La restriction de cette application à $\mathcal{M}(\Gamma)$ identifiée à un sous-espace de $\mathcal{C}'_u(\Gamma)$, est une application de $\mathcal{M}(\Gamma)$ dans $\mathcal{C}_u(G)$; quel que soit $\mu \in \mathcal{M}(G)$, on a

$$(\mu, \hat{\nu}) = \langle \hat{\mu}, \nu \rangle = \int_\Gamma \int_G \langle \gamma, x \rangle \, d\mu(x) \, d\nu(\gamma)$$

donc
$$\hat{\nu}(x) = \int_\Gamma \langle \gamma, x \rangle \, d\nu(\gamma).$$

2. Continuité de l'application $\Gamma \to \cap$.

Les fonctions γ définissent des éléments $\tilde{\gamma}$ de l'espace $\cap$. On peut étudier la continuité de l'application $\Gamma \to \cap$ ainsi définie, le groupe Γ étant muni de sa topologie et $\cap$ de la topologie de la norme ou de la topologie affaiblie $\sigma(\cap, \cap')$.

La topologie sur l'espace $\mathcal{M}$ qui intervient ici est la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ qu'on appelle « topologie étroite ».

Si H est une partie de $\mathcal{M}$, une condition suffisante pour que H soit relativement compact pour la topologie étroite est la « condition de Prokhorov »:

L'ensemble H *est borné en norme et, à tout* $\varepsilon > 0$, *on peut associer un compact* K_ε *de* G *tel que* $\sup_{h \in H} \int_{\complement K_\varepsilon} dh < \varepsilon$

Si H est constitué de mesures positives, cette condition est aussi nécessaire ([8], § 5, n° 5).

Rappelons que si S est ensemble de mesures positives, les conditions suivantes sur S sont équivalentes [1]:

c) S est relativement compact pour la topologie étroite.

c') $\hat{S}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ muni de la topologie de la convergence compacte.

(1) Les relations $c \Longrightarrow c' \Longrightarrow c''$ sont classiques ([8], § 5, ex. 13).
La démonstration de $c'' \Longrightarrow c$ utilise un critère de convergence étroite donné dans la référence citée et un théorème de Grothendieck ([11], § 8-12-8).

Soit $\mathfrak{U}$ une base d'ultrafiltre sur S. Son image $\hat{\mathfrak{U}}$ dans $\hat{S}$ converge ponctuellement vers $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ et donc $\lim_{s, \mathfrak{U}} \hat{s}(0) = \varphi(0)$. D'autre part, si $k \in \mathcal{K}(\Gamma)$ et si K est le support de k, $\hat{S}|_K$ est relativement compact pour la topologie affaiblie $\sigma(\mathcal{C}K)), \mathcal{C}'(K))$ et $\hat{\mathfrak{U}}$ restreint à K converge pour cette topologie vers $\varphi|_K$. En considérant $k\,d\gamma$ comme un élément de $\mathcal{C}'(K)$, on a

$$\lim_{s, \mathfrak{U}} \int_\Gamma \hat{s}\, k \, d\gamma = \int_\Gamma \varphi k \, d\gamma \quad \text{quel que soit} \quad k \in \mathcal{K}(\Gamma),$$

ce qui montre que $\mathfrak{U}$ converge étroitement vers la mesure μ telle que $\hat{\mu} = \varphi$.

c'') $\hat{S}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ muni de la topologie de la convergence ponctuelle.

Les conditions qu'on obtient en remplaçant « relativement compact » par « compact » sont aussi équivalentes entre elles.

THÉORÈME V. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'application* $\Gamma \to \cap$ *est continue pour la topologie de la norme sur* $\cap$.

b) *L'application* $\Gamma \to \cap$ *est continue pour la topologie affaiblie* $\sigma(\cap, \cap')$.

c) *L'ensemble* $\hat{S}$ *est (relativement) compact pour la topologie étroite.*

c') *L'ensemble* $\hat{S}$ *est (relativement) compact dans* $\mathcal{C}(\Gamma)$ *muni de la topologie de la convergence compacte.*

c'') *L'ensemble* $\hat{S}$ *est (relativement) compact dans* $\mathcal{C}(\Gamma)$ *muni de la topologie de la convergence ponctuelle.*

d) *L'ensemble* $\hat{S}$ *est équicontinu à l'origine.*

DÉFINITION. — *Lorsque les conditions a) ou b) sont vérifiées, on dit simplement que l'application* $\Gamma \to \cap$ *est continue.*

Démonstration. — Comme S est fermé pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{K})$ donc pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{C})$, la compacité relative de S pour $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ entraîne la compacité et les trois conditions c), c') et c'') sont équivalentes.

