Annales de l'institut Fourier

Bent Fuglede

Connexion en topologie fine et balayage des mesures

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 3 (1971), p. 227-244
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_227_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,3 (1971), 227-244

CONNEXION EN TOPOLOGIE FINE ET BALAYAGE DES MESURES

par Bent FUGLEDE

A première vue la *topologie fine,* introduite par H. Cartan en théorie classique du potentiel, semble peu maniable. Elle n'admet aucune partie compacte infinie, et elle n'a pas de base dénombrable (ni même la propriété de Lindelöf). De plus elle n'est pas normale (bien que complètement régulière). Ces inconvénients cependant ne sont pas sérieux. D'abord Doob [9] a établi un principe "quasi Lindelöf" pour la topologie fine qui suffit pour les raisonnements de dénombrabilité. Il y a également une propriété utile de "quasi normalité" pour la topologie fine.

En réponse à une question posée par C. Berg j'ai montré dans [10] que la topologie fine est localement connexe, et que tout ouvert connexe pour la topologie initiale est finement connexe. Ceci s'applique même dans le cadre axiomatique de Brelot dans le cas noté (A_1) (avec l'axiome de domination qui est indispensable)(1). Voir les théorèmes 2 et 4 ci-dessous.

La méthode de démonstration s'appuie sur la théorie du balayage des mesures (notamment celui de la mesure de Dirac ε_x), et on obtient en même temps de nouveaux résultats sur le balayage. Dans le travail présent (qui contient et étend la prépublication [10]) on va approfondir ces recherches sur le balayage des mesures et donner une réponse affirmative à la question centrale laissée ouverte dans [10], en montrant (th. 5 bis) que le support fin de la mesure balayée ε_x^B de ε_x sur une base B (ne contenant pas le point x) constitue *toute* la frontière fine de la composante fine de x dans $\complement B$. De plus, cette composante fine s'identifie au complémentaire $\complement B_x$ de la base la plus grande

---

(1) M. Berg a observé que l'espace harmonique associé à l'équation de chaleur est finement totalement discontinu (i.e. toute composante fine se réduit à un point).

B_x parmi toutes les bases $E \supset B$ telles que $\varepsilon_x^E = \varepsilon_x^B$. La méthode utilisée ici pour la démonstration est limitée au cas d'un espace de Green, mais les résultats restent valables même dans le cas axiomatique indiqué ci-dessus, grâce à une théorie des fonctions finement harmoniques esquissée dans [11]. Dans le cas d'un espace de Green on obtient cependant une caractérisation plus explicite de la base maximale B_x, à savoir l'ensemble des points $\neq x$ en lesquels le potentiel greenien de ε_x^B coïncide avec celui de ε_x. Voir [10], ou le th. 5 bis ci-dessous. Toutes ces propriétés de ε_x^B sont déduites ici des résultats correspondants sur la balayée d'une mesure quelconque μ (théorèmes 3 et 5).

Signalons à ce point que Ng.-Xuan-Loc a trouvé en collaboration avec T. Watanabe une caractérisation probabiliste intéressante des domaines fins, ainsi qu'une démonstration probabiliste indépendante du théorème du support fin de ε_x^B. (Voir [13]).

Table des matières

1. Préliminaires sur le balayage des mesures.

On se place d'abord (§ § 1-4) dans le cadre d'un espace harmonique Ω satisfaisant au groupe d'axiomes (A_1) de la théorie axiomatique de Brelot [3], [4]. Plus précisément :

a) Ω est un espace localement compact (séparé) et non compact, connexe et localement connexe, et à base dénombrable.

b) Le faisceau des fonctions harmoniques satisfait aux axiomes de base 1, 2, et 3.

c) On suppose en outre l'axiome D (de domination) et l'existence d'un potentiel > 0.

Pour tout ensemble $A \subset \Omega$, on désigne par $b(A)$ la *base* de A (ensemble des points de Ω en lesquels A n'est pas effilé). On sait que $A \backslash b(A)$ est toujours polaire, et que $b(A)$ est vide si et seulement si A est polaire. Rappelons que $b(b(A)) = b(A)$, $b(A \cup B) = b(A) \cup b(B)$, et que $A \subset B$ entraîne $b(A) \subset b(B)$. Tout ensemble de la forme $B = b(A)$ s'appelle une base. Toute base est un G_δ , et on a $b(B) = B$. Les ensembles A tels que $b(A) \subset A$ s'identifient aux ensembles fermés pour la topologie *fine* sur Ω. Pour tout ouvert fin A on a $b(A) \supset A$. La frontière fine d'un ensemble $A \subset \Omega$ se note $\partial_f A$.

Toute fonction surharmonique $u \geqslant 0$ dans Ω est finement continue. Pour tout ensemble A on note $u^A = \hat{R}_u^A$, la *balayée* de u sur A. C'est la plus petite fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω qui majore u sur $b(A)$. On a $u^A = u$ sur $b(A)$, et $u^A = u^{b(A)}$ partout dans Ω.

Désignons par $\mathcal{P}_0^c$ le cône convexe des potentiels p sur Ω qui sont finis continus dans Ω et harmoniques hors d'un compact (dépendant de p).

DEFINITION. — *Une mesure (positive, de Radon) μ sur Ω sera dite admissible lorsque*

$$\int p d\mu < +\infty \quad \textit{pour tout} \quad p \in \mathcal{P}_0^c .$$

En particulier, toute mesure à support compact est admissible. Dans la théorie classique du potentiel newtonien dans $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 3$) une mesure μ est admissible si et seulement si $\int (1 + |x|)^{2-n} d\mu(x) < +\infty$.

Le procédé de balayage des fonctions surharmoniques induit par dualité le balayage des mesures (voir M$^{\text{me}}$ Hervé [12] pour les mesures à support compact, et Constantinescu [7] pour les mesures admissibles) :

Pour toute mesure admissible μ et toute partie A de Ω il existe une mesure μ^A et une seule telle que

$$\int u d\mu^{\mathrm{A}} = \int u^{\mathrm{A}} d\mu \ \left(= \int \hat{\mathrm{R}}_u^{\mathrm{A}} d\mu\right)$$

pour tout potentiel $u \in \mathcal{P}_0^c$, et alors aussi pour toute fonction surharmonique $u \geqslant 0$.

