ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SERGE DUBUC

Problèmes relatifs à l'itération de fonctions suggérés par les processus en cascade

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 1 (1971), p. 171-251
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_1_171_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,1 (1971), 171-251

PROBLÈMES RELATIFS A L'ITÉRATION DE FONCTIONS SUGGÉRÉS PAR LES PROCESSUS EN CASCADE

par Serge DUBUC

Dans la première partie de ce travail, j'étudierai les fonctions harmoniques associées à un processus en cascade purement expansif (sans disparition d'individus). J'achèverai la caractérisation des fonctions harmoniques positives extrémales que j'avais entreprise dans deux articles précédents [7 et 8]. Du même coup, je déterminerai le comportement asymptotique des fonctions harmoniques positives extrémales. Ces deux tâches seront exécutées sous l'hypothèse d'une variance finie pour le processus. Ensuite je donnerai un certain nombre d'exemples de fonctions harmoniques et ferai la représentation intégrale de celles qui sont positives.

La deuxième partie de ce travail sera de s'intéresser aux fonctions harmoniques positives qui proviennent en un sens de distributions d'ordre k, c'est-à-dire qui sont issues de fonctionnelles linéaires sur l'espace $C^k[0,1)$. J'obtiendrai un cône de fonctionnelles dont je connaîtrai les génératrices extrémales. La troisième partie de cet article consistera à introduire la fonction de Schröder associée à une fonction f, les opérateurs de dérivation et les principales fonctions qui commutent avec f. Ces dernières fonctions formeront un groupe à un paramètre dont on peut mettre en évidence le générateur infinitésimal. Lorsque la fonction de Schröder fera défaut, on utilisera la fonction de Böttcher.

Dans la dernière partie, j'indiquerai comment la fonction de Schröder ou de Böttcher apporte un précieux secours à l'étude des processus en cascade. En particulier, je démontrerai que si $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ est un processus en cascade, sous la seule hypothèse que le processus a une moyenne fini > 1, on peut trouver une suite M_n telle que Z_n/M_n tend en distribution vers une variable aléatoire qui n'est pas identiquement nulle. Je verrai que les fonctions suffisamment régu-

lières qui commutent avec la fonction génératrice f du processus échangent en un certain sens les fonctions harmoniques extrémales. Je préciserai le comportement asymptotique de la fonction caractéristique $g(\xi)$ de la loi-limite du processus. Je ferai une étude sommaire des processus en cascade indéfiniment divisibles et indiquerai que pour ceux-ci une identité remarquable a lieu entre la fonction de Schröder associée à f et la fonction caractéristique $g(\xi)$. Je terminerai en considérant certaines courbes dans le disque-unité du plan complexe qui sont invariantes par l'action de $f(z)$.

PARTIE I

FONCTIONS HARMONIQUES ASSOCIEES A UN PROCESSUS EN CASCADE

1. Description du champ d'action.

Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$ une série de puissances d'une variable complexe z, où $p(n) \geqslant 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$ (je reprends les notations déjà utilisées dans [7] et [8] avec le seul changement que $f(0) = 0$). Si x et y sont deux entiers naturels, $p(x, y)$ sera le coefficient de z^y dans le développement en série de Taylor de la fonction $(f(z))^x$. Si le sous-groupe engendré par

$$\{n - m \mid p(n) \neq 0 \ , \ p(m) \neq 0\} \quad \text{est} \quad \{0, \pm \mathrm{L}, \pm 2\mathrm{L}, \ldots\}$$

on dira que L est la période de $f(z)$. Si $\mathrm{L} = 1$, on dit que le processus de Galton-Watson est indécomposable. On supposera toujours que $\sum_{1}^{\infty} np(n) < \infty$ et ce dernier nombre, noté M, est considéré comme la moyenne du processus. On supposera de même que $f(z) \neq z^{\mathrm{M}}$ et dans le cas qui nous occupe, on aura donc que $\mathrm{M} > 1$.

On pose $f_n(z) = f(f(\ldots f(z)))$, le produit fonctionnel de $f(z)$, n fois avec elle-même. $p_n(x, y)$ est le coefficient de la puissance z^y dans le développement de Taylor de la fonction $(f_n(z))^x$. Lorsque $\sum_{1}^{\infty} np(n) \log n < \infty$, on sait que les fonctions $f_n(e^{-z\mathrm{M}^{-n}})$ convergent uniformément sur tout compact de $\{z \mid \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$ vers une fonction $g(z)$ (cf. [14] et [8]).

Dans ce cas, il existe une fonction $w(t)$ définie sur les réels strictement positifs et continue telle que

$$w(t) > 0 \ , \ \int_0^{\infty} w(t)\, dt = 1 \ , \ \int_0^{\infty} t w(t)\, dt = 1$$

et $g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} w(t)\, dt$. Je désignerai par $w_x(t)$ la xe puissance de convolution de $w(t)$. Une fonction $h(x)$ à valeurs complexes définie pour $x = 1, 2, 3, \ldots$ sera dite harmonique si pour tout x

$$\sum_{y=1}^{\infty} p(x, y)\, |h(y)| < \infty$$

et si $h(x) = \sum_{y=1}^{\infty} p(x, y)\, h(y)$.

Si c est un nombre réel > 0, on pose

$$h(x\,;c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c\mathrm{M}^n\, w_x(c\mathrm{M}^n)\ .$$

On sait que cette fonction est une fonction harmonique positive.

2. Comportement asymptotique des fonctions harmoniques $h(x\,;c)$.

Pour établir que les fonctions $h(x\,;c)$ sont des fonctions harmoniques extrémales (cf. le théorème 2 qui suivra), j'aurai besoin de savoir comment celles-ci se comportent lorsque $x \longrightarrow \infty$. Nous verrons que sur une partie "relativement mince" des entiers $h(x\,;c)$ est asymptotique à $\sqrt{\dfrac{x}{2\pi\nu}}$ (ν sera spécifié tantôt) et que "le plus souvent" $h(x\,;c)$ est $0\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; ceci arrive lorsque le processus en cascade est de variance finie et s'il est indécomposable.

THEOREME 1. – *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, z^n$ *la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson sans disparition d'individu* ($p(0) = 0$), *dont les deux premiers moments existent* $\left(\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(n) < \infty\right.$ *et* $\left.\mathrm{M} = \sum_{n=1}^{\infty} np(n)\right)$, *soit c un nombre réel positif arbitraire, alors*

1) *si* $\nu = \dfrac{S - M^2}{M^2 - M}$, $\limsup\limits_{x \to \infty} \dfrac{h(x\,;c)}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}$; *cette limite supérieure s'obtient uniformément par rapport à c.*

2) *si l'on désigne par*

$$d(x\,,c) = \inf\left\{ \left| 1 - \frac{cM^n}{x} \right| \,|\, n = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots \right\}$$

il existe un nombre A *tel que pour tout x et tout c*

$$h(x\,,c) \leqslant \frac{A}{\sqrt{x}(d(x\,,c))^2}$$

3) *il existe un nombre* $B > 0$ *tel que pour tout c l'inégalité*

$$d(x\,,c) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

entraîne $h(x\,;c) \geqslant B\sqrt{x}$.

Démonstration. — Déterminons une majoration de $tw_x(t)$. Il suit du théorème 7 de l'article [8] que si x est suffisamment grand, alors $(g(i\xi))^x$ est une fonction de $L^1(-\infty\,,\infty)$, c'est-à-dire il existe un entier p pour lequel $g(i\xi)$ a une p^e puissance sommable et dans ce cas si $x > p$, alors

$$w_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (g(i\xi)\, e^{i\xi})^x\, e^{i\xi(t-x)}\, d\xi\,.$$

Du fait que $\sum\limits_1^\infty n^2 p(n) < \infty$, on a que $\int_0^\infty t^2 w(t)\, dt < \infty$ (cf. Harris [12], p. 13). D'où $g''(i\xi)$ existe et est une fonction bornée, ce qui nous permet de dire qu'après 2 intégrations par partie, si $x > p + 2$,

$$\begin{aligned}(t-x)^2\, w_x(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^2}{d\xi^2} (g(i\xi)\, e^{i\xi})^x \right] e^{i\xi(t-x)}\, d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(x-1)\,(g(i\xi)\, e^{i\xi})^{x-2} \left(\frac{d}{d\xi} (g(i\xi)\, e^{i\xi}) \right)^2 e^{i\xi(t-x)}\, d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(g(i\xi)\, e^{i\xi})^{x-1} \frac{d^2}{d\xi^2} (g(\xi)\, e^{i\xi})\, e^{i\xi(t-x)}\, d\xi\end{aligned}$$

Soit $R = \sup\{|g(i\xi)| \mid |\xi| \geqslant 1\}$, on sait que $R < 1$ (cf. Stigum [29] ou encore le théorème 5 de [8]). Utilisant les faits suivants,

$$g(i\xi) \in L^p(-\infty, \infty) \ , \frac{d}{d\xi}(g(\xi)\, e^{i\xi}) = 0(|\xi|)$$

lorsque $\xi \longrightarrow 0$, $\dfrac{d^2}{d\xi^2}(g(\xi)\, e^{i\xi}) \in L^\infty(-\infty, \infty)$ on peut trouver un nombre A_1, tel que pour tout t et pour tout x,

$$(t-x)^2\, w_x(t) \leqslant A_1 \left(x^2 R^x + \int_{-1}^{1} |g(i\xi)|^x\, (x^2\xi^2 + x)\, d\xi \right) .$$

Puisque $g''(i\xi)$ existe et est bornée, alors il existe un nombre A_2 tel que si $|\xi| \leqslant 1$, $|g(i\xi)| \leqslant e^{-A_2\xi^2}$. D'où

$$\int_{-1}^{1} x^2\xi^2\, |g(i\xi)|^x\, d\xi \leqslant \int_{-1}^{1} x^2\xi^2 e^{-A_2\xi^2 x}\, d\xi = 0(\sqrt{x})$$

$$\int_{-1}^{1} x\, |g(i\xi)|^x\, d\xi \leqslant \int_{-1}^{1} x e^{-A_2\xi^2 x}\, d\xi = 0(\sqrt{x})$$

Ainsi $(t-x)^2\, w_x(t) = 0(\sqrt{x})$ uniformément en t, c'est-à-dire il existe une constante A_3 telle que $\left(1 - \dfrac{t}{x}\right)^2 w_x(t) \leqslant A_3 x^{-3/2}$. Cette inégalité fondamentale nous permettra de vérifier la validité de la partie 2 du théorème 1.

$$\sum_{cM^n \leqslant 1} cM^n w_x(cM^n) = 0(x^{-3/2})$$

$$\sum_{1 \leqslant cM^n \leqslant x/M} cM^n w_x(cM^n) = 0(x^{-1/2})$$

$$\sum_{Mx \leqslant cM^n} cM^n w_x(cM^n) = 0(x^{-1/2})$$

Maintenant si $x/M \leqslant cM^n \leqslant Mx$, alors

$$d(x\,;c)^2\, cM^n w_x(cM^n) \leqslant MA_3 x^{-1/2}$$

Ainsi $d(x\,;c)^2\, h(x\,;c) = 0(x^{-1/2})$.

Considérons maintenant la partie 1 et 3 du théorème, soit donc x un entier $\geqslant p$ tel que $d(x\,;c) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$. Pour les mêmes raisons que tantôt,

$$\sum_{cM^n < x - \sqrt{x}} cM^n w_x(cM^n) = 0(x^{-1/2})$$

$$\sum_{x + \sqrt{x} < cM^n} cM^n w_x(cM^n) = 0(x^{-1/2})$$

Soit n l'entier tel que $|x - cM^n| \leqslant \sqrt{x}$

$$w_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (g(i\xi)\, e^{i\xi})^x\, e^{i\xi(t-x)}\, d\xi\ .$$

Puisque $g(i\xi) \in L^p(-\infty, \infty)$, en appliquant le théorème 2 (p. 489) du volume de Feller [10], on obtient que $\sqrt{x}\, w_x(t)$ converge uniformément en t vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2\nu x}}$. D'où

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} w_x(cM^n) \leqslant \frac{cM^n w_x(cM^n)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} w_x(cM^n)\ .$$

Si x_n est une suite d'entiers tels que

$$\frac{cM^n - x_n}{\sqrt{x_n}} \longrightarrow u \qquad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty\ ,$$

alors $\lim_{n\to\infty} \frac{h(x_n\,;c)}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} e^{-\frac{u^2}{2\nu}}$. Ce qui complète la démonstration du théorème 1.

Remarque. — L'existence de moments d'ordre supérieur à 2 pour les $\{p(n)\}_1^\infty$ permettrait d'affirmer que sur des parties assez grandes des entiers $h(x)$ tend plus vite vers zéro.

3. Fonctions harmoniques positives extrémales.

Au terme de l'article [8], j'avais promis la démonstration du théorème suivant :

THEOREME 2. – *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$ *est la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson indécomposable* (L = 1), *qui admet un second moment* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(n) < \infty\right)$, *pour tout* $c > 0$, $h(x\,;c)$ *est une fonction harmonique extrémale dans le cône des fonctions harmoniques positives.*

Démonstration. – D'après le théorème 11 de [8], le cône des fonctions harmoniques positives de notre processus de Galton-Watson est à base compacte. Soit $c > 0$, l'ensemble $K = \{h(x\,;\alpha)\}_{\frac{c}{\sqrt{M}} \leqslant \alpha \leqslant \sqrt{M}c}$ est l'image continue d'un intervalle compact et K rencontre chacune des extrémales du cône d'après le corollaire du théorème 11 de [8].

Utilisons un lemme de Bauer (cf. le lemme 7 (p. 118) de Bauer [2] ou le volume de Phelps [25], p. 8) ou plutôt une version légèrement améliorée de celui-ci.

LEMME. – *Soit* K *une partie convexe compacte ne contenant pas l'origine* 0 *d'un espace vectoriel topologique localement convexe* E, *soit* F *une partie fermée de* K *et soit* C *le plus petit cône convexe fermé de sommet* 0 *contenant* F, *si* $x \in C$ *et que* $x \neq 0$, *le point* x *est extrémal dans* C *si et seulement si les seules mesures* μ *portées par* F *admettant le point* x *comme résultante sont des mesures dont le support est contenu dans* $\{\lambda x \mid \lambda \geqslant 0\}$.

Je laisse au lecteur le soin de vérifier ce lemme. Pour vérifier que $h(x\,;c)$ est extrémale dans le cône des fonctions harmoniques positives, il nous suffit d'établir qu'il n'y a qu'une seule mesure μ sur l'intervalle $\left[\frac{c}{\sqrt{M}}, c\sqrt{M}\right]$ telle que pour tout x

$$h(x\,;c) = \int h(x\,,\alpha)\, d\mu(\alpha)\,,$$

à savoir la masse de Dirac disposé au point $\alpha = c$.

Soit k un nombre réel plus grand que 1, désignons par

$$\mathrm{I}(k\,,\mathrm{N}) = \left\{ x \in \mathrm{N} \mid \frac{c\mathrm{M}^{\mathrm{N}}}{k} < x < kc\mathrm{M}^{\mathrm{N}} \right\},$$

nous allons d'abord démontrer que si $\alpha \in \left[\frac{c}{\sqrt{\mathrm{M}}}\,, c\sqrt{\mathrm{M}}\right]$, si

$$\alpha \notin \left[\frac{c}{k}\,, kc\right]$$

et que N est suffisamment grand, alors $\sum_{x \in \mathrm{I}(k,\mathrm{N})} \frac{h(x\,;c)}{\sqrt{x}}$ est relativement petit par rapport à $\sum_{x \in \mathrm{I}(k,\mathrm{N})} \frac{h(x\,;\alpha)}{\sqrt{x}}$.