Supposons que $\hat{S}$ soit équicontinu à l'origine.

Les éléments de $\hat{S}$ sont des fonctions définies-positives et par suite,

$$|\hat{s}(\gamma_0) - \hat{s}(\gamma)|^2 \leqslant 2\hat{s}(0)\mathcal{R}(\hat{s}(0) - \hat{s}(\gamma_0 - \gamma)).$$

L'ensemble $\hat{S}$ est donc uniformément équicontinu et, d'après le théorème d'Ascoli, est relativement compact dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ muni de la topologie de la convergence compacte. On en déduit que $d) \Rightarrow c')$.

Le théorème d'Ascoli montre immédiatement que $c') \Rightarrow d)$.

Supposons que S soit relativement compact pour la topologie étroite.

Il vérifie la condition de Prokhorov : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\sup_{s \in S} \int_{CK} ds \leqslant \varepsilon^p$. Le compact K étant ainsi fixé, il existe un voisinage V de γ_0 dans Γ tel que, pour tout $\gamma \in V$, on ait

$$\sup_{x \in K} |\langle \gamma_0, x \rangle - \langle \gamma, x \rangle| < \varepsilon.$$

Alors,

$$\|\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\gamma}\|_\cap = \sup_{s \in S} \left(\int_G |\langle \gamma_0, x \rangle - \langle \gamma, x \rangle|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \sup_{s \in S} \left(\int_K + \int_{CK} \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\varepsilon^p + 2^p \varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant 3\varepsilon.$$

Cela montre la continuité de $\Gamma \to \cap$ en un point quelconque γ_0 de Γ pour la topologie de la norme et par suite pour la topologie affaiblie. Donc $c) \Longrightarrow a) \Longrightarrow b)$.

Supposons que l'application $\Gamma \to \cap$ soit continue pour la topologie affaiblie.

Soit l un élément de $\cap'$. La fonction φ_l définie sur Γ par

$$\varphi_l(\gamma) = (l, \tilde{\gamma})$$

est continue et vérifie la condition d'Eberlein ([16] § 1.9) :

$$\sum_{i=1}^{I} c_i \varphi_l(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{I} c_i (l, \tilde{\gamma}_i) = (l, \widetilde{\sum_{i=1}^{I} c_i \gamma_i})$$
$$\left| \sum_{i=1}^{I} c_i \varphi_l(\gamma_i) \right| \leqslant \|l\|_{\cap'} \|\widetilde{\Sigma c_i \gamma_i}\|_\cap \leqslant \|l\|_{\cap'} \|\Sigma c_i \gamma_i\|_\infty .$$

Il existe donc une mesure μ_l telle que

$$\varphi_l(\gamma) = \hat{\mu}_l(\gamma) = \int_G \langle \gamma, x \rangle \, d\mu_l(x).$$

Si σ est une mesure de $\cup$, et si l_σ est l'élément de $\cap'$ qui lui est associé, on a

$$(l_\sigma, \tilde{\gamma}) = \int_G \langle \gamma, x \rangle \, d\sigma(x) \qquad \text{donc} \qquad \varphi_{l_\sigma} = \hat{\sigma} \qquad \text{et} \qquad \mu_{l_\sigma} = \sigma.$$

Soit $\mathcal{M}_d(\Gamma)$ l'espace des combinaisons linéaires finies de mesures ponctuelles sur Γ. L'application $\mathcal{M}_d(\Gamma) \to \cap$ définie par $\sum_{i=1}^{I} a_i \delta_{\gamma_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{I} a_i \tilde{\gamma}_i$ est évidemment linéaire et admet pour application transposée $\cap' \to \mathcal{C}(\Gamma)$ l'application $l \longmapsto \varphi_l$. Ces applications sont donc continues pour les topologies faibles correspondantes. L'image de la boule unité de $\cap'$ est compacte dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ muni de $\sigma(\mathcal{C}, \mathcal{M}_d)$ qui coïncide avec la topologie de la convergence ponctuelle. Comme $\varphi_{l_\sigma} = \hat{\sigma}$, l'ensemble $\hat{\Sigma}$ est une partie de cette image et $\hat{\Sigma}$ est donc relativement compact dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ pour la topologie de la convergence ponctuelle. On en déduit que $b) \Longrightarrow c'')$.