Noter que μ^{A} est encore admissible puisque $u^{\mathrm{A}} \leqslant u$. De plus, $\mu^{\mathrm{A}} = \mu^{b(\mathrm{A})}$. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E} \subset \mathrm{B}$ et $\mu^{\mathrm{A}} = \mu^{\mathrm{B}}$ il vient $\mu^{\mathrm{A}} = \mu^{\mathrm{E}}$.

Le théorème clef pour les recherches présentes est le résultat suivant dû à Brelot [1, n° 12], [2] dans le cas classique, et étendu par M^me^ Hervé [12, n° 28] au cadre axiomatique actuel (toujours pour μ à support compact) :

THEOREME 1. – *Soit μ une mesure admissible sur Ω et* A *une partie de Ω. Alors*

a) *μ^{A} est portée par $b(\mathrm{A})$.*

b) *$\mu^{\mathrm{A}} = \mu$ si et seulement si μ est portée par $b(\mathrm{A})$.*

c) *L'implication* $[\mu(\mathrm{E}) = 0] \Rightarrow [\mu^{\mathrm{A}}(\mathrm{E}) = 0]$ *a lieu pour tout ensemble polaire* E, *ainsi que pour toute partie* E *de l'intérieur fin de* A.

Démonstration. – On se ramène au cas connu d'une mesure à support compact en représentant la mesure admissible μ comme limite croissante de ses traces μ_n sur une suite croissante de compacts $\mathrm{K}_n \subset \Omega$ de réunion Ω. Pour tout $\mathrm{A} \subset \Omega$ les mesures balayées μ_n^{A} forment encore une suite croissante, dont la limite (vague) ν s'identifie à μ^{A} parce que

$$\int u d\nu = \lim_n \int u d\mu_n^{\mathrm{A}} = \lim_n \int u^{\mathrm{A}} d\mu_n = \int u^{\mathrm{A}} d\mu = \int u d\mu^{\mathrm{A}}$$

pour toute fonction surharmonique $u \geqslant 0$.

COROLLAIRE. – *Si μ est portée par $b(\complement\mathrm{A})$, il en est de même pour μ^{A}, qui est alors portée par $b(\mathrm{A}) \cap b(\complement\mathrm{A}) \subset \partial_f \mathrm{A}$*(²).

Noter que l'énoncé b) du théorème 1 contient la caractérisation

---

(²) On verra plus loin (cor. du lemme 6) que $b(\mathrm{A}) \cap b(\complement\mathrm{A}) = b(\partial_f \mathrm{A})$ pour toute partie A d'un espace de Green Ω. Ce résultat s'étend au cas axiomatique présent (voir [11, § 1.2]).

bien connue $\varepsilon_x^A \neq \varepsilon_x$ de l'effilement de A en x. (On pose ε_x = la mesure de Dirac de support $\{x\}$).

2. La connexion fine de l'espace Ω.

THEOREME 2. — *L'espace Ω est finement connexe (ainsi que toute partie ouverte et connexe de Ω pour la topologie initiale). Tout ensemble $E \subset \Omega$ de frontière fine $\partial_f E$ polaire est lui-même polaire ou bien le complémentaire d'un polaire.*

Démonstration. — Soit $\partial_f E$ polaire. Si $\complement E$ est non polaire on pose A = l'intérieur fin et B = l'adhérence fine de E, donc $B \setminus A = \partial_f E$. Alors $\complement B$ est non polaire, et il existe $x \in \complement B$. En vertu du corollaire du th. 1, ε_x^E est portée par $\partial_f E$. Comme ε_x ne charge pas le polaire $\partial_f E$, il en est de même pour ε_x^E d'après c) du th. 1. D'où $\varepsilon_x^E = 0$, et E est polaire. Si $\partial_f E$ est vide, l'ensemble polaire E ou $\complement E$ est vide puisque finement ouvert. Pour tout domaine partiel $\omega \subset \Omega$ on sait que les fonctions harmoniques dans ω satisfont aux mêmes axiomes rappelés plus haut, et la topologie fine sur ω est induite par celle sur Ω. ‖

3. La base maximale B_μ.

LEMME 3.1. — *Soient* A, B *deux parties de Ω telles que* $A \subset B$ (*ou seulement* $b(A) \subset b(B)$). *Alors*

$$(u^A)^B = u^A = (u^B)^A \ , \ (\mu^A)^B = \mu^A = (\mu^B)^A$$

pour toute fonction surharmonique $u \geqslant 0$ sur Ω, resp. pour toute mesure admissible μ. En particulier,

$$[\mu^A = \mu^B] \Leftrightarrow [\mu^B \textit{ est portée par } b(A)] \ .$$

Démonstration. — Comme $(u^A)^B = u^A$ sur $b(B)$, donc $= u$ sur $b(A)$ ($\subset b(B)$), il vient $(u^A)^B \geqslant u^A$, et par suite $(u^A)^B = u^A$. L'identité $(u^B)^A = u^A$ résulte de ce que $u^B = u$ sur $b(B)$ ($\supset b(A)$). Les autres identités s'en déduisent par dualité. Enfin, la dernière équivalence résulte du th. 1 b) pour la mesure admissible μ^B puisque $(\mu^B)^A = \mu^A$. ‖

LEMME 3.2. — *Soient* $A \subset \Omega$ *finement ouvert et* $B \subset \Omega$ *finement fermé tels que* $A \subset B$. *Alors* $\mu^B = \mu^{B\setminus A}$ *pour toute mesure admissible* μ *qui ne charge ni* $\dot{A}$ *ni l'ensemble polaire* $e = (B\setminus A)\setminus b(B\setminus A)$.

Démonstration. — D'après c) du th. 1 on a $\mu^B(A \cup e) = 0$, donc il résulte de a) que μ^B est portée par $b(B)\setminus(A \cup e) = b(B\setminus A)$; d'où le résultat d'après le lemme 3.1. ||

THEOREME 3. — *Soient* $B \subset \Omega$ *une base et* μ *une mesure admissible sur* Ω.

a) *Parmi toutes les bases* $E \supset B$ *telles que* $\mu^E = \mu^B$, *il en existe une plus grande, notée* B_μ ; *et on a* $\mu(B_\mu\setminus B) = 0$.

b) *Toute composante finement connexe* U *de* $\complement B_\mu$ *est un* F_σ *tel que* $\mu(U) > 0$(³).

c) *Si* $\mu(B) = 0$, *la mesure balayée* $\mu^B = \mu^{B_\mu}$ *est portée par* $\partial_f B_\mu$, *et aussi par la frontière fine* $\partial_f V$ *de la réunion* V *de toutes les composantes fines de* $\complement B$ *chargées par* μ(⁴).