1) Minorons $\sum_{x \in \mathrm{I}(k,\mathrm{N})} \frac{h(x\,;\alpha)}{\sqrt{x}}$. Si N est suffisamment grand, le nombre d'entiers x de $\mathrm{I}(k\,,\mathrm{N})$ tels que $\inf_n \left| 1 - \frac{\alpha \mathrm{M}^n}{x} \right| \leqslant x^{-1/2}$ dépasse $2\sqrt{c}\,\mathrm{M}^{\mathrm{N}/2}$. A cause de la partie 3 du théorème 1, on obtient que

$$\liminf_{\mathrm{N} \to \infty} \sum_{x \in \mathrm{I}(k,\mathrm{N})} \frac{h(x\,;\alpha)}{\sqrt{x}\,\mathrm{M}^{\mathrm{N}/2}} > 0$$

2) Majorons $\sum_{x \in \mathrm{I}(k,\mathrm{N})} \frac{h(x\,;c)}{\sqrt{x}}$. Se servant de la partie 2 du théorème 1, on a que $\frac{h(x\,;c)}{\sqrt{x}} \leqslant \mathrm{A}\left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \frac{1}{x}$ si $x \in \mathrm{I}(k\,,\mathrm{N})$. D'où

$$\sum_{x \in \mathrm{I}(k,\mathrm{N})} \frac{h(x\,;c)}{\sqrt{x}} \leqslant \mathrm{A}\left(\frac{k}{k-1}\right)^2 \log \mathrm{M}\,.$$

Soit maintenant une mesure μ telle que

$$h(x\,;c) = \int h(x\,;\alpha)\,d\mu(\alpha)\,.$$

Faisant la somme sur les $x \in \mathrm{I}(k\,,\mathrm{N})$, on voit que

$$\mathrm{M}^{\mathrm{N}/2}\left(\int_{c\sqrt{\mathrm{M}}}^{c/k} d\mu(\alpha) + \int_{kc}^{c\sqrt{\mathrm{M}}} d\mu(\alpha)\right) = 0(1) \quad \text{lorsque } \mathrm{N} \longrightarrow \infty\,.$$

Ainsi le support de la mesure μ est nécessairement concentré au point c. Ce qui complète la démonstration du théorème 2.

Remarque. – Non seulement il est démontré que $h(x\,;c)$ est extrémale, mais de plus si $c_1 < c_2 < Mc_1$, $h(x\,;c_1)$ et $h(x\,;c_2)$ sont linéairement indépendantes, en particulier $h(x\,;c_1) \not\equiv h(x\,;c_2)$.

4. Représentation intégrale de fonctions harmoniques positives.

Les fonctions harmoniques positives pour la matrice $p(x\,,y)$ forment un cône réticulé, comme Feller l'a démontré dans l'article Boundaries induced by non-negative matrices (Trans. Amer. Soc. vol. 83, pp. 19-54 (1956)). Cependant, je vais insérer l'énoncé d'un théorème plus général, dont j'aurai besoin de toute façon dans la suite.

Soient V un espace vectoriel ordonné et C le cône des vecteurs positifs de V (cf. [4]), on dira que C est σ-réticulé si pour toute partie dénombrable $A \subseteq C$ on peut trouver dans C un élément qui soit l'infimum de A. Si C est réticulé et si toute suite monotone décroissante de C admet un infimum, alors C est σ-réticulé. Soit T un opérateur linéaire positif de V dans V (c'est-à-dire si $x \in C$, $Tx \in C$) on dira que T est σ-continu si pour toute suite monotone décroissante $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs de C, on a que $\inf_n \{Tx_n\} = T(\inf_n \{x_n\})$. Soit T un opérateur linéaire positif de V dans V, on dira qu'un vecteur x de V est *invariant* (ou encore harmonique) si $Tx = x$; on dira qu'un vecteur x de C est *excessif* (ou encore surharmonique) si $Tx \leqslant x$; on dira qu'un vecteur x de C est *purement excessif* si x est excessif et si pour tout vecteur invariant $y > 0$, $x - y \notin C$.

Comme dans la théorie classique des fonctions surharmoniques (au sens usuel), on a ce qui est connu comme la décomposition de F. Riesz. On rencontre cette décomposition pour les mesures surharmoniques associées à un noyau sur un groupe abélien localement compact (cf. Deny [6]), pour les fonctions excessives associées à une chaîne de Markov (cf. Meyer [22] ou Spitzer [28]).

Décomposition généralisée de Riesz : Soient C un cône convexe σ-réticulé d'un espace vectoriel V et T un opérateur linéaire positif σ-continu de V dans V, si l'on désigne par C_1, C_2 et C_3 le cône des vecteurs invariants positifs, celui des vecteurs purement excessifs et

celui des vecteurs excessifs alors chacun des cônes est σ-réticulé. De plus

a) Si $x_3 \in C_3$, il existe un et un seul couple de vecteurs (x_1, x_2) l'un de C_1 et l'autre de C_2 tel que $x_3 = x_1 + x_2$.

b) Si x est excessif, x est purement excessif si et seulement si $\inf_{n \geqslant 0} \{T^n x\} = 0$.

c) Si x est purement excessif, il existe un vecteur u de C tel que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n u = x$.

d) Si $u \in C$ et si $\sum_{n=0}^{m} T^n u$ est une suite bornée, $\sum_{n=0}^{\infty} T^n u$ est purement excessif.

Esquisse de la démonstration : Pour établir les propriétés a), b), c) et d), on utilise exactement les mêmes idées que dans les références que j'indiquais plus haut en les appliquant dans le cadre des espaces vectoriels ordonnés. Par exemple pour a), si $x_3 \in C_3$, on pose $x_1 = \inf_{n > 0} T^n x_3$ et $x_2 = x_3 - x_1$. Je laisse les détails de la vérification au lecteur.

Pour établir que les cônes sont réticulés : soient x et y deux vecteurs excessifs, posons $z = \min(x, y)$ (c'est-à-dire le plus grand des vecteurs de C qui minorent à la fois x et y) ; alors z est excessif et est nécessairement le plus grand des vecteurs excessifs qui sont à la fois plus petits que x et que y. Si x ou si y est purement excessif, il en est de même pour z. Les cônes C_2 et C_3 sont donc réticulés.

Soient d'autre part deux vecteurs invariants positifs x et y, on considère le vecteur z' le minimum de x et y, c'est un vecteur excessif ; soit z le vecteur invariant positif qui intervient dans la décomposition de Riesz de z'. Alors z est le plus grand des vecteurs invariants qui minorent x et y. C_1 est donc réticulé. La σ-continuité de T assure que les cônes C_1, C_2 et C_3 sont σ-réticulés.

Sachant que le cône des fonctions harmoniques positives d'un processus en cascade est réticulé et est à base compacte lorsque $\sum_{1}^{\infty} n^2 p(n) < \infty$. (cf. Théorème 11 de [8]) et utilisant le théorème de

Choquet ([5] ou [25]), on peut affirmer que pour toute fonction harmonique positive $h(x)$ il existe une mesure sur $[1, M]$ où 1 et M sont identifiés telle que $h(x) = \int_1^M h(x\,;c)\,d\mu(c)$. Si deux mesures sont distinctes, alors les deux fonctions harmoniques qu'elles induisent sont différentes. On a que

$$h(x) = \int_1^M \sum_{n=-\infty}^{\infty} cM^n w_x(cM^n)\,d\mu(c)$$

$$h(x) = \int_0^\infty t w_x(t)\,d\nu(t)$$

où ν est une mesure sur $(0, \infty)$ invariante pour le changement de variable $t \longrightarrow Mt$.

On sait que la fonction $h(x) \equiv 1$ est une fonction harmonique. Quelle est sa représentation intégrale ? Il suffit de poser $d\nu(t) = \dfrac{dt}{t}$ pour obtenir que $h(x) = \int_0^\infty t w_x(t) \dfrac{dt}{t} = 1$.

Remarquons de plus que si $b(t)$ est une fonction mesurable bornée telle que pour tout t, $b(Mt) = b(t)$, alors la fonction harmonique qu'induit la mesure $d\nu(t) = \dfrac{b(t)}{t}\,dt$ sera une fonction bornée ; ce qui donne une grande famille de fonctions harmoniques bornées.

On peut se poser le problème suivant : étant donnée une fonction harmonique positive $h(x)$, comment peut-on calculer la mesure qui la représente ? Je vais indiquer une méthode, bien que je ne connaisse pas son efficacité.

Si $$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y) \quad (p_0(x, y) = \delta(x, y))$$

et si $$\Psi_n(y) = \begin{cases} \sum_{z>n} p(y, z)\,h(z) & y \leqslant n \\ 0 & y > n \end{cases}$$

alors $$\sum_{y=1}^{\infty} G(x, y)\,\Psi_n(y) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad x > n \end{cases}$$

Avant de poursuivre, introduisons le compactifié suivant des entiers $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Considérons la relation d'équivalence suivante sur les réels positifs (> 0) : $t_1 \equiv t_2$ s'il existe un entier relatif n tel que $t_1 = t_2 M^n$. Soit Y le quotient de $\{t \in \mathbf{R} \mid t > 0\}$ par cette relation d'équivalence, on met sur Y la topologie quotient et on note $\varphi : \mathbf{R}^+ \longrightarrow Y$ l'application canonique qui associe à un nombre réel > 0 sa classe d'équivalence. Considérons maintenant l'ensemble $Z = X \cup Y$. Déterminons la topologie de Z par des voisinages. Si $x \in X$ une partie C de Z où $C = A \cup B$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ est un voisinage de x vu comme point de Z si $x \in A$. Si $y \in Y$, une partie C de Z où $C = A \cup B$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ est un voisinage de y vu comme point de Z s'il existe une partie A_0 de X, dont le complémentaire est fini et un voisinage 0 de y dans Y tels que $0 _ B$ et $A_0 \cap \varphi^{-1}(0) \subseteq A$. Il suit de ces définitions que Z est une compactification de X.

Il suit du théorème 9 de [8], que pour tout x la fonction $y \longrightarrow yG(x, y)$ admet un prolongement continu $z \longrightarrow \bar{h}(x ; z)$ à tout l'espace Z et l'on a que

$$h(x ; c) = \bar{h}(x, \varphi(c)) .$$

Soit δ_y la masse de Dirac disposée au point y et soit

$$\mu_n = \sum_{y=0}^{n} \frac{\Psi_n(y)}{y} \delta_y .$$

On a donc que $\displaystyle\int_Z \bar{h}(x ; z)\, d\mu_n(z) = \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad x > n . \end{cases}$

Comme l'indique le théorème 9 de [8] $\inf_c h(1 ; c) > 0$; de ce fait il existe un y_0 et un $\varepsilon > 0$ tels que si $y \geqslant y_0$, alors $yG(1, y) \geqslant \varepsilon$. Ce qui permet de voir que $\displaystyle\int_Z d\mu_n(z)$ forme une suite bornée. Comme Z est compact, il existe une mesure μ qui soit limite vague d'une sous-suite de μ_n. D'où $h(x) = \displaystyle\int_Z h(x ; c)\, d\mu(\varphi(c))$, car pour tout y, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\Psi_n(y)}{y} = 0$.

Vu l'unicité de la représentation intégrale pour les fonctions harmoniques positives, il ne peut exister qu'une seule mesure limite vague pour la suite μ_n. Donc μ_n converge vaguement vers la mesure μ.

5. Comportement asymptotique des fonctions harmoniques positives.

THEOREME 3. – *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$ *la fonction génératrice d'un processus en cascade indécomposable* (L = 1), *admettant un second moment* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p(n) < \infty\right)$, *si* $h(x) \not\equiv 0$ *est une fonction harmonique positive associée au processus, alors* $h(x) = 0(\sqrt{x})$ *lorsque* x *tend vers l'infini et il existe deux constantes* $A > 0$ *et* $B > 0$ *telles que pour tout* n, $A\sqrt{n} \leqslant \sum_{x=1}^{n} \frac{h(x)}{\sqrt{x}} \leqslant B\sqrt{n}$.

Démonstration. – Ce théorème est une conséquence relativement simple du théorème 1 et de la représentation intégrale de la fonction $h(x)$. En effet, il existe une mesure $d\mu$ sur $[1, M)$ telle que

$$h(x) = \int_1^M h(x\,;t)\, d\mu(t) .$$

Comme l'indique le théorème 1, $h(x\,;t) = 0(\sqrt{x})$ uniformément en t. D'où $h(x) = 0(\sqrt{x})$.

De même pour vérifier la dernière partie du théorème 3, il suffit de vérifier qu'il existe deux constantes $A_1 > 0$ et B_1 telles que pour tout $t \in [1, M)$ et pour tout n

$$A_1 \sqrt{n} \leqslant \sum_{x=1}^{n} \frac{h(x\,;t)}{\sqrt{x}} \leqslant B_1 \sqrt{n} .$$

Soit p un entier > 0, majorons

$$\sum_{tM^{p-1/2} \leqslant x < tM^{p+1/2}} \frac{h(x\,;t)}{\sqrt{x}} = S(t, p) .$$

Utilisant la partie 2 du théorème 1, on se convainc facilement qu'il existe des constantes D et A_2 telles que si

$$1 \leqslant t \leqslant M \;,\; |x - tM^p| \geqslant DM^{p/2} \;,\; tM^{p-1/2} \leqslant x \leqslant tM^{p+1/2}$$

alors $$\frac{h(x\,;t)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{A_2 M^p}{(x - tM^p)^2}\,.$$

D'autre part si $1 \leqslant t \leqslant M$, $|x - tM^p| \leqslant DM^{p/2}$, il existe une constante C telle $\dfrac{h(x\,;t)}{\sqrt{x}} \leqslant C$.

Utilisant ces deux dernières inégalités, on obtient qu'il existe un nombre E tel que pour tout $t \in [1\,,M]$ et pour tout $p, S(t\,,p) \leqslant EM^{p/2}$. D'où il existe un nombre F tel que pour tout $t \in [1\,,M]$ et pour tout p $\sum\limits_{x \leqslant tM^p} \dfrac{h(x\,;t)}{\sqrt{x}} \leqslant FM^{p/2}$. Ce qui établit qu'il existe une constante B telle que pour tout t et pour tout n, $\sum\limits_{x=1}^{n} \dfrac{h(x\,;t)}{\sqrt{x}} \leqslant B\sqrt{n}$.

Maintenant, minorons $S(t\,,p)$, ce qui est plus facile. Utilisant la partie 3 du théorème 3, on voit qu'on peut trouver une constante D_1 telle que si $|x - tM^p| \leqslant D_1 M^{p/2}$, alors $d(x\,;t) \leqslant x^{-1/2}$; il existe alors une constante E_1 telle que si $t \in [1\,,M]$, $S(t\,,p) \geqslant E_1 M^{p/2}$. Ce qui permet de déterminer un nombre A tel que pour tout t et pour tout n, $\sum\limits_{x=1}^{n} \dfrac{h(x\,;t)}{\sqrt{x}} \geqslant A\sqrt{n}$. Q.E.D.