Remarque. — Si (et seulement si) les conditions du théorème V sont réalisées, l'ensemble $\hat{\Sigma}$ est compact pour les topologies étroite, de la convergence compacte et de la convergence ponctuelle. D'après la proposition III, l'ensemble $\hat{\Sigma}$ est alors l'image de la boule unité $B(\cap')$ de $\cap'$ pour l'application $\cap' \to \mathcal{C}(\Gamma)$ définie par $l \longmapsto \varphi_l$.

3. Compacité relative de l'image de $\Gamma \to \cap$.

Théorème VI. — *On suppose que l'application* $\Gamma \to \cap$ *est continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) L'image $\tilde{\Gamma}$ *de* $\Gamma \to \cap$ *est relativement faiblement compact.*

b) L'ensemble $\hat{\Sigma}$ *est (relativement) faiblement compact dans* $\mathcal{C}(\Gamma)$.

c) L'ensemble $\hat{S}$ *est (relativement) faiblement compact dans* $\mathcal{C}(\Gamma)$.

Démonstration. — Les ensembles $\hat{S}$ et $\hat{\Sigma}$ sont des parties de $\mathcal{C}_u(\Gamma)$. Sur ces ensembles, la topologie faible coïncide avec la topologie $\sigma(\mathcal{C}_u, \mathcal{C}'_u)$. Transportée sur S et Σ, cette topologie est la topologie $\sigma(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{C}'_u})$. L'équivalence de $b)$ et $c)$ résultera du théorème II lorsqu'on aura démontré que $\widehat{\mathcal{C}'_u}$ est une sous-algèbre autoadjointe de $\mathcal{M}'$ dont l'adhérence contient $\mathcal{K}$.

Cette dernière condition est réalisée car $\widehat{\mathcal{C}'_u}$ contient l'ensemble $A(G)$ des transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\Gamma)$ dont l'adhérence contient l'espace $\mathcal{C}_0(G)$ des fonctions continues nulles à l'infini.

D'autre part, $\mathcal{C}'_u$ peut être muni d'une structure d'algèbre involutive en définissant un « produit de Buck » de la manière suivante [4] :

— A $\varphi \in \mathcal{C}_u$ et $\gamma \in \Gamma$, on associe l'élément φ_γ de $\mathcal{C}_u$ défini par

$$\varphi_\gamma(\gamma') = \varphi(\gamma + \gamma') \qquad \text{quel que soit} \qquad \gamma' \in \Gamma,$$

— A $\mu \in \mathcal{C}'_u$ et $\varphi \in \mathcal{C}_u$, on associe l'élément μ_φ de $\mathcal{C}_u$ défini par

$$\mu_\varphi(\gamma) = (\mu, \ \varphi_\gamma) \qquad \text{quel que soit} \qquad \gamma \in \Gamma.$$

— On définit le produit $\lambda * \mu$ de deux éléments λ et μ de $\mathcal{C}'_u$ par

$$(\lambda * \mu, \varphi) = (\lambda, \mu_\varphi) \qquad \text{quel que soit} \qquad \varphi \in \mathcal{C}_u.$$

L'involution est définie par $(\lambda^*, \varphi) = \overline{(\lambda, \overline{\varphi_-})}$ quel que soit $\varphi \in \mathcal{C}_u$, avec $\varphi_-(\gamma) = \varphi(-\gamma)$.

Il faut vérifier que l'application $\wedge$ est un homomorphisme d'algèbres involutives de $\mathcal{C}'_u(\Gamma)$ dans $\mathcal{M}'(G)$. On obtient facilement $\widehat{\lambda^*} = \hat{\lambda}^*$. Pour le produit, on a

$$(\widehat{\lambda * \mu}, m) = (\lambda * \mu, \hat{m}) = (\lambda, \mu_{\hat{m}}) \qquad \text{quel que soit} \qquad m \in \mathcal{M}(G),$$
$$(\hat{\lambda}\hat{\mu}, m) = (\hat{\lambda}, (\hat{\mu})_m) = (\lambda, \widehat{\hat{\mu}_m}) \qquad \text{quel que soit} \qquad m \in \mathcal{M}(G).$$