Démonstration. — On peut supposer $\mu \neq 0$ (sinon on a $B_\mu = \Omega$).

Ad a). Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les bases $E \supset B$ telles que $\mu^E = \mu^B$, ou de façon équivalente

$$\int u^E d\mu = \int u^B d\mu (< +\infty) \tag{1}$$

pour tout potentiel $u \in \mathcal{P}_0^c$. Soient E_1, $E_2 \in \mathcal{E}$, et montrons que $b(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{E}$ et $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$. D'abord $B \subset b(E_1 \cap E_2) \subset E_1$ entraîne $\int u^{b(E_1 \cap E_2)} d\mu = \int u^B d\mu$ et par suite $b(E_1 \cap E_2) \in \mathcal{E}$. Puis il vient

$$\int u^B d\mu \leqslant \int u^{E_1 \cup E_2} d\mu \leqslant \int (u^{E_1} + u^{E_2} - u^{E_1 \cap E_2})\, d\mu = \int u^B d\mu,$$

et par suite $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$. Désignons par B_μ la réunion de la famille $\mathcal{E}$. Pour montrer que $B_\mu \in \mathcal{E}$, considérons un potentiel $u \in \mathcal{P}_0^c$. Les balayées u^E ($E \in \mathcal{E}$) forment une famille filtrante croissante de fonc-

---

(³) On montre en fait plus généralement que $\mu^*(U) > 0$ pour toute composante fine U de $\complement(B_\mu \cup e)$ lorsque $e \subset \Omega$ est polaire et que $\mu(e) = 0$.

(⁴) Ce dernier énoncé sera précisé dans le th. 5 ci-dessous pour le cas d'un espace de Green (et dans [11, § 3.3] pour le cas axiomatique).

tions surharmoniques dans Ω avec la même intégrale finie (1) par rapport à $\mu \neq 0$. L'enveloppe supérieure

$$\nu := \sup\{u^{\mathrm{E}} \mid \mathrm{E} \in \mathscr{E}\}$$

est donc surharmonique dans Ω puisque $\int \nu d\mu = \int u^{\mathrm{B}} d\mu < +\infty$. Sur toute base $\mathrm{E} \in \mathscr{E}$ on a $\nu \geqslant u^{\mathrm{E}} = u$. Cela montre que $\nu \geqslant u$ sur B_μ ; d'où $\nu \geqslant u^{\mathrm{B}_\mu}$. D'autre part, $u^{\mathrm{B}_\mu} \geqslant u^{\mathrm{E}}$ et $b(\mathrm{B}_\mu) \supset b(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{E} \in \mathscr{E}$. Il en résulte que $u^{b(\mathrm{B}_\mu)} = u^{\mathrm{B}_\mu} = \nu$ et que $b(\mathrm{B}_\mu) \supset \mathrm{B}_\mu \supset \mathrm{B}$. Comme

$$\int u^{b(\mathrm{B}_\mu)} d\mu = \int \nu d\mu = \int u^{\mathrm{B}} d\mu$$

pour tout $u \in \mathscr{R}_0^c$ il vient $b(\mathrm{B}_\mu) \in \mathscr{E}$, donc $b(\mathrm{B}_\mu) \subset \mathrm{B}_\mu$, et enfin $\mathrm{B}_\mu = b(\mathrm{B}_\mu) \in \mathscr{E}$. Pour la trace λ de μ sur $\mathrm{B}_\mu \backslash \mathrm{B}$ on a

$$\lambda = \lambda^{\mathrm{B}_\mu} \leqslant \mu^{\mathrm{B}_\mu} = \mu^{\mathrm{B}} .$$

Il en résulte que λ est portée par B ; d'où $\lambda = 0$ et $\mu(\mathrm{B}_\mu \backslash \mathrm{B}) = 0$.

Ad b). Soit $e \subset \Omega$, e polaire, $\mu(e) = 0$. Montrons d'abord que $\mu(\mathrm{U}) = 0$ entraîne $\mathrm{U} = \emptyset$ lorsque U est une partie finement ouverte et relativement finement fermée de l'ouvert fin $\complement(\mathrm{B}_\mu \cup e)$. Utilisons pour cela le lemme 3.2 pour le fermé fin $\mathrm{F} := \mathrm{U} \cup (\mathrm{B}_\mu \cup e)$ et l'ouvert fin $\mathrm{U} \subset \mathrm{F}$. On trouve $\mathrm{F} \backslash \mathrm{U} = \mathrm{B}_\mu \cup e$, $b(\mathrm{F} \backslash \mathrm{U}) = \mathrm{B}_\mu$. Comme

$$\mu(\mathrm{U}) = \mu(e) = 0$$

il vient

$$\mu^{b(\mathrm{F})} = \mu^{\mathrm{F}} = \mu^{\mathrm{F} \backslash \mathrm{U}} = \mu^{\mathrm{B}_\mu \cup e} = \mu^{\mathrm{B}_\mu} = \mu^{\mathrm{B}} .$$

Comme $b(\mathrm{F}) \supset \mathrm{B}_\mu \supset \mathrm{B}$ il résulte par la définition de B_μ que $b(\mathrm{F}) = \mathrm{B}_\mu$, et par suite $\mathrm{U} \subset b(\mathrm{U}) \subset b(\mathrm{F}) = \mathrm{B}_\mu$ (puisque U est supposé finement ouvert) ; d'où $\mathrm{U} = \emptyset$. Cela achèvera la démonstration de b) dès qu'on aura montré que Ω est finement localement connexe. Cette propriété découle cependant de ce qu'on vient déjà de montrer ici (voir le § 4, notamment le cor. 1 du th. 4).