Tirons un corollaire du fait que $h(x) = 0(\sqrt{x})$. Si $h(x)$ est une fonction harmonique, on sait qu'on peut lui associer une fonctionnelle linéaire H sur le cône des séries de puissances en une variable z à coefficients positifs. Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une telle série,

$$H\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)\, a_n\,.$$

La propriété fondamentale de cette fonctionnelle est que si $g(z)$ est une série de puissances à coefficients positifs, si $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p(n)\, z^n$ et si $g \circ f(z)$ est la série de puissances obtenue par le produit fonctionnel des deux séries formelles, alors $H(g \circ f) = H(g)$. On peut se demander pour quelles séries de puissances $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ a-t-on que

$$\mathrm{H}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\Big) < +\infty .$$

Une condition simple suffisante pour obtenir que

$$\mathrm{H}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\Big) < +\infty$$

est que $\sum_1^{\infty} na_n < \infty$. En effet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h(n) \leqslant \sup_n \frac{h(n)}{\sqrt{n}} \sum_1^{\infty} \sqrt{n\, a_n}$. Cette condition est d'autant plus agréable que si

$$\sum_1^{\infty} b_n z^n = \sum_1^{\infty} a_n (f(z))^n ,$$

alors $\sum_1^{\infty} nb_n$ est également une série convergente.

6. Exemples de fonctions harmoniques.

Avec le théorème 2, toutes les fonctions harmoniques positives sont connues. Les considérations qui vont suivre introduiront un certain nombre de fonctions harmoniques particulières ; je tâcherai d'établir plus de relations entre la fonction $f(z)$ et les fonctions harmoniques et j'indiquerai quelques procédés qui à partir d'une fonction harmonique permettent d'en obtenir d'autres.

Donnons d'abord un exemple de fonctions harmoniques complexes que nous n'avons pas rencontré jusqu'ici. Supposons pour quelques instants que la fonction $f(z)$ admette un prolongement analytique au cercle $\{z \mid |z| < \mathrm{R}\}$ alors que $\mathrm{R} \geqslant 1$ et supposons que l'on puisse trouver un entier n et n nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tels que $|z_i| < \mathrm{R}$, $f(z_1) = z_2$, $f(z_2) = z_3, \ldots, f(z_{n-1}) = z_n$,

$$f(z_n) = z_1 ,$$

alors la fonction $h(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i^x$ est une fonction harmonique.

Plus généralement, soit R un nombre réel supérieur ou égal à 1 tel que $\sum_1^\infty p(n)\,\mathrm{R}^n < \infty$ supposons qu'il existe une partie fermée K de $\{z \mid |z| \leqslant \mathrm{R}\}$ telle que $f(\mathrm{K}) \subseteq \mathrm{K}$ et une mesure μ sur K telle que pour toute fonction continue φ sur K,

$$\int_{\mathrm{K}} \varphi(x)\,d\mu(z) = \int_{\mathrm{K}} \varphi(f(z))\,d\mu(z)\ .$$

Si l'on pose $h(x) = \int_{\mathrm{K}} z^x d\mu(z)$, alors $|h(x)| \leqslant \mathrm{R}^x$, d'où

$$\sum_{y=1}^\infty p(x\,,y)\,|h(y)| \leqslant \sum p(x\,,y)\,\mathrm{R}^y \leqslant \Big(\sum p(n)\,\mathrm{R}^n\Big)^x < \infty$$

et
$$\sum_{y=1}^\infty p(x\,,y)\,h(y) = \int_{\mathrm{K}} (f(z))^x\,d\mu(z) = h(x)\ .$$

Plutôt que de considérer des mesures invariantes par f, on pourrait songer à des "distributions" invariantes par f. Nous allons donner un exemple de ce type. Pour cela, considérons deux suites de nombres complexes $\{z_n\}_{n=-\infty}^\infty$ et $\{w_n\}_{n=-\infty}^\infty$ telles que $|z_n| < 1$, $|w_n| < 1$, $f(z_n) = z_{n+1}$, $f(w_n) = w_{n+1}$ $\lim_{n\to-\infty} z_n = \lim_{n\to-\infty} w_n = 1$. Soit la fonction $h(x)$ définie sur les entiers $\geqslant 1$, $h(x) = \sum_{n=-\infty}^\infty (z_n^x - w_n^x)$. Vérifions que cette dernière série est absolument convergente. Soit k un nombre réel tel que $\max\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\,, p(1)\right) < k < 1$, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{k^n} = 0 \quad \text{et que} \quad \lim_{n\to-\infty} \frac{z_n - 1}{k^n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{w_n - 1}{k^n} = 0.$$

D'où

$$\sum_{n=-\infty}^\infty |z_n^x - w_n^x| \leqslant x \sum_{n=-\infty}^\infty |z_n - w_n| \leqslant x\Big(\sum_{n=0}^\infty |z_n| + \sum_{n=0}^\infty |w_n| + \\ + \sum_{n=1}^\infty |1 - z_n| + \sum_{n=1}^\infty |1 - w_n|\Big)\ .$$

Ainsi il existe un nombre A tel que $|h(x)| \leqslant \mathrm{A}x$ et

$$\sum_{y=1}^{\infty} p(x, y)\,|h(y)| \leqslant \mathrm{A}\Big(\sum_{y=1}^{\infty} p(x, y)\,y\Big)$$
$$\leqslant \mathrm{AM}x\ .$$

En utilisant le principe de convergence bornée, on voit que

$$\sum_{y=1}^{\infty} p(x, y)\,h(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z_{n+1}^{x} - w_{n+1}^{x}) = h(x)\ .$$

En particulier, intéressons-nous au cas où pour tout n, z_n et w_n sont compris entre 0 et 1 et où $z_0 = a > w_0 = b$. Notons $z_n = f_n(a)$ et $w_n = f_n(b)$. La fonction $\sum_{n=-\infty}^{\infty} ((f_n(a))^x - (f_n(b))^x)$ est harmonique et positive. Déterminons la représentation intégrale de celle-ci. Soient α et β les deux nombres réels positifs tels que $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$. Puisque $f(g(z)) = g(\mathrm{M}z), f_n(a) = g(\mathrm{M}^n\alpha)$ et $f_n(b) = g(\mathrm{M}^n\beta)$. Comme $(g(z))^x = \int_0^{\infty} e^{-zt} w_x(t)\,dt$,

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-\mathrm{M}^n\alpha t} - e^{-\mathrm{M}^n\beta t})\,w_x(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{-\mathrm{M}^n\alpha t} - e^{-\mathrm{M}^n\beta t})\,w_x(t)\,dt.$$

La mesure $d\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-\mathrm{M}^n\alpha t} - e^{-\mathrm{M}^n\beta t}}{t}\,dt$ est la mesure qui est invariante pour le changement de variable $t \longrightarrow \mathrm{M}t$ et représentant la fonction harmonique $h(x)$

$$h(x) = \int_0^{\infty} t w_x(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\ .$$

Faisons tendre b vers a. Puisque $f_n(t)$ est une fonction croissante continue, on peut poser $f_{-n}(t)$ la fonction inverse de $f_n(t)$ pour t compris entre 0 et 1. On devrait espérer que

$$\lim_{h \downarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(f_n(t+h))^x - (f_n(t))^x}{h} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(f_n(t))^{x-1} f_n'(t)$$

Vérifions que la série du 2ème membre est convergente et donne lieu à une fonction harmonique. Pour cela il suffit de savoir que la série

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f'_n(t)$ converge. Remarquant que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'_{n+1}(t)}{f'_n(t)} = \lim_{n\to\infty} f'(f_n(t)) = f'(0) < a$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'_{-(n+1)}(t)}{f'_{-n}(t)} = \lim_{n\to\infty} f'_{-1}(f_{-n}(t)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{M} < 1 ,$$

alors il y a convergence des séries concernées. Posant

$$h_1(x\,;t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(f_n(t))^{x-1} f'_n(t) ,$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{y=1}^{\infty} p(x\,,y)\, h_1(y\,;t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} p(x\,,y)\, y(f_n(t))^{y-1} f'_n(t)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(f_{n+1}(t))^{x-1} f'(f_n(t)) f'_n(t)\\ &= h_1(x\,;t) .\end{aligned}$$

La représentation intégrale de $h_1(x\,;t)$ sera

$$-\frac{1}{g'(g^{-1}(t))} \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M^n u e^{-M^n u g^{-1}(t)} w_x(u)\, du .$$

Soit E_1 l'espace des fonctions continûment dérivables sur [0,1] à valeurs réelles s'annulant à 0 et soit C_1 le cône des fonctions de E_1 qui sont croissantes sur [0,1], à $h_1(x\,;t)$, on peut associer une fonctionnelle linéaire positive par rapport au cône C_1 , $H_1^t : E_1 \longrightarrow R$ où $H_1^t(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi'(f_n(t)) f'_n(t)$. La propriété fondamentale de cette fonctionnelle est que $\forall \varphi \in E_1$, $H_1^t(\varphi) = H_1^t(\varphi \circ f)$. Ce dernier exemple est typique d'un procédé général pour obtenir des fonctions harmoniques positives. Supposons que l'on ait une famille C de fonctions définies sur [0,1) telle que a) C est un cône convexe, b) pour tout entier $x \geqslant 1$, $t^x \in C$, *c*) si $\varphi(t)$, $\varphi \circ f(t) \in C$, *d*) pour l'ordre propre qu'induit C sur lui-même, pour tout entier $x \geqslant 1$,

$$\sup \sum_{y=1}^{n} p(x, y)\, t^y = (f(t))^x .$$

Si H est une fonctionnelle linéaire positive σ-continue sur C et si $H(\varphi \circ f) = H(\varphi)$, celle-ci donne une fonction harmonique pour la matrice $p(x, y)$: $h(x) = H(t^x)$.

Donnons des exemples de cônes qui satisfont les conditions ci-dessus mentionnées. Soit k un entier naturel $\geqslant 1$, considérons $C_k^* =$ les fonctions $\varphi(t)$ définies sur $[0,1)$ telles que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t)$ existe, est positive et continue sur $[0,1)$ et $\dfrac{d^i}{dt^i}\varphi(t)$ existe sur $[0,1)$, est positive et continue pour $i = 2, 3, \ldots, k$. Déterminons les fonctionnelles linéaires positives sur C_k^*. Par la formule de Taylor, C_k^* est la somme directe de deux cônes : le cône des polynômes de degré $k-1$ à coefficients positifs et s'annulant à l'origine et le cône C_k des fonctions de C_k^* dont les $(k-1)$ premières dérivées successives s'annulent à l'origine. C_k est isomorphe au cône des fonctions continues positives sur $[0,1)$, l'isomorphisme étant $\varphi \longrightarrow \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$. Une fonctionnelle linéaire positive σ-continue sur C_k^* se brise en une somme de deux fonctionnelles positives σ-continues l'une sur le 1er cône, l'autre sur C_k. Par le théorème de Riesz, cette dernière provient d'une mesure sur $[0,1)$. En conclusion si H est une fonctionnelle positive sur C_k^*, on peut trouver $(k-1)$ constantes positives $h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$ et une mesure $d\mu$ sur $[0,1)$ telle que

$$H(\varphi) = \sum_{i=1}^{k-1} h_i \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i\,!} + \int_0^1 \varphi^{(k)}(t)\, d\mu(t) .$$

J'étudierai dans la deuxième partie ces fonctionnelles qui sont invariantes par l'action de f. Mais à ce stade, je veux poser une remarque qui nous permettra de nous débarasser des constantes $h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$: toute fonctionnelle positive σ-continue définie sur C_k invariante par l'action de f se prolonge (uniquement) en une fonctionnelle positive σ-continue sur C_k^* invariante par l'action de f.

En effet, soit H_0 une telle fonctionnelle définie sur C_k, soit $h_0(x) = H_0(z^x)$ si $x \geqslant k$. Brisons la matrice $P = (p(x, y))$ en quatre blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & P_0 \end{pmatrix}$ où P_0 est la restriction de P aux (x, y) tels que $x \geqslant k$,

$y \geqslant k$, A est la restriction de P aux (x, y) tels que $x < k$, $y < k$ et B est la restriction de P aux (x, y) tels que $x < k$, $y \geqslant k$.

Il s'agit de trouver un vecteur colonne de longueur $(k-1)$ u que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & P_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ h_0 \end{pmatrix}$$

$(I - A)\, u = Bh_0$.

Comme A est une matrice triangulaire dont la diagonale est constituée d'éléments $\in [0,1)$, $I - A$ est inversible et $u = \sum_{n=0}^{\infty} A^n B h_0$. C'est un vecteur dont les composantes sont positives. Si l'on pose $h(x) = \begin{cases} u_x & \text{si } x < k \\ h_0(x) & \text{si } x > k \end{cases}$, $h(x)$ est une fonction harmonique.

Et en définissant $H(z^x) = h(x)$ si $x < k$ et $H(\varphi) = H_0(\varphi)$ si $\varphi \in C_k$, on peut obtenir le prolongement désiré H de H_0 à C_k^*.

Enfin, je voudrais indiquer deux procédés formels pour obtenir des fonctions harmoniques. Soit $f : X \longrightarrow X$ une transformation d'un ensemble X en lui-même et soit A une algèbre de fonctions définies sur X à valeur dans C. Supposons que f opère sur A, c'est-à-dire que $g \circ f \in A$ dès que $g \in A$. Partant d'une fonctionnelle linéaire λ sur A invariante par f, c'est-à-dire $(\forall g \in A)\ \lambda(g \circ f) = \lambda(f)$, comment peut-on en obtenir d'autres ? Un des moyens consiste à considérer un opérateur linéaire $T : A \longrightarrow A$ qui commute avec l'opérateur linéaire $g \longrightarrow g \circ f$, c'est-à-dire pour tout g, $T(g \circ f) = (Tg) \circ f$. Si λ est invariante par f, la fonctionnelle $\lambda_T(g) = \lambda(T(g))$ sera également invariante par l'action de f.

Un premier exemple est obtenu lorsqu'il existe une transformation $c : X \longrightarrow X$ qui opère sur l'algèbre A et qui commute avec f c'est-à-dire $(\forall x \in X)\ f(c(x)) = c(f(x))$. On prend pour T l'application $g \longrightarrow g \circ c$.

Un deuxième exemple s'obtient en considérant une dérivation $D : A \longrightarrow A$ (D est un opérateur linéaire sur A et

$$D(gh) = (Dg)\, h + g(Dh))$$

qui commute avec f, c'est-à-dire $D(g \circ f) = (Dg) \circ f$.

Pour voir que ces procédés formels ont une certaine utilité, consi-

dérons un cas particulier : $f(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$, $p(n) = p(1-p)^{n-1}$ $n = 1, 2, \ldots$. C'est à peu près l'unique cas dans les processus en cascade où on peut mener à bien tous les calculs possibles. Pour algèbre A, prenons les fonctions analytiques sur $\{z \mid z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\}$. Si $a \in (0,1)$, la fonction $c(z) = \dfrac{az}{1-(1-a)z}$ opère sur A et comme $c(f(z)) = f(c(z))$, on obtient un cas particulier du premier exemple. Ici $p(x, y) = \binom{y-1}{x-1} p^x(1-p)^{y-x}$. Si $h(x)$ est une fonction harmonique à laquelle est associée la fonctionnelle H sur A, alors

$$h_a(x) = \mathrm{H}((c(z))^x)$$

sera une fonction harmonique. Comme

$$(c(z))^x = \sum_{y=x}^{\infty} \binom{y-1}{x-1} a^x(1-a)^{y-x} z^y ,$$

$$h_a(x) = \sum_{y=x}^{\infty} \binom{y-1}{x-1} a^x(1-a)^{y-x} h(y) .$$

On voit bien que si $h(x) \geqslant 0$, alors $h_a(x) \geqslant 0$. On se persuade avec un peu de réflexion qu'une fonction harmonique extrémale doit être envoyée sur une fonction harmonique extrémale. Quelle est donc cette correspondance ?