On a donc à vérifier que $\mu_{\hat{m}} = \widehat{\hat{\mu}_m}$ comme éléments de $\mathcal{C}_u(\Gamma)$ donc comme éléments de $L^\infty(\Gamma)$. Pour tout $\alpha \in L^1(\Gamma)$, on a

$$(\mu_{\hat{m}}, \alpha) = \int_\Gamma (\mu, \ \hat{m}_\gamma)\alpha(\gamma)\, d\gamma = \int_\Gamma (\hat{\mu}, \ \gamma\, dm)\alpha(\gamma)\, d\gamma$$

car

$$\hat{m}_\gamma(\gamma') = \int_G \langle \gamma + \gamma', \ x\rangle\, dm\,(x) = \int_G \langle \gamma', \ x\rangle\langle \gamma, \ x\rangle\, dm\,(x) = \widehat{\gamma\, dm}(\gamma'),$$

$\gamma\, dm$ notant la mesure de densité γ par rapport à m. Or l'application $\Gamma \to \mathcal{M}(G)$ définie par $\gamma \longmapsto \gamma\, dm$ est continue et bornée. Elle est intégrable par rapport à la mesure bornée $\alpha\, d\gamma$ et on a

$$\int_\Gamma (\hat{\mu}, \ \gamma\, dm)\alpha(\gamma)\, d\gamma = (\hat{\mu}, \ \int_\Gamma \gamma\alpha(\gamma)\, d\gamma\, dm) = (\hat{\mu}, \ \hat{\alpha}\, dm).$$

Par ailleurs, on a

$$(\widehat{\hat{\mu}_m}, \alpha) = (\hat{\mu}_m, \hat{\alpha}) = (\hat{\mu}, m_{\hat{\alpha}}) = (\hat{\mu}, \hat{\alpha}\, dm).$$

Donc

$$(\widehat{\hat{\mu}_m}, \alpha) = (\mu_{\hat{m}}, \alpha) \qquad \text{quel que soit} \qquad \alpha \in L^1(\Gamma).$$

On en déduit bien que $\mu_{\hat{m}} = \widehat{\hat{\mu}_m}$ et donc $\widehat{\lambda * \mu} = \hat{\lambda}\hat{\mu}$, ce qui achève la démonstration de l'équivalence de b) et c).

Supposons que $\tilde{\Gamma}$ soit relativement compacte.

Comme $\Gamma \to \cap$ est continue, l'application $\mathcal{M}_d(\Gamma) \to \cap$ introduite dans la démontration du théorème V est continue pour les topologies $\sigma(\mathcal{M}_d, \mathcal{C})$ et $\sigma(\cap, \cap')$. L'image de la boule unité de $\mathcal{M}_d(\Gamma)$ est l'enveloppe convexe équilibrée de $\tilde{\Gamma}$. D'après le théorème de Krein ([10], § 8-13), cet ensemble est relativement faiblement compact et l'application $\mathcal{M}_d(\Gamma) \to \cap$ est faiblement compacte. Sa transposée $\cap' \to \mathcal{C}(\Gamma) \subseteq (\mathcal{M}_d(\Gamma))'$ est aussi faiblement compacte. L'image $\hat{\Sigma}$ de la boule unité de $\cap'$ est donc relativement compacte dans $(M_d(\Gamma))'$ pour la topologie $\sigma((M_d)', (M_d)'')$. Comme $\mathcal{C}(\Gamma)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $(M_d(\Gamma))'$, l'image de la boule unité de $\cap'$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ pour $\sigma(\mathcal{C}, \mathcal{M}'')$ qui coïncide avec $\sigma(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$. Par suite, on a $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c)$.

Supposons que $\hat{\Sigma}$ soit relativement faiblement compacte.

Les deux applications $\mathcal{M}_d \to \cap$ et $\cap' \to \mathcal{C}(\Gamma)$ sont faiblement compactes et comme Γ s'identifie à une partie de la boule unité de $\mathcal{M}_d(\Gamma)$, on en déduit que $b) \Longrightarrow a)$.