Ad c). Toute composante fine de $\complement \mathrm{B}_\mu$ est non négligeable pour μ d'après b), et se prolonge en une composante fine (non négligeable) de $\complement \mathrm{B}$. Ceci montre que $\complement \mathrm{B}_\mu \subset \mathrm{V} (\subset \complement \mathrm{B})$, et par suite que $\partial_f \mathrm{B} \cap \partial_f \mathrm{B}_\mu \subset \partial_f \mathrm{V}$. D'où le résultat ; car $\mu^{\mathrm{B}} = \mu^{\mathrm{B}_\mu}$ est portée par $\partial_f \mathrm{B} \cap \partial_f \mathrm{B}_\mu$ selon le cor. du th. 1. En fait, μ est portée par chacun des ouverts fins $\complement \mathrm{B}$ et $\complement \mathrm{B}_\mu$, donc aussi par sa base. ||

Remarque. – C'est seulement la trace $\mu_{\complement B}$ de μ sur $\complement B$ qui intervient dans B_μ. Cela résulte aisément de b) du th. 1 en vertu de l'additivité du balayage. On pourrait donc se ramener au cas $\mu = \mu_{\complement B}$, autrement dit $\mu(B) = 0$. Dans ce cas il vient $\mu(B_\mu) = 0$ puisque $\mu(B_\mu \setminus B) = 0$ d'après a).

Il résulte de la partie de b) établie plus haut que $\complement(B_\mu \cup e)$ est finement connexe pourvu que e soit un polaire tel que $\mu(e) = 0$, et que μ soit portée par une partie finement connexe de $\complement(B_\mu \cup e)$. Ceci s'applique en particulier dans le cas $\mu = \varepsilon_x$, $x \in \complement B$. Dans ce cas on écrira B_x au lieu de B_{ε_x} pour la base maximale, et on a alors $x \in \complement B_x$ parce que $\varepsilon_x(B_x) = \varepsilon_x(B) = 0$. D'où les énoncés b), c) du th. 4 ci-dessous.

4. La connexion locale de la topologie fine.

DEFINITION. – *Un ouvert fin* $V \subset \Omega$ *est dit régulier si* $\complement V$ *est une base, autrement dit : si* $\complement V$ *est ineffilé en tout point de la frontière fine* $\partial_f V$ *(donc en tout point de* $\complement V$*).*

Il s'agit d'une extension de la notion habituelle d'ensemble ouvert régulier (pour la topologie initiale). Pour tout ouvert fin U, $\complement b(\complement U)$ est le plus petit ouvert fin et régulier qui contient U. Noter que tout ouvert fin et régulier est un F_σ pour la topologie initiale.

THEOREME 4. – a) *L'espace* Ω *est localement connexe pour la topologie fine. Les ouverts fins, finement connexes, et réguliers forment une base pour la topologie fine.*

b) *Soit* B *une base,* $x \in \complement B$, *et* e *un ensemble polaire tel que* $x \in \complement e$. *L'ouvert fin* $\complement(B_x \cup e)$ *est alors finement connexe et contient* x(5).

c) *La mesure balayée* $\varepsilon_x^B = \varepsilon_x^{B_x}$ *de* ε_x *sur une base* $B (x \in \complement B)$ *est portée par* $\partial_f B_x$, *et aussi par la frontière fine de la composante finement connexe de* x *dans* $\complement B$(6).

(5) On note B_x $(= B_{\varepsilon_x})$ la base la plus grande parmi toutes les bases $E \supset B$ telles que $\varepsilon_x^E = \varepsilon_x^B$ (voir le th. 3 a)).

(6) Plus précisément cette composante fine de x dans $\complement B$ n'est rien que $\complement B_x$, et sa frontière fine $\partial_f B_x$ est le plus petit ensemble finement fermé qui porte ε_x^B. (Voir le th. 5 bis ci-dessous pour le cas greenien, et [11, § 3.3] pour le cas général).

Démonstration. – Selon la fin de la remarque au th. 3 il nous reste seulement à vérifier l'énoncé a). Comme la topologie fine est régulière, tout voisinage fin U d'un point $x \in \Omega$ contient un voisinage fin et finement fermé V. Si on pose $B = b(\complement V)$, on a $x \in \complement B \subset V$, et par suite

$$x \in \complement B_x \subset \complement B \subset V \subset U ,$$

avec $\complement B_x$ finement ouvert et régulier, et de plus finement connexe d'après b) (utilisé pour e vide). ||

COROLLAIRE 1. – *Toute composante fine d'un ouvert fin* $U \subset \Omega$ *est finement ouverte. Elle est régulière (donc un* F_σ*) lorsque* U *est régulier.*

COROLLAIRE 2. – *L'ensemble des composantes finement connexes d'un ouvert fin* U *est dénombrable.*

Cela provient de la propriété "quasi Lindelöf" de la topologie fine, découverte par Doob [9, th. 7.1], grâce au corollaire précédent. Car il y a une famille dénombrable de composantes fines de U qui couvre U à un polaire près ; et ce polaire est lui-même une réunion de composantes fines de U, donc finement ouvert, et par suite vide.

5. Le support fin d'une mesure balayée.

Selon un théorème de Getoor (voir aussi Choquet [6]) toute mesure μ sur Ω qui ne charge aucun ensemble polaire possède un *support fin,* noté $\mathrm{supp}_f\, \mu$. C'est le plus petit ensemble finement fermé qui porte μ. Evidemment $\mathrm{supp}_f\, \mu$ est une *base.*

En particulier la balayée μ^A d'une mesure admissible sur un ensemble A tel que $\mu(b(A)) = 0$ possède un support fin. Car μ^A est portée par $b(A)$ et ne charge pas les polaires $e \subset b(A)$ d'après le th. 1.

D'ailleurs l'existence du support fin de $\mu^A = \mu^{b(A)}$ (lorsque $\mu(b(A)) = 0$) sera établie dans le théorème ci-dessous, au moins pour le cas d'un espace de Green, de façon indépendante du théorème de Getoor.

Signalons cependant que ce résultat, ainsi que *tous les énoncés des §§ 5 et 6 dans lesquels n'intervient pas le noyau de Green (ou* *les potentiels greeniens) s'étendent au cas axiomatique présent (voir § 1).* Ceci sera démontré dans un travail ultérieur par application de la théorie des fonctions finement harmoniques (voir aussi [11]).