Dans le cas de la distribution géométrique, les diverses puissances de convolution de la densité de la loi-limite du processus sont

$$w_x(t) = \frac{t^{x-1} e^{-t}}{(x-1)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = p^{-1} . \text{ Ainsi}$$

$$h(x\,;c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(c\mathrm{M}^n)^x e^{-c\mathrm{M}^n}}{(x-1)!}$$

$$h_a(x\,;c) = \sum_{y=x}^{\infty} \binom{y-1}{x-1} a^x(1-a)^{y-x} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(c\mathrm{M}^n)^y e^{-c\mathrm{M}^n}}{(y-1)!} \right)$$

$$= \frac{a^x}{(x-1)!} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c\mathrm{M}^n) e^{-c\mathrm{M}^n} \left(\sum_{y=x}^{\infty} \frac{(c\mathrm{M}^n(1-a))^{y-x}}{(y-x)!} \right) \right)$$

$$h_a(x\,;c) = \frac{a^x}{(x-1)\,!}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (c\mathrm{M}^n)^x\, e^{-c\mathrm{M}^n}\, e^{(1-a)\,c\mathrm{M}^n}\right)$$

$$= \frac{1}{(x-1)\,!}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (ac\mathrm{M}^n)^x\, e^{-ac\mathrm{M}^n}$$

$$= h(x\,;ca)\ .$$

Par l'action de la fonction $c(z)$, la fonction harmonique $h(x\,;c)$ est envoyée sur $h(x\,;ca)$. Ce fait-ci est-il un heureux accident ? Un théorème de la partie IV va bien montrer que ceci n'est pas l'effet du hasard.

Sur la même algèbre A, considérons la dérivation

$$(\mathrm{D}g)(z) = g'(z)\,(z(1-z))$$

($g'(z)$ est la dérivée usuelle d'une fonction analytique).

$$\mathrm{D}(g \circ f)(z) = g'(f(z))\,f'(z)\,z(1-z)$$

$$(\mathrm{D}g)(f(z)) = g'(f(z))\,f(z))\,f(z)\,(1-f(z))$$

$$f'(z)\,z(1-z) = \frac{pz(1-z)}{(1-(1-p)\,z)^2}$$

$$f(z)\,(1-f(z)) = \frac{pz}{1-(1-p)\,z}\left(1-\frac{pz}{1-(1-q)\,z}\right) = \frac{pz(1-z)}{(1-(1-p)\,z)^2}\ .$$

D est donc une dérivation invariante par l'action de $f(z)$. Dans la partie III, j'indiquerai comment on obtient la fonction $z(1-z)$. Si $h(x)$ est une fonction harmonique associée à la fonctionnelle H sur A, la fonction $h'(x) = h(\mathrm{D}z^x) = x(h(x) - h(x+1))$ sera harmonique. Si $h(x)$ est une fonction harmonique non constante, $h'(x)$ n'admet jamais un signe constant, car si ceci était le cas, $h(x)$ serait une fonction monotone de x ; si bien que $h(x)$ atteindrait son maximum. Ce qui est impossible, les fonctions harmoniques d'un processus en cascade indécomposable satisfont le principe du maximum, c'est-à-dire si elles atteignent leur maximum, elles sont constantes.

PARTIE II

DISTRIBUTIONS INVARIANTES PAR L'ACTION DE f

1. Enoncé du problème.

Cette partie-ci se veut à peu près indépendante de la première bien que le problème traité ait été suggéré par les processus en cascade. Considérons donc une fonction f continue définie sur $[0,1]$ et un entier $k \geqslant 1$ tels que

a) $f(1) = 1$ et pour tout x de $(0,1)$, $f(x) < x$

b) f est continûment dérivable sur $[0,1]$, $f'(x) \geqslant 0$, $f'(0) < 1$, $f'(1) > 1$

c) si $k > 1$, $f^{(j)}(x)$ existe et est une fonction continue positive et croissante sur $[0,1)$ pour $2 \leqslant j \leqslant k$.

Soit C_k le cône des fonctions φ définies sur $[0,1)$ telles que

a) $\varphi(x) = o(x^{k-1})$ lorsque x tend vers 0.

b) φ admet k dérivées successives continues et positives sur $[0,1)$; notre tâche sera de déterminer les fonctionnelles H sur C_k, positives, σ-continues et invariantes par l'action de f, c'est-à-dire pour tout φ de C_k, $H(\varphi \circ f) = H(\varphi)$. Il s'agit donc de déterminer les mesures positives (finies ou infinies) telles que pour toute fonction φ de C_k

$$\int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} (\varphi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} (\varphi(x))\, d\mu(x) \ .$$

2. Distributions invariantes d'ordre 1.

Pour déterminer toutes les distributions positives invariantes d'ordre 1, il suffit d'établir le théorème suivant.

THEOREME 4. — *Soit $f(x)$ une fonction continue strictement croissante définie sur* $[0,1]$ *telle que* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ *et pour tout*

$x \in (0,1)$ $0 < x < f(x)$ et soit $m(x)$ une fonction continue strictement positive définie sur $(0,1)$ telle que $\limsup_{x \downarrow 0} m(x) < 1$ et $\liminf_{x \uparrow 1} m(x) > 1$, considérons le cône C des mesures positives sur $(0,1)$ telles que pour fonction continue φ à support compact contenue dans $(0,1)$,

$$\int_0^1 \varphi(f(x))\, m(x)\, d\mu(x) = \int_0^1 \varphi(x)\, d\mu(x)$$

alors C est un cône convexe réticulé à base compacte. Si $t \in (0,1)$ et si l'on considère la mesure

$$\mu_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{n-1} m(f_i(t)) \right) \delta_{f_n(t)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{f_{-n}}(x)}{\prod_{i=1}^{n} m(f_{-i}(t))} + \delta_t(x)\,,$$

alors μ_t est un élément extrémal de C. Si μ est un élément extrémal de C, alors il existe un $t \in (0,1)$ et un scalaire k tel que $\mu = k\mu_t$. Enfin si $0 < t_1 < t_2 < 1, \mu_{t_1}$ et μ_{t_2} sont des mesures proportionnelles si et seulement s'il existe un entier n tel que $t_1 = f_n(t_2)$.

Démonstration. — Vérifions d'abord que les mesures μ de C sont des mesures finies. Fixons pour le cours de la démonstration un nombre $a \in (0,1)$. Choisissons une fonction continue et positive φ à support compact dans $(0,1)$ tel que si $a \leqslant x \leqslant f(a), \varphi(x) \geqslant 1$. Alors

$$\int_0^1 \varphi(f_k(x))\, m_k(x)\, d\mu(x) = \int_0^1 \varphi(x)\, d\mu(x) = p$$

$$\text{où } m_k(x) = \begin{cases} \prod_{i=0}^{k-1} m(f_i(x)) & \text{si } k \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{k} m(f_{-i}(x))} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

$$\int_{f_n(a)}^{f_{n+1}(a)} d\mu(x) \leqslant \frac{\int_0^1 \varphi(f_{-n}(x))\, m_{-n}(x)\, d\mu(x)}{\inf\{m_{-n}(x) \mid f_{n+1}(a) \leqslant x \leqslant f_n(a)\}}$$

$$\text{Si } n > 0,\ m_{-n}(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} m(f_{-i}(x)) \right)^{-1} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{-i} \right)^{-1} = m_n$$

où $M_{-i} = \sup\{m(x) \mid f_{-i+1}(a) \leqslant x \leqslant f_{-i}(a)\} \qquad i = 1, 2, \ldots$

Si $\qquad n \leqslant 0\ ,\ m_{-n}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} m(f_i(x)) \geqslant \prod_{i=0}^{n-1} M_i = m_n$

où $\quad M_i = \inf\{m(x) \mid f_{i+1}(a) \leqslant x \leqslant f_i(a)\} \qquad i = 0, 1, \ldots$

Ainsi
$$\int_{f_n(a)}^{f_{n+1}(a)} d\mu(x) \leqslant p m_n\ .$$

Comme $\liminf_{i\to\infty} M_{-i} > 1$ et que $\limsup_{i\to\infty} M_i < 1$, alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n < \infty$ et $\int_0^1 d\mu(x) \leqslant p\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n\Big)$.

Soit E le cône des mesures positives sur (0,1), on peut donc définir l'opérateur $T : E \longrightarrow E$: si $\mu \in E$, $T\mu$ est la mesure $(T\mu)(\varphi) = \int_0^1 \varphi(f(x))\, m(x)\, d\mu(x)$. E est un cône σ-réticulé et T est un opérateur positif σ-continue. Les mesures invariantes formeront un cône convexe réticulé par la décomposition généralisée de Riesz. Comme les mesures invariantes sont finies, C qui est fermé pour la topologie vague des mesures sera à base compacte.

Soit μ une mesure extrémale dans le cône C, soit t_0 un point du support de la mesure μ, choisissons une fonction continue positive $\Psi_0(t)$ dont le support est compact dans (0,1) et contient le point t_0 ; on pose $\Psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_0(f_n(t))$. Considérons la mesure ν sur (0,1) telle $\int_0^1 \varphi(t)\, d\nu(t) = \int_0^1 \varphi(t)\, \Psi(t)\, d\mu(t)$. Comme $\Psi(t)$ est une fonction continue bornée telle que $\Psi(f(t)) = \Psi(t)$, alors ν est également une mesure invariante positive qui est majorée par un multiple scalaire de la mesure μ. μ étant extrémale, on en conclut que μ et ν sont deux mesures proportionnelles. En filtrant par rapport à des fonctions Ψ_0 dont les supports se contractent vers $\{t_0\}$, on obtient que le support de la mesure μ est contenu dans $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{f_n(t_0)\}$. Ceci permet de trouver une suite de nombres $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ telles que

$$\int_0^1 \varphi(t)\, d\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \varphi(f_n(t_0)) \ .$$

On obtient que $A_{n+1} = A_n m(f_n(t_0))$. Ainsi $\mu = A_0 \mu_{t_0}$.

Soit $t \in (0,1)$, on vérifie aisément que μ_t est une mesure invariante et un calcul direct donne que $\mu_{f(t)} = m(t)\, \mu_t$. Pour établir que μ_t est extrémal, il suffit de supposer que $a \leqslant t < f(a)$. Utilisons le lemme de Bauer que nous avons déjà rencontré dans la 1ère partie : considérons une mesure λ portée par $\{\mu_t\}_{a \leqslant t < f(a)}$ dans C telle que μ_a est la résultante de la mesure λ, c'est-à-dire $\mu_a(\varphi) = \int_C \mu(\varphi)\, d\lambda(\mu)$.

Comme la fonction $t \longrightarrow \mu_t$ est continue, on peut effectuer le transfert de la mesure λ à une mesure ρ sur $[a, f(a))$ où pour tout φ de E

$$\int_0^1 \varphi(x)\, d\mu_a(x) = \int_a^{f(a)} \int_0^1 \varphi(x)\, d\mu_t(x)\, d\rho(t) \ .$$

Désignons par S_t le support de μ_t, alors

$$S_a = \overline{\cup \{S_t \mid t \in \text{support de } \rho\}} \ .$$

Ce qui implique que le support de ρ est réduit au point a. μ_a est donc extrémal. Faisant varier a, on a achevé la démonstration.

Comme corollaire du théorème 4, on obtient la caractérisation des distributions invariantes d'ordre 1, il suffit de poser $m(x) = f'(x)$.

Dans le cône des distributions invariantes d'ordre 1, les mesures extrémales sont

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n'(t)\, \delta_{f_n(t)} = \mu_t \ :$$

si $\varphi \in C_1$,

$$\int_0^1 (\varphi \circ f)'(x)\, d\mu_t(x) = \int_0^1 \varphi'(f(x)) f'(x)\, d\mu_t(x)$$

$$= \int_0^1 \varphi'(x)\, d\mu_t(x)$$

3. Distributions invariantes d'ordre k ($k > 1$).

Je rappelle que C_k est le cône des fonctions φ définies sur $[0,1)$ telles que $\varphi(x) = \sigma(x^{k-1})$ lorsque x tend vers 0 et φ admet k dérivées successives continues et positives sur $[0,1)$. On suppose encore que f satisfait les conditions a), b), c) signalées dans la section 1 de la IIème partie. Nous recherchons des mesures μ sur $[0,1)$ telles que

$$\int_0^1 (\varphi \circ f)^{(k)}(x)\, d\mu(x) = \int_0^1 \varphi(x)\, d\mu(x) .$$

Considérons la fonctionnelle suivante G_t^k sur C_k,

$$G_t^k(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi \circ f_n)^{(k)}(t) .$$

La fonctionnelle est positive, σ-continue et est purement excessive (au sens de la décomposition de Riesz). Je ne fais pas tout de suite la vérification que $G_t^k(\varphi) \not\equiv +\infty$, mais on voit bien que de toute façon

$$G_t^k(\varphi \circ f) = -\varphi^{(k)}(t) + G_t^k(\varphi) \leqslant G_t^k(\varphi) .$$

Pour obtenir une distribution invariante d'ordre k, on peut être tenté de faire tendre t vers 1 après avoir affecté G_t^k d'un facteur convenable (dépendant de t). C'est ce que nous ferons dans le théorème suivant.

THEOREME 5. — *Soient k un entier > 1 et f une fonction réelle, continue, strictement croissante définie sur $[0,1]$ telle que*

a) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(x) \not\equiv x$

b) $f'(x)$ *existe pour tout* $x \in [0,1]$

c) $f^{(j)}(x)$ *existe et est une fonction continue, positive, croissante pour* $x \in [0,1)$ $(2 \leqslant j \leqslant k)$

alors pour tout $t \in (0,1)$ *et pour toute fonction* φ *de* C_k,

$$H_t^k(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{2m} \frac{(\varphi \circ f_n)^{(k)}(f_{-m}(t))}{(f_m'(f_{-m}(t))^k}$$

existe (la limite est finie ou infinie). Lorsque φ *appartient à* C_k *et que*

$\varphi^{(k)}(x)$ est une fonction bornée, $H_t^k(\varphi)$ est finie et la convergence vers cette limite se fait uniformément par rapport à toute variation de t dans un sous-intervalle fermé de $(0,1)$ et dans ce cas $H_t^k(\varphi)$ est une fonction continue de t. Enfin H_t^k est une fonctionnelle linéaire positive σ-continue sur le cône C_k qui est invariante par l'action de f (c'est-à-dire pour tout φ de C_k, $H_t^k(\varphi \circ f) = H_t^k(\varphi)$. Enfin

$$H_t^k(\varphi) = (f'(t))^k \, H_{f(t)}^k(\varphi) \; .$$

Démonstration. – Soit $\varphi \in C_k$, notons par ${}_mH_t^k$ la somme

$$\sum_{n=0}^{2m} \frac{(\varphi \circ f_n)^{(k)}(f_{-m}(t))}{(f_m'(f_{-m}(t))^k}$$

Pour les besoins de la démonstration, j'introduis une notation complexe qu'il m'est difficile d'éviter.