THÉORÈME VII. — *On suppose que l'application* $\Gamma \to \cap$ *est continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) L'image $\tilde{\Gamma}$ *de* $\Gamma \to \cap$ *est relativement compacte.*

b) L'ensemble $\hat{\Sigma}$ *est un ensemble de fonctions presque périodiques (relativement) compact dans* $\mathcal{C}(\Gamma)$ *muni de la norme de la convergence uniforme.*

c) L'ensemble $\hat{S}$ *est un ensemble de fonctions presque périodiques (relativement) compact dans* $\mathcal{C}(\Gamma)$ *muni de la norme de la convergence uniforme.*

Démonstration. — Rappelons qu'on dit qu'une fonction continue et bornée définie sur Γ est presque-périodique si l'ensemble de ses translatées est relativement compact dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ et que toute fonction presque-périodique peut s'obtenir comme limite uniforme d'une suite de combinaisons linéaires finies de caractères unitaires (sur Γ) ([14], § 41). La transformée de Fourier d'une mesure bornée atomique est presque-périodique et la transformée de Fourier d'une mesure bornée diffuse non nulle n'est pas presque-périodique ([16], § 5-6-9). L'espace des fonctions presque-périodiques muni de la norme de la convergence uniforme s'identifie à l'espace $\mathcal{C}(\Gamma_c)$ des fonctions continues sur un groupe compact Γ_c contenant Γ comme sous-groupe dense et dont le dual est le groupe G_d (groupe G muni de la topologie discrète) ([16], § 1.8).

Supposons que $\tilde{\Gamma}$ soit relativement compacte.

Comme dans la démonstration du théorème VI, on montre que $\hat{\Sigma}$ et $\hat{S}$ sont (relativement) compacts dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ pour la topologie de la norme. D'autre part, comme Σ est un ensemble de mesures invariant par multiplication par les caractères unitaires, l'ensemble $\hat{\Sigma}$ est invariant par translation. L'ensemble des translatées de chaque fonction de $\hat{\Sigma}$ est donc relativement compact; les fonctions de $\hat{\Sigma}$ (et de $\hat{S}$) sont presque-périodiques. On a donc $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c)$.

Supposons que $\hat{S}$ soit ensemble de fonctions presque-périodiques compact dans $\mathcal{C}(\Gamma)$.

L'ensemble S est alors un ensemble de mesures atomiques sur G (ou sur G_d) et s'identifie à une partie de l'espace $\mathcal{M}(G_d)$. L'ensemble $\hat{S}$ s'identifie à une partie compacte de l'espace $\mathcal{C}(\Gamma_c)$. Le théorème V, appliqué aux groupes G_d et Γ_c, montre que l'application $\Gamma_c \to \cap$ est continue. Comme Γ s'identifie à une partie du compact Γ_c, on en déduit bien que $\tilde{\Gamma}$ est relativement compacte dans $\cap$. Par suite $c) \Longrightarrow a)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Arens, Operations induced in function classes, *Monat. für Math.*, 55 (1951), 1-19.

[2] J. P. Bertrandias, Espaces de fonctions continues et bornées en moyenne asymptotique d'ordre p, *Supp. Bull. Soc. Math. France*, nº 5 (1966).

[3] J. P. BERTRANDIAS, Opérateurs invariants par translation sur les espaces de Marcinkiewicz (à paraître : *Journ. Math. pures et appl.* (1972)).
[4] R. C. BUCK, Operator algebras and dual spaces, *Proc. Am. Math. Soc.*, 3 (1952), 681-687.
N. BOURBAKI, Éléments de mathématiques, Hermann.
[5] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Ch. 3 à 5 (1955).
[6] N. BOURBAKI, Intégration, Ch. 1 à 4, 2e éd. (1965).
[7] N. BOURBAKI, Intégration, Ch. 5, 2e éd. (1965).
[8] N. BOURBAKI, Intégration, Ch. 9 (1969).
[9] N. BOURBAKI, Théories spectrales, Ch. 1-2 (1967).
[10] P. CIVIN et B. YOOD, The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra, *Pacific Journ. of Math.*, 11 (1961), 847-870.
[11] R. E. EDWARDS, Functional Analysis — Holt, Rinehart and Winston (1965).
[12] A. GROTHENDIECK, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), *Can. J. Math.*, 5 (1963), 129-173.
[13] E. HEWITT, et K. A. ROSS, Abstract harmonic analysis. Vol. II, Springer (1970).
[14] L. H. LOOMIS, An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand (1953).
[15] G. LUMER, Algèbres de fonctions et espaces de Hardy. Lectures Notes in Math. nº 75, Springer (1968).
[16] W. RUDIN, Fourier Analysis on groups. Interscience (1962).
[17] T. S. PITCHER, A more general property than domination for sets of probability measures. *Pacific Journ. of Math.*, 15 (1965), 597-611.

Manuscrit reçu le 5 juin 1971.

Jean-Paul BERTRANDIAS
Université Scientifique et Médicale de Grenoble
Institut de Mathématiques Pures
B.P. 116, 38-Saint-Martin-d'Hères (France).