Dans tout ce qui suit on se restreint au cas d'un *espace de Green* Ω (voir Brelot et Choquet [5]). On désigne par G le noyau de Green pour Ω et par $G\mu$ le potentiel de Green d'une mesure admissible μ sur Ω. On sait que $(G\mu)^A = G(\mu^A)$ (noté aussi $G\mu^A$) pour tout ensemble $A \subset \Omega$. En particulier $G\mu^A = G\mu$ partout dans $b(A)$.

Soit alors B une base dans l'espace de Green Ω, et soit μ une mesure admissible sur Ω. On pose

$$I(\mu) = \{y \in \Omega \mid G\mu(y) = +\infty\} .$$

C'est un ensemble polaire. De plus on considère la base la plus grande B_μ parmi toutes les bases $E \supset B$ telles que $\mu^E = \mu^B$ (voir le th. 3).

THEOREME 5. — a) B_μ *est la base* $b(A)$ *de l'ensemble finement fermé*

$$A := \{y \in \Omega \mid G\mu^B(y) = G\mu(y)\} ,$$

et on a

$$A \backslash I(\mu) \subset B_\mu \subset A .$$

b) *On a* $\partial_f B_\mu \subset \partial_f B$. *De plus, si la trace* μ_B *de* μ *sur* B *possède un support fin, il en est de même pour la balayée* μ^B *de* μ *sur* B, *et*

$$\operatorname{supp}_f(\mu^B) = \operatorname{supp}_f(\mu_B) \cup \partial_f B_\mu .$$

En particulier, $\operatorname{supp}_f(\mu^B) = \partial_f B_\mu$ *lorsque* $\mu(B) = 0$.

c) *Les composantes fines de* $\complement B_\mu$ *sont identiques aux composantes fines de* $\complement B$ *chargées par* μ.

Démonstration. — On peut supposer B non vide. Ad a). Sans utiliser l'existence de l'élément le plus grand B_μ de l'ensemble $\mathcal{E}$ de toutes les bases $E \supset B$ telles que $\mu^E = \mu^B$ (voir le th. 3) on peut raisonner comme suit : Pour tout $E \in \mathcal{E}$ on a $G\mu^B = G\mu^E = G\mu$ dans E, donc $E \subset A$ et par suite $E = b(E) \subset b(A)$. En particulier $B \subset b(A)$. D'autre part la relation $G\mu^B = G\mu$ dans A montre que

$$G\mu^A = \hat{R}^A_{G\mu} \leqslant G\mu^B \leqslant G\mu^A$$

puisque $B \subset A$. Il en résulte que $\mu^{b(A)} = \mu^A = \mu^B$, et par suite que $b(A)$ est bien le plus grand élément de $\mathcal{E}$, donc $b(A) = B_\mu$.

Tout point y de l'ensemble polaire

$$e := A\backslash(b(A) \cup I(\mu))$$

est finement isolé dans A parce que $e \subset A\backslash b(A)$. Comme de plus $I(\mu)$ est finement fermé il existe un voisinage fin et finement ouvert V de y tel que l'adhérence fine de V ne rencontre $A \cup I(\mu)$ qu'au point y, vu que la topologie fine est régulière. Selon le cor. du th. 1, la mesure balayée $\varepsilon_y^{\complement V}$ est portée par $\partial_f V \subset \complement(A \cup I(\mu))$; d'où $G\mu^B < G\mu$ presque partout pour $\varepsilon_y^{\complement V}$. D'autre part $G\varepsilon_y^{\complement V} = G\varepsilon_y$ partout dans $b(\complement V)$, en particulier dans la base B puisque

$$B \subset B_\mu = b(A) \subset A\backslash\{y\} \subset \complement V .$$

Comme $B \neq \emptyset$ ceci montre que $\varepsilon_y^{\complement V} \neq 0$, et il vient alors

$$\int G\mu^B d\varepsilon_y^{\complement V} < \int G\mu d\varepsilon_y^{\complement V} = \int G\varepsilon_y^{\complement V} d\mu \leqslant \int G\varepsilon_y \, d\mu = G\mu(y) , \quad (2)$$

$$\int G\mu^B d\varepsilon_y^{\complement V} = \int G\varepsilon_y^{\complement V} d\mu^B = \int G\varepsilon_y d\mu^B = \int G\mu^B d\varepsilon_y = G\mu(y) . \quad (3)$$

On utilise ici pour la première inégalité dans (2) l'hypothèse $y \in e \subset \complement I(\mu)$, donc $G\mu(y) < +\infty$, et par suite $\int G\mu d\varepsilon_y^{\complement V} < +\infty$. Pour la dernière égalité dans (3), noter que $y \in e \subset A$. Ainsi l'hypothèse de l'existence d'un point $y \in e$ aboutit à une contradiction. Par conséquent $e = \emptyset$, et $A\backslash I(\mu) \subset B_\mu = b(A) \subset A$.

Ad b) Considérons d'abord le cas $\mu(B) = 0$; d'où $\mu(B_\mu) = 0$ d'après le th. 3 a). En vertu du th. 1, $\mu^B = \mu^{B_\mu}$ est portée par $\partial_f B_\mu$. Soit $S \subset \partial_f B_\mu$ un fermé fin qui porte μ^B, et montrons que $S = \partial_f B_\mu$. Selon c) du th. 1, μ^B ne charge pas le polaire $S\backslash b(S)$, contenu dans $S \subset \partial_f B_\mu \subset B_\mu$, donc négligeable pour μ. En remplaçant au besoin S par $b(S)$ on peut supposer de plus que S est une base. Il suffit de montrer que $\partial_f B_\mu \subset S \cup I(\mu)$; car $I(\mu)$ est polaire, et $\partial_f B_\mu$ est une base selon le cor. du lemme 6 ci-dessous (dont la démonstration ne dépend que de l'énoncé a) du présent théorème).