Je veux exprimer $(\varphi \circ f_n)^{(k)}(f_{-m}(t))$ en fonction des dérivées successives de φ et de f évaluées à des points de la forme $f_i(t)$

$$(-\infty < i < \infty) \; .$$

Effectivement $(\varphi \circ f_n)^{(k)}(f_{-m}(t))$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\varphi^{(p)}(f_{n-m}(t)) \prod_{i=-m}^{n-m-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}}$$

où $1 \leqslant p \leqslant k$, α_{ij} sont des entiers positifs.

L'entier p et les α_{ij} ne peuvent pas être arbitraires. Ils satisfont un certain nombre de conditions.

Désignons par (α) une matrice rectangulaire semi-infinie (α_{ij}) $(-\infty < i < \infty \; , \; 1 \leqslant j \leqslant k)$ qui remplit les conditions suivantes

1) les α_{ij} sont des entiers $\geqslant 0$

2) il existe un entier relatif $g(\alpha)$ et un entier $p(\alpha)$ $(1 \leqslant p(\alpha) \leqslant k)$ tels que

a) si $i > g(\alpha)$, alors pour tout j, $\alpha_{ij} = 0$

b) $\alpha_{g(\alpha),p(\alpha)} = 1$ et si $j \neq p(\alpha)$, $\alpha_{g(\alpha),j} = 0$

3) il existe un entier relatif $d(\alpha)$ tel que

a) si $i < d(\alpha)$, alors $\alpha_{ij} = 0$

b) $\sum_{j=1}^{k} j\alpha_{d(\alpha),j} = k$

4) si $d(\alpha) \leqslant i_0 < g(\alpha)$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_0 j} = \left(\sum_{i > i_0} \sum_{j=1}^{k} (j-1)\alpha_{ij} \right) + 1$

Désignons par A_k l'ensemble de toutes ces matrices. On vérifie par récurrence sur k qu'il existe une fonction $c_k : A_k \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est bornée et positive telle que pour toute fonction φ dérivable k fois et pour tout couple d'entiers positifs n et m

$$(\varphi \circ f_n)^{(k)}(f_{-m}(t)) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in A_k \\ g(\alpha) = n-m \\ d(\alpha) = -m}} c_k(\alpha)\, \varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \prod_{i=d(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}}$$

Si $\alpha \in A_k$, désignons par $i(\alpha) = \min(0\,, i_1(\alpha))$ où

$$i_1(\alpha) = \mathrm{mir}\left\{ i \mid \sum_{j=1}^{k} (j-1)\alpha_{ij} > 0 \right\}$$

$${}_m\mathrm{H}_t^k(\varphi) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in A_k \\ d(\alpha) = -m \\ 0 \leqslant g(\alpha) - d(\alpha) \leqslant 2m}} c_k(\alpha)\, \varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \frac{\prod_{i=i(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}}}{\left(\prod_{i=i(\alpha)}^{-1} f'(f_{+i}(t)) \right)^k}$$

(il est sous-entendu dans cette formule que si $i(\alpha) = 0$, alors

$$\left(\prod_{i=i(\alpha)}^{-1} f'(f_{+i}(t)) \right)^k = 1) \,.$$

Ainsi la suite ${}_m\mathrm{H}_t^k(\varphi)$ est une suite croissante en fonction de m. Ainsi la limite (finie ou infinie) $\mathrm{H}_t^k(\varphi)$ existe et vaut :

$$\mathrm{H}_t^k(\varphi) = \sum_{\substack{\alpha \in A_k \\ d(\alpha) = i(\alpha)}} c_k(\alpha)\, \varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \frac{\prod_{i=i(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}}}{\left(\prod_{i=i(\alpha)}^{-1} f'(f_{+i}(t)) \right)^k} \tag{1}$$

Isolons les évaluations qui se font sur l'ensemble $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ de celles qui portent sur l'ensemble $\{f_{-n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\mathrm{H}_t^k(\varphi) = \sum_{\substack{g(\alpha)\geqslant 0\\ d(\alpha)=i(\alpha)}} \left[c_k(\alpha)\,\varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \prod_{i=0}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}}\right]$$

$$\left[\prod_{i=i(\alpha)}^{-1} \prod_{j=2}^{\infty} \left(\frac{f^{(j)}(f_i(t)}{f'(f_i(t))\,(f'_{-i}(f_i(t)))^{j-1}}\right)^{\alpha_{ij}}\right] + \sum_{\substack{g(\alpha)<0\\ d(\alpha)=i(\alpha)}}$$

$$\left[c_k(\alpha)\,\frac{\varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t))}{f'_{-g(\alpha)}(f_{g(\alpha)}(t)))^{p(\alpha)}} \prod_{i=i(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=2}^{k} \left(\frac{f^{(j)}(f_i(t))}{f'(f_i(t))\,(f'_{-i}(f_i(t)))^{j-1}}\right)^{\alpha_{ij}}\right]$$

Pour établir la convergence de cette série lorsque $t\in(0,1)$ et lorsque φ admet une k^{e} dérivée qui soit une fonction bornée, il suffit de vérifier que les séries suivantes sont convergentes :

a) $$\sum_{\substack{\alpha\in \mathrm{A}_{k'}\\ d(\alpha)=0,\,p(\alpha)=p}} \prod_{i=0}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}} \qquad 1\leqslant p\leqslant k'\leqslant k$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(f_{-n}(t))}{(f'_n(f_{-n}(t))^{j-1}} \qquad 2\leqslant j\leqslant k$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(f'_n(f_{-n}(t)))^p} \qquad 1\leqslant p\leqslant k$$

Il est facile de voir que la série c) converge

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{f'_n(f_{-n}(t))}{f'_{n+1}(f_{-n-1}(t))}\right)^p = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{f'(f_{-n-1}(t)}\right)^p < 1\,.$$

Pour la série donnée en a), soit $\mathrm{M}_t = \sup\{f^{(j)}(x)\,|\,x\leqslant t\,,\,2\leqslant j\leqslant k\}$

$$\sum_{\substack{\alpha\in \mathrm{A}_{k'}\\ d(\alpha)=0\ p(\alpha)=p}} \prod_{i=0}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}} \leqslant \mathrm{M}_t^{k'-p} \prod_{n=0}^{\infty} (1+f'_n(t)) < \infty\,.$$

Vérifions la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(j)}(f_{-n}(t))}{(f'_n(f_{-n}(t))^{j-1}}$ $(2\leqslant j\leqslant k)$. Minorons $f'_n(f_{-n}(t))$: puisque $f'(t)$ est une fonction croissante par hypothèse,

on a que $f'(t) \geqslant \dfrac{f(t) - f(f(t))}{t - f(t)}$ et

$$f_n'(f_{-n}(t)) = \prod_{m=1}^{n} f'(f_{-m}(t)) \geqslant \frac{t - f(t)}{f_{-n}(t) - f_{-n+1}(t)} .$$

Il nous suffit d'établir la convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^{(j)}(f_{-n}(t))\,(\chi f_{-n-1}(t) - f_{-n}(t))^{j-1} .$$

Cette série vu la monotonicité de $f^{(j)}(t)$ est majorée par

$$\int_t^1 f^{(j)}(u)\,(1-u)^{j-2}\,du$$

Par la formule de Taylor, si $0 < t < v < 1$

$$f'(v) = \sum_{i=0}^{j-2} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i\,!}\,(v-t)^i + \frac{1}{(j-2)\,!} \int_t^v f^{(j)}(u)\,(v-u)^{j-2}\,du .$$

En faisant tendre v vers 1, on obtient par le théorème de Beppo-Lévy que

$$\int_t^1 f^{(j)}(u)\,(1-u)^{j-2}\,du < \infty .$$

Qu'avons-nous démontré jusqu'ici ? ${}_m\mathrm{H}_t^k$ est en un sens une suite de mesures : pour tout φ de C_k, ${}_m\mathrm{H}_t^k(\varphi) = \int_0^1 \varphi^{(k)}(x)\,d\mu_t^m(x)$. Nous avons établi que $d\mu_t^m$ est une suite croissante de mesures dont les masses sont bornées. Ainsi il existe une mesure bornée telle que pour tout φ de C_k, $\mathrm{H}_t^k(\varphi) = \int_0^1 \varphi^{(k)}(x)\,d\mu_t(x)$. Maintenant

$${}_m\mathrm{H}_t^k(\varphi \circ f) + \frac{\varphi^{(k)}(f_{-m}(t))}{(f_m'(f_{-m}(t))^k} = {}_m\mathrm{H}_t^k(\varphi) + \frac{(\varphi \circ f_{2m+1})^{(k)}(f_{-m}(t))}{(f_m'(f_{-m}(t))^k} .$$

Or
$$\lim_{m \to \infty} \frac{(\varphi \circ f_{2m+1})^{(k)}(f_{-m}(t))}{(f_m'(f_{-m}(t)))^k} = 0 .$$

Si $\dfrac{\varphi^k(f_{-m}(t))}{(f_m'(f_{-m}(t))^k}$ ne converge pas vers 0, alors $\mathrm{H}_t^k(\varphi \circ f) = \mathrm{H}_t^k(\varphi) = +\infty$.

Si $\dfrac{\varphi^{(k)}(f_{-m}(t))}{(f'_m(f_{-m}(t))^k}$ converge vers 0 lorsque m tend vers l'infini, on aura encore que $H_t^k(\varphi \circ f) = H_t^k(\varphi)$. H_t^k est donc une fonctionnelle σ-continue positive invariante sous l'action de f.

Un examen attentif de la démonstration revèle que si φ appartient à C_k et admet une dérivée k^e bornée, alors $H_t^k(\varphi)$ est une fonction continue de t.

$$\text{Enfin } {}_mH^k_{f(t)}(\varphi) = \sum_{n=0}^{2m} \frac{(\varphi \circ f_n)^{(k)}(f_{-m+1}(t))}{(f'_m(f_{-m+1}(t)))^k}$$

$$= \frac{{}_{m-1}H_t^k(\varphi)}{(f'(t))^k} + \sum_{n=2m-1}^{2m} \frac{(\varphi \circ f_n)^{(k)}(f_{-m+1}(t))}{(f'_m(f_{-m+1}(t))^k}$$

Ainsi $H_t^k = (f'(t))^k\, H^k_{f(t)}$. Q.E.D.

Nous allons observer une autre suite de fonctionnelles qui tend également vers H_t^k. Soit $t \in (0,1)$ et $\varphi \in C_k$, on voit par la formule (1) du théorème 5 que

$$S_t^k(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^{(k)}(f_n(t))\,(f'(t))^k \leqslant H_t^k(\varphi)\ .$$

D'autre part $S_t^k(\varphi) \leqslant S_t^k(\varphi \circ f)$.

THEOREME 6. — *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 5, si* $\varphi \in C_k$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi \circ f_m)^{(k)}(f_n(t))\,(f'_n(t))^k$ *comme suite en m est une suite croissante qui converge vers* $H_t^k(\varphi)$.

$$S_t^k(\varphi \circ f_m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\varphi \circ f_m)^{(k)}(f_n(t))\,(f'_n(t))^k$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in A_k \\ g(\alpha)-d(\alpha)=m}} c_k(\alpha)\,\varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \prod_{i=d(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t))^{\alpha_{ij}} (f'_{d(\alpha)}(t))^k$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in A_k, d(\alpha) \geqslant 0 \\ g(\alpha)-d(\alpha)=m}} c_k(\alpha)\,\varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \prod_{i=d(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}} \left(\prod_{i=0}^{d(\alpha)-1} f'(f_i(t)) \right)^k$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha \in A_k, d(\alpha) < 0 \\ g(\alpha) - d(\alpha) = m}} c_k(\alpha)\, \varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \frac{\prod_{i=d(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}}}{\left(\prod_{i=d(\alpha)}^{-1} f'(f_i(t))\right)^k}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in A_k \\ g(\alpha) - d(\alpha) = m}} c_k(\alpha)\, \varphi^{(p(\alpha))}(f_{g(\alpha)}(t)) \frac{\prod_{i=i(\alpha)}^{g(\alpha)-1} \prod_{j=1}^{k} (f^{(j)}(f_i(t)))^{\alpha_{ij}}}{\left(\prod_{i=i(\alpha)}^{-1} f'(f_i(t))\right)^k}$$

Après comparaison avec la formule (1) du théorème 5,

$$\lim_{m \to \infty} S_t^k(\varphi \circ f_m) = H_t^k(\varphi) .$$

Nous arrivons au théorème central de cette section qui justifie d'une certaine façon les laborieux calculs que nous avons introduits.

THEOREME 7. – *Admettons les mêmes hypothèses qu'au théorème 5, alors le cône des fonctionnelles linéaires positives σ-continues sur C_k invariantes par l'action de f est un cône convexe réticulé à base compacte dont les génératrices extrémales sont* $\{\lambda H_t^k \mid \lambda > 0,\ t \in (0,1)\}$.

Démonstration. – Sur le cône C_k, faisons agir deux transformations linéaires positives T et T_1 : si $\varphi \in C_k$, $T\varphi(x) = \varphi(f(x))$ et $T_1\varphi(x) = \int_0^x \varphi^{(k)}(f(u))\,(f'(u))^k \dfrac{(x-u)^{k-1}}{(k-1)!}\,du$. On a que $T_1 \leqslant T$, c'est-à-dire pour tout $\varphi \in C_k$, $T\varphi - T_1\varphi \in C_k$.

Partons d'une fonctionnelle linéaire positive σ-continue invariante pour l'application transposée de T : pour φ de C_k, $H(T\varphi) = H(\varphi)$. Ainsi $H(T_1\varphi) \leqslant H(\varphi)$. Utilisant la décomposition généralisée de Riesz, $H = H_1 + H_2$ où H_1 est une fonctionnelle invariante pour T_1^* (l'application transposée de T_1) et H_1 est une fonctionnelle purement excessive pour T_1^*. Le théorème 4 nous assure qu'il existe une mesure $d\nu_1(t)$ sur (0,1) telle que $H_1(\varphi) = \int_0^1 S_t^k(\varphi)\, d\nu_1(t)$. Par la décomposition de Riesz, il existe une mesure $d\nu_2(t)$ sur (0,1) telle que

$$H_2(\varphi) = \int_0^1 G_t(\varphi)\, dv_2(t) \quad \text{où} \quad G_t(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi \circ f_n)^{(k)}(t)\, (f_n'(t))^k .$$

Remarquons que $H_2(\varphi \circ f_m)$ est une suite décroissante qui converge vers zéro vu le théorème de Beppo-Lévy, car $G_t(\varphi \circ f_m)$ tend de façon monotone vers zéro. Utilisant également le théorème de Beppo-Lévy, on est assuré que $\lim_{m \to \infty} H_1(\varphi \circ f_m) = \int_0^1 H_t^k(\varphi)\, dv_1(t)$. Ainsi

$$H(\varphi) = \int_0^1 H_t^k(\varphi)\, dv_1(t) .$$

Nous avons donc établi que toute extrémale du cône des fonctionnelles linéaires, positives, σ-continues invariantes pour T^* est de la forme $\{\lambda H_t^k \mid \lambda > 0,\ t \in (0,1)\}$.