Pour montrer qu'en fait $\partial_f B_\mu \subset S \cup I(\mu)$ (dans le cas $\mu(B) = 0$), raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un point $y \in (\partial_f B_\mu)\backslash(S \cup I(\mu))$, et désignons par S_y la base la plus grande parmi toutes les bases $E \supset S$ telles que $\varepsilon_y^E = \varepsilon_y^S$ (voir le th. 3 ou 4). L'ouvert fin $\complement(S_y \cup I(\mu))$ contient $y \in \partial_f B_\mu$, donc rencontre l'ouvert fin $\complement B_\mu$, soit

$$z \in \complement(B_\mu \cup S_y \cup I(\mu)) .$$

Il existe un voisinage fin et finement fermé W de z tel que

$$W \subset \complement(B_\mu \cup S_y \cup I(\mu)) .$$

En particulier $y \notin W$, car $y \in B_\mu$. En remplaçant au besoin W par $b(W)$ on peut supposer de plus que W est une base. La base $W \cup S_y$ contient S_y strictement puisque $z \in W \subset \complement S_y$; d'où $\varepsilon_y^{W \cup S_y} \neq \varepsilon_y^{S_y}$ par la définition de S_y. Le dernier énoncé du lemme 3.1 montre donc que $\varepsilon_y^{W \cup S_y}$ n'est pas portée par S_y. Comme elle est bien portée par $W \cup S_y$ il résulte que l'ouvert fin $V = \complement(W \cup S_y)$ est un voisinage fin de y tel que $\varepsilon_y^{\complement V}$ charge W. D'après a) on a $G\mu^B < G\mu$ dans W, tandis que $G\mu^B(y) = G\mu(y)$; car

$$W \subset \complement(B_\mu \cup I(\mu)) \subset \complement A , \quad y \in B_\mu \subset A .$$

On est amené ainsi encore aux relations contradictoires (2), (3) ci-dessus puisque $\varepsilon_y^{\complement V}$ charge W. Par conséquent il vient $S = \partial_f B_\mu$, ce qui signifie que $\partial_f B_\mu$ est bien le support fin de μ^B (et c'est une base).

Dans le cas général, la décomposition $\mu = \mu_B + \nu$ avec $\nu = \mu_{\complement B}$ donne $\mu^B = \mu_B + \nu^B$ puisque $(\mu_B)^B = \mu_B$ selon b) du th. 1. Il en résulte que

$$\operatorname{supp}_f(\mu^B) = \operatorname{supp}_f(\mu_B) \cup \operatorname{supp}_f(\nu^B) .$$

D'où le résultat ; car $\nu(B) = 0$, et par suite $\operatorname{supp}_f(\nu^B) = \partial_f B_\nu (\subset \partial_f B)$ d'après ce qu'on vient de montrer. Enfin $B_\nu = B_\mu$ selon la remarque à la fin du § 3.

Ad c). On peut encore supposer que $\mu(B) = 0$. Dans la démonstration de l'énoncé c) du th. 3 on a noté que toute composante fine de $\complement B_\mu$ se prolonge en une composante fine et non μ-négligeable de $\complement B$. Reste à montrer que toute composante fine U de $\complement B$ telle que $\mu(U) > 0$ est contenue dans $\complement B_\mu$, donc est une composante fine de $\complement B_\mu$. Or $U \cap \complement B_\mu \neq \emptyset$, car

$$\mu(U \cap \complement B_\mu) = \mu(U) - \mu(U \cap B_\mu) > 0$$

puisque $\mu(U \cap B_\mu) \leqslant \mu(B_\mu \backslash B) = 0$ d'après a) du th. 3. D'autre part $U \cap \partial_f B_\mu = \emptyset$, car $\partial_f B_\mu \subset \partial_f B$ selon b) ci-dessus, et $\partial_f B \subset B \subset \complement U$. D'où le résultat cherché $U \cap B_\mu = \emptyset$ puisque U est finement connexe. ||

COROLLAIRE. – *Pour que* $B_\mu = B$ *il faut et il suffit que* μ *charge chacune des composantes fines de* $\complement B$. *Il suffit donc que* $\complement B$ *soit finement connexe avec* $\mu(\complement B) > 0$.

Remarques. 1) Pour toute base B il existe une mesure admissible μ sur Ω telle que $B_\mu = B$, $\mu(B) = 0$, et $I(\mu) = \emptyset$ (donc $A = B_\mu$). Il suffit de prendre pour μ la trace sur $\complement B$ d'une mesure admissible λ dont le potentiel greenien $G\lambda$ est fini continu et *strict,* p. ex. au sens de Constantinescu [7]. (De façon plus explicite soit λ une mesure admissible de densité finie continue > 0 par rapport à la mesure de Lebesgue sur Ω). Comme alors $G\mu \leqslant G\lambda < +\infty$ partout il vient

$$B_\mu = B_\lambda = \{x \in \Omega \mid G\lambda^B(x) = G\lambda(x)\} = b(B) = B$$

d'après le th. 5 a) et [7, p. 278]([7]).

2) Supposons que $\mu(B) = 0$. Même si $B \cap I(\mu) = \emptyset$ il se peut que $B_\mu \cap I(\mu) \neq \emptyset$, autrement dit que B_μ contienne $A \backslash I(\mu)$ strictement (voir le th. 5 a))([8]).

Dans le cas particulier $\mu = \varepsilon_x$ ($x \in \complement B$), on a cependant toujours $B_\mu \cap I(\mu) = B_x \cap \{x\} = \emptyset$ selon le th. 4 b). Le théorème suivant est donc contenu dans le th. 5 et son corollaire ci-dessus. – Noter qu'il se peut (même dans le cas $\mu = \varepsilon_x$, $x \in \complement B$) que

$$G\varepsilon_x^B(x) = G\varepsilon_x(x) \ (= +\infty)\ ,$$

donc que $B_\mu = A \backslash I(\mu) \neq A$.

THEOREME 5 bis. – *Soit* B *une base dans un espace de Green* Ω, *et soit* $x \in \complement B$.

([7]) Selon le th. 3 c) toutes les composantes fines de $\complement B = \complement B_\mu$ sont chargées par cette mesure μ, et leur ensemble est donc dénombrable. On parvient ainsi à une nouvelle démonstration du cor. 2, § 4, d'abord pour U régulier, puis dans le cas général grâce au th. 6 ci-dessous.

([8]) Posons par exemple $B = b(\partial\omega)$, la base de la frontière usuelle $\partial\omega$ d'un ouvert connexe $\omega \subset \Omega$ tel que $\complement\omega$ est effilé en un point non isolé a de $\partial\omega$ tandis que $\partial\omega$ est ineffilé en tout point de $(\partial\omega)\backslash\{a\}$; d'où $B = (\partial\omega)\backslash\{a\}$. Il est facile de construire une mesure μ portée par l'ensemble des points d'une suite dans $\complement(\omega \cup \partial\omega)$ de limite a, et telle que $G\mu(a) = +\infty$. Evidemment $\mu(B) = 0$ et $B \cap I(\mu) = \emptyset$. De plus ω est finement connexe d'après le th. 2. On voit sans peine que $\omega \cup \{a\}$ est une composante fine de $\complement B$. Comme $\mu(\omega \cup \{a\}) = 0$ il vient $\omega \cup \{a\} \subset B_\mu$ selon c) du th. 5 ; d'où $a \in B_\mu \cap I(\mu)$.

a) *La base la plus grande* B_x *parmi toutes les bases* $E \supset B$ *telles que* $\varepsilon_x^E = \varepsilon_x^B$ *s'exprime comme suit*

$$B_x = \{y \in \Omega \backslash \{x\} \mid G\varepsilon_x^B(y) = G\varepsilon_x(y)\} .$$

b) $\operatorname{supp}_f(\varepsilon_x^B) = \partial_f B_x \, (\subset \partial_f B)$.

c) $\complement B_x$ *est la composante fine de* x *dans* $\complement B$. *En particulier,* $B_x = B$ *équivaut à dire que* $\complement B$ *est finement connexe.*

6. Stabilité des domaines fins par retranchement d'un ensemble polaire.

LEMME 6. — *Soit* x *un point polaire. Les voisinages fins, finement ouverts, et réguliers* W *de* x *tels que* $W \backslash \{x\}$ *(donc aussi* W*) soit finement connexe, forment un système fondamental de voisinages fins de* x.

Démonstration (dans le cas d'un espace de Green). — En vertu de l'énoncé a) du th. 5 bis la symétrie du noyau de Green G entraîne que les relations $y \in \complement B_x$ et $x \in \complement B_y$ sont équivalentes pour toute base B et pour tout $x, y \in \Omega$. Selon la démonstration de l'énoncé a) du th. 4, tout voisinage fin de x contient un voisinage fin V de x de la forme $V = \complement B$ où B est une base telle que $B_x = B$. Comme x n'est pas finement isolé dans Ω, il existe un point $y \in V \backslash \{x\}$, et on a alors $y \in \complement B_x$, donc $x \in \complement B_y$. D'après le th. 4 b) l'ensemble $W := \complement B_y$ est finement ouvert et finement connexe, et il en est de même pour $W \backslash \{x\}$ puisque x est polaire et distinct de y. Enfin $W \subset V$ parce que $B_y \supset B$. ||

COROLLAIRE. — *La frontière fine d'une base est une base. Pour tout ensemble* $A \subset \Omega$ *on a* $b(\partial_f A) = b(A) \cap b(\complement A)$; *et par suite* $\mu^A = \mu^{\partial_f A}$ *pour toute mesure admissible* μ *sur* Ω *portée par* $b(\complement A)$.

Rappelons pour cela que la base d'un ensemble $E \subset \Omega$ est l'ensemble des points de l'adhérence fine de E qui ne sont pas à la fois polaires et finement isolés dans E. Un point polaire $x \in \Omega$ appartient donc à $b(E)$ si et seulement si $(W \backslash \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ pour tout voisinage fin W de x. En vertu du lemme 6 on peut supposer ici

$W\backslash\{x\}$ finement connexe. Alors $(W\backslash\{x\}) \cap \partial_f A \neq O$ équivaut à $(W\backslash\{x\}) \cap A \neq \emptyset$ et $(W\backslash\{x\}) \cap \complement A \neq \emptyset$. Pour un point non polaire $x \in \Omega$ on utilise un voisinage fin et finement connexe W au lieu de $W\backslash\{x\}$. Dans les deux cas ceci montre que $x \in b(\partial_f A)$ équivaut à $x \in b(A) \cap b(\complement A)$. Pour une base A il vient, en particulier,

$$b(\partial_f A) = A \cap b(\complement A) = \partial_f A .$$

Pour A quelconque et pour μ portée par $b(\complement A)$, μ^A est portée par $b(A) \cap b(\complement A) = b(\partial_f A)$ selon le cor. du th. 1. Comme $b(\partial_f A) \subset b(A)$, il résulte du lemme 3.1 que $\mu^{\partial_f A} = \mu^A$. ||

THEOREME 6. — *Si une partie* U *d'un espace de Green* Ω *est finement ouverte et finement connexe, il en est de même pour* $U\backslash e$ *pour tout ensemble polaire* $e \subset U$.

Plus généralement (en apparence) : Pour tout ouvert fin U et tout ensemble polaire e les composantes fines de $U\backslash e$ sont $V\backslash e$ où V parcourt l'ensemble des composantes fines de U.

Démonstration. — L'ensemble polaire e est finement fermé, et tout point de e est finement isolé dans e. Soient V_1, V_2 finements ouverts et disjoints tels que $V_1 \cup V_2 = U\backslash e$. Pour tout point $x \in e$ il existe d'après le lemme 6 un voisinage fin W_x de x tel que $W_x \subset U$ et que $W_x\backslash\{x\}$ est finement connexe et ne rencontre pas e. Comme alors $W_x\backslash\{x\} \subset V_1 \cup V_2$, il en résulte que $W_x\backslash\{x\}$ est contenu dans l'un des ensembles V_1 ou V_2. Pour $i = 1, 2$ soit U_i la réunion de V_i et de l'ensemble des points $x \in e$ pour lesquels $W_x\backslash\{x\} \subset V_i$. On voit que U_1 et U_2 sont finement ouverts et disjoints, et que $U = U_1 \cup U_2$. Comme U est finement connexe, l'un des ensembles $U_i (i = 1, 2)$ est vide, donc aussi l'ensemble V_i correspondant. ||

7. Connexion fine des hypersurfaces.

THEOREME 7. — *Dans un espace de Green de dimension n, toute variété lipschitzienne* V *de dimension* $n - 1$ *qui est connexe pour la topologie initiale, est finement connexe*(9).

(9) Noter que toute variété lipschitzienne V de dimension $\leqslant n - 2$ est polaire, donc finement discrète.