Soit $a \in (0,1)$, utilisons le lemme de Bauer pour nous convaincre que H_a^k est une fonctionnelle invariante extrémale. Soit $\nu(t)$ une mesure portée par $(f(a), a]$ telle que $H_a^k(\varphi) = \int_0^1 H_t^k(\varphi)\, d\nu(t)$ pour toute fonction φ de C_k. Nous avons déjà associé à H_t^k une mesure $d\mu_t$ sur $(0,1)$ telle que pour $H_t^k(\varphi) = \int_0^1 \varphi^{(k)}(x)\, d\mu_t(x)$. Ainsi pour toute fonction continue $\Psi(x)$

$$\int_0^1 \Psi(x)\, d\mu_a(x) = \int_0^1 \int_0^1 \Psi(x)\, d\mu_t(x)\, d\nu(t) .$$

On sait qu'on peut décomposer la mesure μ_t en une somme de deux mesures, la première étant continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la seconde étant singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. La partie singulière de la mesure μ_t est $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n'(t))^k\, \delta_{f_n(t)}$ (δ_u étant la masse-unité de Dirac disposée au point u) et le support de cette dernière mesure est $K(t) = \{0\} \cup \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{f_n(t)\}$. On a que $K(a) = \overline{\bigcup_{t \in K_\nu} K(t)}$, K_ν étant le support de la mesure ν. Ainsi $\nu = \delta_a$ et H_a^k est une fonctionnelle invariante extrême.

PARTIE III

FONCTIONS ASSOCIEES A L'ITERATION D'UNE FONCTION

1. Introduction.

Dans cette partie, j'étudierai un certain nombre de problèmes rattachés à l'itération d'une fonction d'une variable (réelle ou complexe). Etant donnée une fonction $f : A \longrightarrow A$ (où A est une partie du plan complexe), quelles sont par exemple les fonctions $c : A \longrightarrow A$ telles que pour tout z de A, $f(c(z)) = c(f(z))$. Dans la section 2 de cette partie, je rappellerai ce que les mathématiciens ont trouvé jusqu'ici lorsque A est un ouvert du plan complexe et que $f(z)$ est une fonction analytique. J'introduirai la fonction de Schröder et celle de Böttcher associée à une fonction admettant un point fixe $f(z_0) = z_0$. Les principales fonctions qui commutent avec f forment un groupe. Je représenterai ce groupe par des matrices triangulaires infinis et je déterminerai le générateur infinitésimal de la représentation.

Dans le cas d'une fonction f d'une variable réelle

$$(f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \ , \ \lim_{x \to \infty} f(x) - x = 1 \ , \ f(x) > x)$$

j'étudierai les principales solutions de l'équation d'Abel

$$G(f(x)) = G(x) + 1 \ .$$

Je m'intéresserai tout particulièrement à deux résultats de Kuczma [18] et de Lundberg [21]. Je déterminerai les principales fonctions $c(x)$ qui commutent avec $f(x)$. Je tenterai enfin d'évaluer le comportement asymptotique de $f_n(a)$ lorsque a est un nombre donné de $[0, \infty)$.

Pour nous donner des idées fréquentes dans ce contexte-ci, intéressons-nous aux fonctions $c(z)$ telles que $f(c(z)) = c(f(z))$. Plusieurs mathématiciens se sont déjà penchés sur cette situation. Je cite en particulier les personnes suivantes : Julia [13], Fatou [9], Lévy [20], Hadamard et Lüntz [11], Walker [31], Szekeres [30], Michel [23], Kuczma [18], Lundberg [21].

Considérons trois exemples particuliers pour voir les phénomènes associés à ce problème de commutation : soient $a > 0$, $f(x) = \mu x$ pour $x \in [0, a)$ où $0 < \mu < 1$, on voit que pour toute fonction $g(x)$ définie sur $[\mu a, a)$ et prenant des valeurs dans l'intervalle $[0, a)$, il existe une et une seule fonction $c(x)$ définie sur $[0, a)$ telle que $f(c(x)) = c(f(x))$ et la restriction de $c(x)$ à l'intervalle $[\mu a, a)$ donne la fonction $g(x)$. Si la fonction $g(x)$ est continue et que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \frac{g(\mu a)}{\mu},$$

alors la fonction $c(x)$ qui lui correspond est continue. Il existe donc énormément de fonctions continues qui commutent avec f dans ce cas. Cependant, si l'on exige de la fonction $c(x)$ d'être dérivable à $x = 0$, alors $c(x)$ est nécessairement une fonction linéaire qui s'annule à l'origine.

Le deuxième exemple est la version complexe du premier : soit μ un nombre complexe où $0 < |\mu| < 1$, considérons la fonction $f(z) = \mu z$ définie sur $\{z \mid |z| < 1\}$. Pour toute fonction g définie sur $\{z \mid |\mu| \leqslant |z| < 1\}$ et prenant des valeurs dans le disque-unité (ouvert), il existe une et une seule fonction $c(z)$ qui prolonge g et qui commute avec f. Cependant, parmi les fonctions c qui commutent avec f, les seules fonctions pour lesquelles $\lim_{z \to 0} \frac{c(z)}{z} = c'(0)$ existe sont les fonctions $c'(0)\, z$.

Comme troisième exemple, considérons la fonction $f(z) z^n$ (où n est un entier naturel $\geqslant 2$) définie sur $D = \{z \mid |z| < 1\}$, les fonctions $c : D \longrightarrow D$ qui sont analytiques et qui commutent avec f sont précisément les fonctions ωz^m où m est un entier naturel $\geqslant 1$ et où $\omega^{n-1} = 1$.

Une remarque très simple, qui a son origine aussi loin que Schröder, est appropriée ici : si f est une transformation d'un ensemble X d'un ensemble X en lui-même, si F est une bijection de X sur Y, un autre ensemble, et si $f^*(y) = F(f(F^{-1}(y))$, il y a correspondance biunivoque entre les transformations c de X qui commutent avec f et les transformations c^* de Y qui commutent avec f^* : la correspondance est précisément $c(x) = F^{-1}(c^*(F(x))$.

Une deuxième remarque : si $f : X \longrightarrow X$, si $c : X \longrightarrow X$

et si c commute avec f, la fonction c échange les points fixes de $f : f(x_0) = x_0 \longrightarrow c(x_0) = f(c(x_0))$. Plutôt que de considérer des fonctions c qui commutent avec f, nous allons supposer que f admet un point fixe à $x = x_0$ et nous tâcherons de déterminer des parties A de X contenant $\{x_0\}$ et des fonctions $c : f(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{X}$ telles que $c(x_0) = x_0$ et $(\forall x \in \mathrm{A})\ c(f(x)) = f(c(x))$.

2. Fonction de Schröder et de Böttcher.

Soit f une fonction analytique définie sur un voisinage Ω de $z = 0$ telle que $f(\Omega) \subseteq \Omega$, $f(0) = 0$, $f'(0) = \mu$ où $|\mu| < 1$. Posons $\Omega' = \{z \mid \lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0\}$, Ω' est un ouvert.

a) Si $\mu \neq 0$, sur tout compact de Ω', $\dfrac{f_n(z)}{\mu^n}$ converge uniformément vers une fonction $\mathrm{F}(z)$ où $\mathrm{F}(0) = 0$, $\mathrm{F}'(0) = 1$ et

$$\mathrm{F}(f(z)) = \mu \mathrm{F}(z) .$$

F est la fonction de Schröder associée à f. Sous le changement de variable $w = \mathrm{F}(z)$, $f^*(w) = \mathrm{F}(f(\mathrm{F}^{-1}(w))) = \mu w$ sur un voisinage suffisamment petit de l'origine.

Si $c(z)$ est une fonction analytique définie sur un voisinage connexe Ω_1 de l'origine telle que $c(0) = 0$, $c(\Omega_1) \subseteq \Omega'$, $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_1$, alors il existe un nombre complexe k tel $\mathrm{F}(c(z)) = k\mathrm{F}(z)$, c'est-à-dire il existe un voisinage Ω_2 tel que sur $\Omega_2, c(z) = \mathrm{F}_{-1}(k\mathrm{F}(z))$, F_{-1} étant l'inverse fonctionnel de F. Pour les démonstrations, je renvoie le lecteur soit aux travaux de Koenigs [16], soit au livre de Montel (pp. 51-52) [24] ou de Picard [26].

b) Si $\mu = 0$. Soit $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$ où $m > 1$, $a_m \neq 0$ considérons un premier changement de variable $w_1 = kz$ de telle sorte que $k^{m-1} = a_m$ (généralement si $a_m > 0$, on choisit $k > 0$).

$$f^*(w_1) = kf\left(\frac{w_1}{k}\right) .$$

D'où $f^*(w_1) = w_1^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^* w_1^n$. Soit $F_p^*(z)$ la série de puissances telle que $(F_p^*(w_1))^{m^p} = f_p^*(w_1)$ et $F_p^{*(1)}(0) = 1$. On établit que comme suite de séries de puissances $F_p^*(w_1)$ converge vers une série de puissances $F^*(w_1)$. De plus sur un voisinage commun de 0, toutes ces séries convergent et sur ce voisinage $F_p^*(w_1)$ converge uniformément vers $F^*(w_1)$. F^* satisfait l'équation fonctionnelle

$$F^*(f^*(w_1)) = (F^*(w_1))^m \quad \text{et} \quad F^{*(1)}(0) = 1 .$$

Si l'on pose $F(z) = F^*(kz)$, on a que

$$F(f(z)) = (F(z))^m \quad \text{et} \quad F'(0) = \frac{1}{a_m^{m-1}} .$$

C'est la fonction de Böttcher associée à la fonction f. Pour obtenir des fonctions qui commutent avec f, on choisit un entier $k > 0$ et l'on considère la fonction dont la série de puissance est $F^{-1}((F(z))^k)$. Je renvoie le lecteur au livre de Montel (pp. 61-62) [24] ou à l'article de Ritt [27], s'il veut connaître les détails au sujet de la fonction de Böttcher.

3. Dérivation invariante.

Considérons l'algèbre A des séries formelles en une variable z et déterminons les dérivations "continues" de l'algèbre qui sont invariantes par l'action de f. Il s'agit plus précisément de déterminer les opérateurs linéaires $D : A \longrightarrow A$ tels que

a) $D\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (Dz^n)$

b) $D(a(z)\, b(z)) = a(z)\, Db(z) + b(z)\, Da(z)$

c) $D(a(f(z))) = (Da)\,(f(z))$.

Supposons que D soit un tel opérateur et posons $H(z) = Dz$ (la valeur de l'opérateur D évaluée à la série de puissance z). Si $a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, puisque $Dz^n = nz^{n-1}\, H(z)$, $Da(z) = a'(z)\, H(z)$ où $a'(z)$ est la dérivée

usuelle de la série de puissance $a(z)$. Le fait que D est invariant pour l'action de f donne que $f'(z)\,\mathrm{H}(z) = \mathrm{D}(f) = (\mathrm{D}z)\,(f(z)) = \mathrm{H}(f(z))$.

Réciproquement, si $\mathrm{H}(z)$ est une série formelle telle que

$$\mathrm{H}(f(z)) = f'(z)\,\mathrm{H}(z)\ ,$$

la dérivation $\mathrm{D}a = \mathrm{H}(z)\,a'(z)$ donne lieu à une dérivation invariante par l'action de $f(z)$. Soit $\mu = p(1) = f'(0)$. Si $\mu = 0$, on peut vérifier qu'il n'existe pas de série de puissance telle que $\mathrm{H}(f(z)) = f'(z)\,\mathrm{H}(z)$. Si $\mu \neq 0$ et si $\mathrm{F}(z)$ est la fonction de Schröder associée à f

$$\left(\mathrm{F}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z)}{\mu^n}\right)\ ,$$

alors la fonction $\mathrm{H}(z) = \dfrac{\mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}'(z)}$ satisfait l'équation souhaitée

$$\mathrm{H}(f(z)) = \frac{\mathrm{F}(f(z))}{\mathrm{F}'(f(z))} = \frac{\mu\mathrm{F}(z)}{\mu\mathrm{F}'(z)}\,f'(z) = f'(z)\,\mathrm{H}(z)\ .$$

Remarquons que $\mathrm{H}'(0) = 1$.

Soit $\mathrm{H}_1(t)$ une fonction définie sur $[0\,,a)$ où $a < 1$ telle que

a) $\mathrm{H}_1'(0)$ existe

b) $\mathrm{H}_1(f(t)) = f'(t)\,\mathrm{H}_1(t)$

alors
$$\mathrm{H}_1(t) = \frac{\mathrm{H}_1(f_n(t))}{f_n'(t)} = \frac{f_n(t)}{f_n'(t)}\,\frac{\mathrm{H}_1(f_n(t))}{f_n(t)}$$

$$\mathrm{H}_1(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{f_n(t)}{\mu^n}}{\dfrac{f_n'(t)}{\mu^n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{H}_1(f_n(t))}{f_n(t)}$$

Ainsi
$$\mathrm{H}_1(t) = \frac{\mathrm{F}(t)}{\mathrm{F}'(t)}\,\mathrm{H}_1'(0)\ .$$

Indiquons en passant une autre solution à l'équation fonctionnelle $\mathrm{H}(f(t)) = f'(t)\,\mathrm{H}(t)$ pour $0 < t < 1$, c'est la fonction :

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n'(t)\right)^{-1}\ .$$

Regardons la dérivation que l'on obtient lorsque

$$f(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z} \quad (0 < p < 1) .$$

La fonction de Schröder $F(z)$ est $\frac{z}{1-z}$. D'où $H(z) = \frac{F(z)}{F'(z)} = z(1-z)$. Ceci explique l'origine de la présence de la fonction $z - z^2$ dans les calculs que nous avons faits dans la partie I.

4. Représentation des fonctions qui commutent avec $f(z)$.

Soit $f(z) = \mu z + \sum_{n=2}^{\infty} p(n) z^n$ alors que $0 < \mu < 1$ et soit $F(z)$ la fonction de Schröder associée à $f(z)$, $F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z)}{\mu^n}$, relions la fonction $\frac{F(z)}{F'(z)}$ et les séries de puissance $c(z)$ qui commutent avec $f(z)$.

THEOREME 8. — *Soit* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$ *une série de puissance dont les coefficients sont réels, on suppose que* $0 < \mu = p(1) < 1$, *soit* P *la matrice triangulaire* $p(x, y)$ $(x = 1, 2, \ldots ; y = 1, 2, \ldots)$ *telle que* $(f(z))^x = \sum_{y=1}^{\infty} p(x, y) z^y$, *alors il existe un et un seul semi-groupe de matrices infinies triangulaires réelles* $P_t = (p_t(x, y))$ $0 \leqslant t < \infty$ *tel que*

a) $P_{t+s} = P_t P_s$

b) $P_1 = P$, $P_0 = I$

c) $\lim_{t\downarrow 0} \frac{P_t - I}{t}$ *existe (la limite est prise à chaque entrée des matrices concernées).*

Si $F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(t)}{\mu^n}$, *si pour* $t \in [0, \infty)$, $f_t(z) = F^{-1}(\mu^t F(z))$

alors $\sum_{y=1}^{\infty} p_t(x, y) z^y = (f_t(z))^x$. *Si* $\mathrm{H}(z) = \dfrac{\mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}'(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n$, *alors*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{p_t(x, y) - \delta(x, y)}{t} = \begin{cases} 0 & si \quad y < x \\ (\log \mu^x)\, h_{y-x+1} & si \quad y \geqslant x \end{cases}$$

Démonstration. – Soit $a(z)$ une série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, on peut lui associer la matrice $\mathrm{A} = (a(x, y))_{x=1,2,\ldots;\, y=1,2,\ldots}$ où $(a(z))^x = \sum_{y=1}^{\infty} a(x, y) z^y$. Si $b(z)$ est une autre série de puissances à laquelle on associe la matrice $\mathrm{B} = (b(x, y))$. Si $(c(x, y)) = \mathrm{C} = \mathrm{AB}$, on a que

$$\begin{aligned} \sum_{y=x}^{\infty} c(x, y) z^y &= \sum_{y=x}^{\infty} \sum_{y_1=x}^{y} a(x, y_1)\, b(y_1, y)\, z^y \\ &= \sum_{y_1=x}^{y} a(x, y_1)\, (b(z))^{y_1} \\ &= (a(b(z))^x \ . \end{aligned}$$

Ainsi la matrice C est celle qui s'associe à la série de puissances $a(b(z))$. Si $\mathrm{F}(z)$ est la fonction de Schröder associée à f, considérons la matrice $\mathrm{P}_t = (p_t(x, y))$ telle que $\sum_{y=x}^{\infty} p_t(x, y) z^y = (\mathrm{F}^{-1}(\mu_t \mathrm{F}(z)))^x$. Comme les séries de puissances $f_t(z) = \mathrm{F}^{-1}(\mu_t \mathrm{F}(z))$ forment un semi-groupe à un paramètre il en est de même pour les matrices P_t.

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\sum_{y=1}^{\infty} p_t(1, y) z^y - z}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathrm{F}^{-1}(\mu^t \mathrm{F}(z)) - z}{t} =$$

$$= \frac{(\log \mu)\, \mu^t \mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}'(\mathrm{F}^{-1}(\mu^t \mathrm{F}(z))}\Bigg|_{t=0} = \log \mu \, \frac{\mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}'(z)}$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\sum_{y=x}^{\infty} p_t(x, y) z^y - z^x}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{(\mathrm{F}^{-1}(\mu^t \mathrm{F}(z)))^x - z^x}{t} =$$

$$= x\, z^{x-1} \log \mu \, \frac{\mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}'(z)} \, .$$

Ce qui établit l'existence du semi-groupe avec celle de son générateur infinitésimal. Leurs propriétés fondamentales ont été établies.

L'unicité du semi-groupe s'établit de façon tout-à-fait analogue aux groupes de Lie. Désignons par $H = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t - I}{t}$. Soit P_t^* un candidat compétitif à P_t, c'est-à-dire P_t^* est un semi-groupe de matrices triangulaires tel que $P_0^* = I$, $P_1^* = P$, $H^* = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t^* - I}{t}$ existe. On établit les faits suivants

a) $P_t^* H^* = H^* P_t^*$, $\frac{d}{dt} P_t^* = P_t^* H^*$ et $P_t^* = \exp t H^*$

b) $HH^* = H^*H$ et $\exp(H - H^*) = I$.

Utilisant le fait que si T est une matrice triangulaire non nulle avec des coefficients réels alors $\exp T \neq I$. Ainsi $H = H^*$ et $P_t = P_t^*$.

Posons une définition : On dira qu'une série de puissances $f(z) = \sum_1^\infty p(n) z^n$ admet des *racines positives de composition* si pour tout entier $m \geqslant 1$, il existe une série de puissances $g(z) = \sum_{n=1}^\infty q(n) z^n$ à coefficients positifs telle que $g_m(z) = f(z)$. Evidemment, une série de puissances qui admet des racines positives de composition a tous ses coefficients positifs et l'on a que $p(1) > 0$.

THEOREME 9. – *Soit* $f(z) = \sum_{n=1}^\infty p(n) z^n$ *une série de puissances à coefficients réels avec* $0 < p(1) = \mu < 1$, *soit* $F(z)$ *la fonction de Schröder de* $f(z)$ *et soit* $\sum_{n=1}^\infty h_n z^n = H(z) = \frac{F(z)}{F'(z)}$, *alors* $f(z)$ *admet des racines positives de composition si et seulement si pour tout* $n \geqslant 2$, $h_n \leqslant 0$.

Démonstration. – a) Soit $f(z)$ une série de puissances qui admet des racines positives de composition. Soit m un entier $\geqslant 1$, considérons une série de puissances à coefficients positifs $g(z)$ telle que $g_m(z) = f(z)$ ainsi que les semi-groupes P_t et Q_t associés respectivement à $f(z)$ et à $g(z)$ (comme dans le théorème 8). Par le théorème 8, $P_t = Q_{tm}$ et

$g(z) = f_{1/m}(z)$. Tous les coefficients de $\dfrac{f_{1/m}(z) - z}{1/m}$ sont positifs sauf le premier. D'autre part $\lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{f_t(z) - z}{t} = (\log \mu)\, \mathrm{H}(z)$; ce qui montre que pour $n \geqslant 2$, $h_n \leqslant 0$.

b) Supposons que $f(z)$ n'a pas toutes ses racines de composition positives, c'est-à-dire que les matrices P_t ne sont pas toutes des matrices à coefficients positifs pour $t = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$. Soit $\mathrm{N} = \inf\{y \mid (\mathcal{J}m)\, p_{1/m}(1, y) < 0\}$ et soit m_0 un entier tel que $p_{1/m_0}(1, \mathrm{N}) < 0$. $p_{1/m_0}(1, \mathrm{N}) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{1/2m_0}(1, j)\, p_{1/2m_0}(j, \mathrm{N})$. Remarquons que $p_{1/2m_0}(1, j) \geqslant 0$ si $1 \leqslant j < \mathrm{N}$, par le choix de N. D'autre part $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{1/2m_0}(i, j)\, z^j = \left(\sum p_{1/2m_0}(1, j)\, z^j\right)$. Ainsi

$$p_{1/2m_0}(x, y) \geqslant 0 \quad \text{si} \quad x \geqslant 2\,,\ 1 \leqslant y \leqslant \mathrm{N}\,.$$

De là, $p_{1/m_0}(1, \mathrm{N}) \geqslant p_{1/2m_0}(1, \mathrm{N})\, \mu^{1/2m_0} + \mu^{\mathrm{N}/2m_0}$. Procédant par récurrence, on obtient que

$$p_{1/m_0 2^k}(1, \mathrm{N}) \leqslant \frac{p_{1/m_0}(1, \mathrm{N})}{\prod\limits_{i=1}^{k} \left(\mu^{1/2^i m_0} + \mu^{\mathrm{N}/2^i m_0}\right)}\,.$$

Après s'être convaincu que $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \left(\dfrac{e^{a2^{-i}} + e^{b2^{-i}}}{2}\right)$ converge, on obtient que $\lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{p_t(1, \mathrm{N})}{t} < 0$ c'est-à-dire $h_{\mathrm{N}} > 0$.

THEOREME 10. — *Soit* $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p(n)\, z^n \not\equiv z$ *une série de puissances qui admet des racines positives de composition et supposons que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$, *si* $\mathrm{F}(z) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f_n(z)}{(p(1))^n}$ *et si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n = \mathrm{H}(z) = \frac{\mathrm{F}(z)}{\mathrm{F}'(z)}$$

alors $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n| = 2$, $H(1) = 0$ *et pour tout z dans le disque-unité* ($|z| \leqslant 1$) $f'(z) \neq 0$. *La fonction* $H(x)$ ($0 \leqslant x \leqslant 1$) *est une fonction concave.*

Démonstration. – Soit R le rayon de convergence de la série de Taylor de $H(z)$; comme tous les coefficients sauf un de la série sont négatifs, le point $z = R$ est une singularité pour $H(z)$. D'autre part, comme $f'(x) \neq 0$ ($0 \leqslant x < 1$) et que $H(f(z)) = f'(z)\,H(z)$, la fonction $H(z)$ ne peut pas connaître de singularité pour $z = R$ si $R < 1$. D'où $R \geqslant 1$. D'autre part $\lim_{x \to 1} H(x)$ existe car pour $0 \leqslant x < 1$, $H(x)$ est une fonction concave positive. Comme $f'(1) > 1$, alors

$$\lim_{x \to 1} H(x) = 0 .$$

Ainsi $\sum_{n=2}^{\infty} h_n = -1$.

Soit a un nombre du disque-unité ($|a| \leqslant 1$) tel que $f'(a) = 0$, puisque $a \neq 0$ et $a \neq 1$, alors $\sum_{n=2}^{\infty} h_n a^n \neq -a$, c'est-à-dire $H(a) \neq 0$. Comme $H(a) = \dfrac{F(a)}{F'(a)}$, on a que $F(a) \neq 0$ et $F'(a) \neq 0$. Comme $F'(a) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{f_n'(a)}{(p(1))^n}$, alors $f'(a) \neq 0$.

5. Solutions principales de l'équation d'Abel.

Considérons maintenant une fonction continue f définie sur l'intervalle (0,1) telle que

a) pour tout $x \in (0,1)$ $0 < f(x) < x$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \mu$ alors que $0 < \mu < 1$.

On dira que $F : (0,1) \longrightarrow R$ est une fonction de Schröder pour f si F satisfait l'équation fonctionnelle $F(f(x)) = \mu F(x)$. On dira qu'une fonction de Schröder est principale, s'il existe une suite μ_n telle que

$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\mu_n}$. Je cite ici les principaux résultats qui ont été obtenus ces dernières années au sujet des solutions principales de l'équation de Schröder. Dans les énoncés qui suivent, f satisfait toujours les hypothèses que nous venons d'énumérer.

THEOREME (Kneser [15]). — *S'il existe un* $\alpha > 1$ *tel que*

$$f(x) = \mu x + 0(x^{\alpha})$$

lorsque x *tend vers* 0, f *admet une et une seule fonction de Schröder continue dérivable à l'origine avec une dérivée égale à* 1.

THEOREME (Szekeres [30]). — *Si* f *admet une dérivée continue et s'il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $f'(x) = \mu + 0(x^{\delta})$ *lorsque* x *tend vers zéro alors* f *admet une fonction principale de Schröder continue strictement croissante qui est continûment dérivable.*

THEOREME (Kuczma [17]). — *Si* f *est une fonction convexe, alors* f *admet une fonction principale de Schröder qui est continue, convexe et strictement croissante.*

THEOREME (Lundberg [21]). — *Si* $f(x)/x$ *est une fonction monotone,* f *admet une fonction principale de Schröder qui est continue ; celle-ci est strictement croissante si* $f(x)/x$ *est croissante ou si* $f(x)$ *est une fonction concave.*

THEOREME (Kuczma [17]). — *Si* $f(x)$ *est absolument continue et si* $f'(x) > 0$ *presque partout et si* F *est une fonction de Schröder convexe et si* $x_0 \in (0,1)$, *il existe une constante* C *telle que*

$$F(x) = C \int_0^x \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(t)}{f_n'(x_0)} \right) dt .$$

Ma première tâche sera d'élargir la portée de ces résultats. Pour des raisons techniques, nous allons ramener le problème à la solution de l'équation d'Abel. Si f est une fonction définie sur (0,1), posons $f^*(y) = -\log(f(e^{-y}))$ pour $y > 0$. f^* est donc définie sur $(0, \infty)$. Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \mu$, alors

$$\lim_{y\to\infty} f^*(y) - y = \lim_{y\to\infty} -\log\left(\frac{f(e^{-y})}{e^{-y}}\right) = -\log\mu\ .$$

Enfin remarquons que $\frac{d}{dy}(f^*(y)) = \frac{e^{-y}f'(e^{-y})}{f(e^{-y})}$. Ces formules indiquent comment les propriétés de f vont se répercuter sur f^*. Par exemple soit $F(x)$ une fonction de Schröder pour f ; posons

$$F^*(y) = -\log F(e^{-y})\ .$$

On a que $F^*(f^*(y)) = F^*(f(e^{-y})) = -\log(\mu F(e^{-y})) = F^*(y) - \log\mu$. Réciproquement si F^* satisfait l'équation d'Abel :

$$F^*(f^*(y)) = F^*(y) - \log\mu$$

la fonction $F(x) = \exp(-F^*(-\log x))$ satisfait l'équation de Schröder $F(f(x)) = \mu F(x)$. Maintenant si l'on pose $f^{**}(y) = \frac{f^*(-(\log\mu)\,y)}{-\log\mu}$ et $F^{**}(y) = \frac{F^*(-(\log\mu)\,y)}{(-\log\mu)}$, on a que $F^{**}(f^{**}(y)) = F^{**}(y) + 1$.

Dorénavant, nous nous intéresserons à une fonction f définie sur $[0\,,\infty)$ à valeurs dans $[0\,,\infty)$ et nous étudierons l'équation d'Abel, c'est-à-dire nous parlerons des fonctions G définies sur $[0\,,\infty)$ telles que

$$G(f(x)) = G(x) + 1\ . \tag{1}$$

Posons une définition dont l'origine remonte jusqu'à Szekeres [30] et dont Kuczma [17] et Lundberg [21] ont également fait usage : une solution $G(x)$ de l'équation d'Abel (1) sera dite *principale* s'il existe une suite a_n de nombres réels telle que

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - a_n\ .$$

Il est immédiat de vérifier que si $G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont deux solutions principales alors ces deux fonctions diffèrent par une constante, c'est-à-dire $G_1(x) - G_2(x)$ est une fonction constante. D'autre part si $G(x)$ est une solution à l'équation d'Abel, $G(x) + C$ est aussi une solution. Si bien que si l'on connaît une solution principale on connaît toutes les autres solutions principales et par abus de langage, on dira à l'occasion que l'une ou l'autre de celles-ci est *la* solution principale de l'équation. Comme autre remarque, supposons que $G(x)$

soit une solution principale de l'équation (1), c'est-à-dire

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - a_n ,$$

si $a \geqslant 0$, on a que $G(x) - G(a) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a))$, ainsi

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a))$$

est une solution principale. Partant de ces remarques, les problèmes que je veux traiter sont les suivants

a) Etant donnée une solution $G(x)$ à l'équation d'Abel, sous quelles conditions sur G (et sur f), peut-on être assuré que $G(x)$ est une solution principale.

b) Sous quelles conditions sur f, peut-on être assuré que l'équation d'Abel admet une solution principale.

c) Sous quelles conditions sur f, une solution principale sera une fonction injective.

d) En pratique, sachant que l'équation d'Abel admet une solution principale, comment peut-on prédire le comportement asymptotique des termes de convergence ; ce qui revient à étudier le comportement asymptotique de $f_n(a)$ pour un nombre a fixé.

THEOREME 11. – *Soit* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *une fonction telle que* $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 1$ *et telle que pour tout couple de nombres positifs a et b,* $f_n(a) - f_n(b)$ *est une suite bornée, on suppose que* $G(x)$ *satisfait l'équation d'Abel* (1) *et qu'il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $\lim_{\substack{x\to\infty,\, y\to\infty \\ |x-y|<\delta}} G(x) - G(y) - x + y = 0$ *alors* $G(x)$ *est une solution principale.*

Démonstration. – On vérifie aisément si pour tout $M > 0$

$$\lim_{\substack{x\to\infty,\, y\to\infty \\ |x-y|< M}} G(x) - G(y) - x + y = 0 .$$

Soit $a \in [0, \infty)$, puisque $G(f(x)) = G(x) + 1$, on a que

$$G(x) - G(a) = G(f(x)) - G(f(a)) = G(f_n(x)) - G(f_n(a)) .$$

La suite $f_n(x) - f_n(a)$ étant bornée,

$$\lim_{n\to\infty} G(f_n(x)) - G(f_n(a)) - f_n(x) + f_n(a) = 0 .$$

Ainsi $G(x) - G(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a)$. Q.E.D.