Démonstration. — On se ramène facilement au cas $\Omega = \mathbf{R}^n$, V = une partie ouverte et connexe d'un hyperplan $\mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. (On utilise pour cela le caractère local de l'effilement et son invariance par des transformations lipschitziennes). Sur tout espace euclidien $\mathbf{R}^k$ on a la *topologie approximative* ordinaire (ordinary density topology) introduite implicitement par Denjoy [8] (pour $k = 1$). Les voisinages d'un point $x \in \mathbf{R}^k$ pour cette topologie sont les complémentaires des ensembles $A \subset \mathbf{R}^k \backslash \{x\}$ ayant x comme point de dispersion (ordinaire) par rapport à la mesure de Lebesgue m sur $\mathbf{R}^k$:

$$\lim_{r \to 0} \frac{m^*(A \cap K_r)}{m(K_r)} = 0$$

où K_r désigne la boule de centre x et de rayon r.

On sait que $\mathbf{R}^k$, ainsi que chacun de ses sous-domaines, est connexe pour la topologie approximative. Ce résultat se trouve implicitement chez Denjoy [8] pour $k = 1$, et chez Ridder [14] dans le cas général. Le th. 6 résulte donc du second énoncé du lemme suivant. (De même, le premier énoncé conduit à une nouvelle démonstration de la première partie du th. 2 pour les espaces de Green).

LEMME 7. — *La topologie fine sur* $\mathbf{R}^n$ *est moins fine que la topologie approximative ordinaire sur* $\mathbf{R}^n$. *De plus, la topologie fine induit sur tout hyperplan* $H \subset \mathbf{R}^n$ *une topologie moins fine que la topologie approximative ordinaire sur* $H = \mathbf{R}^{n-1}$.

Démonstration ([10]). — Considérons par exemple le second énoncé qui semble être nouveau. Il s'agit de montrer que tout ensemble $A \subset H$, effilé en un point $x_0 \in H$, y possède la densité ordinaire 0 par rapport à la mesure de Lebesgue m sur $H = \mathbf{R}^{n-1}$. Pour $s > 1$ fixé on pose

---

([10]) Au lieu de s'appuyer sur le critère de Wiener comme ici, on pourrait fonder la démonstration du lemme sur le résultat connu suivant (valable même dans l'axiomatique au début du travail) : Pour tout ensemble A effilé en un point $x \in \complement A$ on a $(\varepsilon_x^{\complement V})^*(A) \to 0$ suivant l'ensemble filtrant décroissant des voisinages réguliers V de x (pour la topologie initiale). Il s'agit alors d'appliquer ce résultat pour un voisinage convenable V de x (une boule dans le premier cas du lemme) et pour ses homothétiques par rapport à x. Dans le second cas on peut choisir V connexe et tel que la frontière ∂V de V est "lisse" et contient une intersphère dans H. Alors $\varepsilon_x^{\complement V} = \varepsilon_x^{\partial V}$ possède une densité finie continue et > 0 sur ∂V par rapport à la mesure-surface sur ∂V ; d'où facilement le résultat.

$$S_p = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid s^{p-1} \leqslant G(x_0 , y) < s^p \} ,$$

$p = 1 , 2, \ldots$, avec $G(x , y) = | x - y |^{2-n}$ pour $n \geqslant 3$ (modification facile pour $n = 2$). Par la définition de la capacité extérieure c^* par rapport au noyau G, il vient

$$m^*(A \cap S_p) \leqslant c^*(A \cap S_p) \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \int_{H \cap S_p} G(x , y)\, dm(y)$$

puisque $A \subset H$. Le potentiel à droite est fini continu, et il existe à cause d'homogénéité une constante finie k (indépendante de p) telle que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}^n} \int_{H \cap S_p} G(x , y)\, dm(y) \leqslant k \int_{H \cap S_p} G(x_0 , y)\, dm(y) .$$

Comme $G(x_0 , y) \leqslant s^p$ pour $y \in S_p$ il en résulte que

$$m^*(A \cap S_p) \leqslant c^*(A \cap S_p)\, k s^p\, m(H \cap S_p) ,$$

et par suite, pour tout $q = 1 , 2, \ldots$,

$$m^* \Big(A \cap \bigcup_{p>q} S_p \Big) \leqslant k\, m \Big(H \cap \bigcup_{p>q} S_p \Big) \sum_{p>q} s^p c^*(A \cap S_p) .$$

D'après le critère d'effilement de Wiener, la somme à droite est finie, donc s'annule pour $q \to +\infty$. D'où le résultat cherché parce que $\bigcup_{p>q} S_p = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid G(x_0 , y) \geqslant s^q \}$ est une boule de centre x_0 dont le rayon s'annule pour $q \to +\infty$. ||

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *J. de Math.* (Liouville), (1940), 319-337.

[2] M. Brelot, Quelques propriétés et applications du balayage, *C.R. Acad. Sci.* (Paris), 227, (1948), 19-21.

[3] M. Brelot, Lectures on potential theory. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay (1960).

[4] M. Brelot, Axiomatique des fonctions harmoniques. Montréal (1966).

[5] M. Brelot et G. Choquet, Espaces et lignes de Green. *Ann. Inst. Fourier*, 3, (1951), 199-263.

[6] G. Choquet, Démonstration non probabiliste d'un théorème de Getoor, *Ann. Inst. Fourier* 15, 2 (1965), 409-414.

[7] C. Constantinescu, Some properties of the balayage of measures on a harmonic space, *Ann. Inst. Fourier*, 17, (1967), 273-293.

[8] A. Denjoy, Sur les fonctions dérivées sommables, *Bull. Soc. Math. France*, 43, (1916), 161-248.

[9] J.L. Doob, Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, (1966), 579-600.

[10] B. Fuglede, Propriétés de connexion en topologie fine. Prépublication. Copenhague (1969).

[11] B. Fuglede, Fine connectivity and finely harmonic functions, *C.R. Congr. Internat. Math.*, Nice (1970).

[12] R.-M. Herve, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, 12, (1962), 415-571.

[13] Ng.-Xuan-Loc and T. Watanabe, A characterization of fine domains for a certain class of Markov processes with applications to Brelot harmonic spaces. (To appear).

[14] J. Ridder, Über approximativ stetigen Funktionen. *Fund. Math.*, 13, (1929), 201-209.

Manuscrit reçu le 3 février 1971

Bent Fuglede
Universitetets Matematiske Institut
Oersted Institutet
Universitetsparken 5
2100 Copenhague (Danemark)