COROLLAIRE. — *Supposons que f satisfait les hypothèses du théorème* 11 *et que* G *est une solution de l'équation d'Abel ;* G *est une solution principale si l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite*

a) $\lim_{x\to\infty} G(x) - x$ *existe*

b) $G(x) - x$ *est une fonction monotone*

c) *pour tout nombre* $k < 1$, *il existe un nombre* x_0 *tel que* $G(x) - kx$ *est une fonction croissante sur* $[x_0, \infty)$

d) *pour tout nombre* $K > 1$, *il existe un nombre* x_0 *tel que* $G(x) - Kx$ *est une fonction décroissante sur* $[x_0, \infty)$

e) *il existe deux fonctions* $B(x)$ *et* $C(x)$ *telles que*

$$G(x) - x = B(x) + C(x) ,$$

$C(x)$ *est monotone,* $\lim_{\substack{x\to\infty,\, y\to\infty \\ |x-y|\leqslant 1}} B(x) - B(y) = 0$.

Démonstration. — On vérifie sans trop de peine que a), b), c) ou d) implique e). Supposons donc que e) a lieu, c'est-à-dire que $G(x) = x + B(x) + C(x)$ où $C(x)$ est monotone et où

$$\lim_{\substack{x\to\infty,\, y\to\infty \\ |x-y|\leqslant 1}} (B(x) - B(y)) = 0 .$$

Vérifions que $\lim_{\substack{x\to\infty,\, y\to\infty \\ |x-y|\leqslant 1}} C(x) - C(y) = 0$. Prenons intérêt aux valeurs de $C(x)$ lorsque $x = a, f(a), \ldots, f_n(a), \ldots$ où a est un nombre positif fixé. On a que

$$|C(f_{n+1}(a)) - C(f_n(a))| \leqslant |1 - f_{n+1}(a) + f_n(a)| + |B(f_{n+1}(a)) - B(f_n(a))| .$$

Comme $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \infty$, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} |C(f_{n+1}(a)) - C(f_n(a))| = 0 .$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier N tel que si $n \geqslant N$,

$$|C(f_{n+3}(a)) - C(f_n(a))| < \varepsilon \quad \text{et} \quad f_{n+2}(a) - f_n(a) \geqslant 1 .$$

Si $x \geqslant f_N(a)$ et si $0 \leqslant y - x \leqslant 1$, il existe un entier n tel que

$$f_n(a) \leqslant x \leqslant y \leqslant f_{n+3}(a) ;$$

dans ce cas $|C(x) - C(y)| \leqslant |C(f_{n+3}(a)) - C(f_n(a))| < \varepsilon$. Nous avons donc établi que $G(x)$ satisfait l'hypothèse du théorème 11, elle est donc une solution principale.

THEOREME 12. – *Soit* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *une fonction telle que pour tout* $x \geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$ *et telle que* $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 1$, *supposons que pour tout* $\delta > 0$

$$V_\delta(\omega) = \sup\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |\omega(x_{n+1}) - \omega(x_n)| \,|\, 0 \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \cdots \right.$$
$$\left. \text{et pour tout } i,\ x_{i+1} - x_i > \delta \right\}$$

est un nombre fini alors que $\omega(x) = f(x) - x$, *alors l'équation d'Abel* $G(f(x)) = G(x) + 1$ *admet une solution principale. Pour celle-ci, on a que* $\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty,\, |x-y|\leqslant 2} (G(x) - G(y) - x + y) = 0$.

Démonstration. – Soient a et x deux nombres positifs donnés, il s'agit de démontrer que la suite $f_n(x) - f_n(a)$ converge. Alors deux possibilités ont lieu :

a) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de couples d'entiers naturels (n, m) tels que $|f_n(x) - f_m(a)| < \varepsilon$. Démontrons que dans ce cas, on peut trouver deux entiers naturels N et M tels que

$$\lim_{k\to\infty} f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a) = 0 .$$

Considérons un nombre positif B suffisamment grand pour que les deux conditions soient satisfaites : si $x \geqslant B$, $|f(x) - x - 1| < \frac{1}{12}$ et

si $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont des nombres tels $x_0 \geqslant B$, $x_1 - x_0 > \frac{1}{6}$, $x_2 - x_1 > \frac{1}{6}, \ldots, x_n - x_{n-1} > \frac{1}{6}$ alors $\sum_{i=1}^{n} |\omega(x_i) - \omega(x_{i-1})| < \frac{1}{6}$.

Choisissons deux entiers naturels N et M tels que $f_M(a) \geqslant B + 1$, $|f_N(x) - f_M(a)| < \frac{1}{3}$. Vérifions que pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$|f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a) < \frac{1}{2}.$$

Raisonnons par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver deux entiers $k_1 \geqslant 0$ et $k_2 \geqslant 0$ tels que

$$|f_{N+k_1}(x) - f_{M+k_1}(a)| < \frac{1}{3}$$

$$|f_{N+k_2}(x) - f_{M+k_2}(a)| \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \leqslant |f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a)| < \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad k_1 < k < k_2 .$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} |f_{N+k_1+1}(x) - f_{M+k_1+1}(a)| &\leqslant |f_{N+k_1}(x) - f_{M-k_1}(a)| + \\ &+ |f_{N+k_1+1}(x) - f_{N+k_1}(x) - 1| + |f_{M+k_1+1}(a) - f_{M+k_1}(a) - 1| \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} |f_{N+k_1}(x) - f_{M+k_1}(a)| &\geqslant \big| |f_{N+k_1+1}(x) - f_{M+k_1+1}(a)| - \\ &- |f_{N+k_1+1}(x) - f_{N+k_1}(x) - f_{M+k_1+1}(a) + f_{M+k_1}(a)| \big| > \\ &> \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Considérons comme suite $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (avec $n = 2(k_2 - k_1) - 1$) les nombres $f_{N+k}(x)$ et $f_{M+k}(a)$, $k_1 \leqslant k_2$, que l'on ordonne par ordre croissant. Or

$$|\sum_{k=k_1}^{k_2-1} f_{N+k+1}(x) - f_{M+k+1}(a) - f_{M+k}(x) + f_{M+k}(a)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\omega(x_i) - \omega(x_{i-1})$$

D'où

$$|f_{N+k_2}(x) - f_{M+k_2}(a) - f_{N+k_1}(x) + f_{M+k_1}(a)| < \frac{1}{6} \cdot$$

Mais, par l'inégalité triangulaire

$$|f_{N+k_2}(x) - f_{M+k_2}(a) - f_{N+k_1}(x) + f_{M+k_1}(a)| > \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot$$

D'où l'on a une contradiction. Nous avons donc établi que pour tout entier $k \geqslant 0$, $|f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a)| < \frac{1}{2}$. Soit ε un nombre de l'intervalle $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, en répétant le raisonnement que nous venons de faire, on peut trouver deux entiers naturels N_ε, M_ε tels que $M_\varepsilon \geqslant M$ et pour tout entier $k \geqslant 0$

$$|f_{N_\varepsilon+k}(x) - f_{M_\varepsilon+k}(a)| < \varepsilon .$$

Ainsi

$$|f_{N+M_\varepsilon-M+k}(x) - f_{N_\varepsilon+k}(x)| \leqslant |f_{N+M_\varepsilon+M+k}(x) - f_{M_\varepsilon+k}(a)| +$$

$$+ |f_{M_\varepsilon+k}(x) - f_{M_\varepsilon+k}(a)| < \frac{5}{6} \cdot$$

d'où $$N_\varepsilon - N = M_\varepsilon - M$$

et $$\overline{\lim_{k\to\infty}} |f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a)| \leqslant \varepsilon .$$

Ce qui démontre bien que $\lim_{k\to\infty} f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a) = 0$.

Maintenant $$\lim_{k\to\infty} f_{N+k}(x) - f_k(x) = N$$

et $$\lim_{k\to\infty} f_{M+k}(a) - f_k(a) = M .$$

Ainsi $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_n(a) = M - N .$$

b) Si la possibilité a) n'a pas lieu, alors il existe un nombre ε_0 ,

$0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ tels qu'il existe seulement un nombre fini de couples (n, m) d'entiers naturels tels que $|f_n(x) - f_m(a)| < \varepsilon_0$. Soit B un nombre suffisamment grand pour que pour tous les $x \geqslant B$,

$$|f(x) - x - 1| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et pour qu'il n'existe aucun couple d'entiers (n, m) tel que

$$f_m(a) \geqslant B - 1 \ , \ |f_n(x) - f_m(a)| < \varepsilon_0 \ .$$

Remarquons que si $f_m(a) \geqslant B$ et si

$$f_m(a) + \varepsilon_0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{m+1}(a) - \varepsilon_0$$

alors $f_m(a) + \varepsilon_0 + 1 - \frac{\varepsilon_0}{2} \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_{m+1}(a) - \varepsilon_0 + 1 + \frac{\varepsilon_0}{2}$.

$$f_{m+1}(a) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_{m+2}(a)$$

étant donné que $|f(y) - y - 1| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$ lorsque $y \geqslant B$. D'où

$$f_{m+1}(a) + \varepsilon_0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_{m+2}(a) - \varepsilon_0 \ .$$

Soient M et N deux entiers naturels tels que $f_M(a) \geqslant B$ et

$$f_M(a) + \varepsilon_0 \leqslant f_N(x) \leqslant f_{M+1}(a) - \varepsilon_0 \ ,$$

alors pour tout entier k,

$$f_{M+k}(a) + \varepsilon_0 \leqslant f_{N+k}(x) \leqslant f_{M+k+1}(a) - \varepsilon_0 \ .$$

Démontrons que $f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a)$ est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, considérons un nombre B_ε suffisamment grand pour assurer le fait suivant : pour toute suite finie

$$B_\varepsilon \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \ ,$$

telle que $x_i - x_{i-1} > \varepsilon_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} |\omega(x_i) - \omega(x_{i-1})| < \varepsilon \ .$$

On peut trouver un entier $k_\varepsilon > 0$ tel que $f_{M+k_\varepsilon}(a) \geqslant B_\varepsilon$. Soit k un

entier plus grand que k_ε, en utilisant comme suite $\{x_i\}_{i=0}^n$, les nombres $f_{N+j}(x)$ et $f_{M+j}(a)$ $k_\varepsilon \leqslant j < k$ que l'on ordonne par ordre croissant, on obtient que

$$|f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a) - f_{N+k_\varepsilon}(x) + f_{M+k_\varepsilon}(a)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\omega(x_i) - \omega(x_{i-1})| < \varepsilon .$$

D'où si $p \geqslant k_\varepsilon$, $q \geqslant k_\varepsilon$,

$$|f_{N+p}(x) - f_{M+p}(a) - f_{N+q}(x) + f_{M+q}(a)| < 2\varepsilon .$$

La suite $f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a)$ est donc convergente et

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) - f_k(a) = M - N + \lim_{k\to\infty} (f_{N+k}(x) - f_{M+k}(a)) .$$

Désignons par $G(x)$ la limite de $f_n(x) - f_n(a)$ lorsque n tend vers l'infini. Vérifions que pour tout $M > 0$,

$$\lim_{\substack{x\to\infty,\, y\to\infty \\ |x-y|\leqslant M}} (G(x) - G(y) - x + y) = 0 .$$

Il suffit de vérifier que la limite est zéro pour un M particulier, disons $M = \frac{1}{2}$. Soit ε un nombre de l'intervalle $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, considérons un nombre N_ε suffisamment grand pour assurer la situation suivante : pour toute suite finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ si $N_\varepsilon \leqslant x_0$, si $x_i - x_{i-1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} |\omega(x_i) - \omega(x_{i-1})| \leqslant \varepsilon \quad \text{où} \quad \omega(x) = f(x) - x .$$

Supposons que $x \geqslant N_\varepsilon$, $y \geqslant N_\varepsilon$, $|y - x| \leqslant \frac{1}{2}$ et que

$$|G(x) - G(y) - x + y| > 2$$

alors il existe un n tel que $|f_n(x) - f_n(y) - x + y| > 2\varepsilon$. Ce qui permet de trouver une suite $x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1}$ telle que :

$$x_{i+2} = f(x_i) \ (0 \leqslant i < 2k - 2) , \ x_i - x_{i-1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \ (1 \leqslant i < 2k) ,$$

$$x_0 \geqslant N \ , \ |f(x_{2k-1}) - f(x_{2k-2}) - x_1 + x_0| > \varepsilon \ .$$

Mais

$$|f(x_{2k-1}) - f(x_{2k-2}) - x_1 + x_0| = |\sum_{i=0}^{k-1} \omega(x_{2i+1}) - \omega(x_{2i})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2k-1} |\omega(x_i) - \omega(x_{i-1})| \leqslant \varepsilon \ .$$

Nous obtenons une contradiction, ce qui montre que

$$\lim_{\substack{x \to \infty, y \to \infty \\ |x-y| \leqslant \frac{1}{2}}} G(x) - G(y) - x + y = 0 \ .$$

Le théorème 12 est démontré.

COROLLAIRE 1. – *Si* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, *si* $\lim_{x \to \infty} f(x) - x = 1$, *si pour tout* $x \geqslant 0$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \infty$ *et si* $f(x) - x$ *est une fonction à variation bornée, alors l'équation d'Abel pour* $f(x)$ *admet une solution principale.*

COROLLAIRE 2. – *Si* $f : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty]$, *si* $\lim_{x \to \infty} f(x) - x = 1$, *et si* $f(x) - x$ *est une fonction monotone, alors l'équation d'Abel pour* f *admet une solution principale.*

En effet, dans ce cas, la variation de $f(x) - x = |1 - f(0)|$.

COROLLAIRE 3. – *Si* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, *si pour tout* $x \geqslant 0$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \infty$ *et s'il existe une fonction* $g(x)$ *remplissant les conditions suivantes* :

a) *pour tout* x, $|f(x) - x - 1| \leqslant g(x)$,

b) $\int_0^\infty g(t)\, dt$,

c) $g(x)$ *est une fonction décroissante,*

alors l'équation d'Abel admet une solution principale.

Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 12. Soit $\delta > 0$, soit une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que $x_{n+1} - x_n \geqslant \delta$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n) - f(x_{n-1}) - x_n - x_{n-1}| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2g(x_n)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2g(n\delta)$$

$$\leqslant 2g(0) + \frac{2}{\delta} \int_0^{\infty} g(t)\,dt .$$

Je peux présenter une remarque au sujet du théorème 12, celle-ci se présentera sous forme de lemme :

LEMME 13. — *Soit h une fonction réelle définie sur* $[0, \infty)$, *posons*

$$V_\delta(h) = \sup\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |h(x_n) - h(x_{n-1})| \,|\, x_n - x_{n-1} \geqslant \delta \text{ pour } n = 1, 2, \ldots \right\}$$

alors s'il existe un $\delta_0 > 0$ *tel que* $V_{\delta_0}(h) < \infty$ *alors pour tout* $\delta > 0$ $V_\delta(h) < \infty$.

Démonstration. — On se convainc facilement que h est une fonction bornée et que $\lim_{x \to \infty} h(x)$ existe. Sans perte de généralité dans la démonstration, on peut supposer que $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$. Posons

$$M = \sup\{|h(x)| \,|\, x \in [0, \infty)\} .$$

Soit une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que $x_0 \geqslant 0$, $x_n - x_{n-1} \geqslant \delta_0/3$ et pour tout n $h(x_n) \neq h(x_{n+1})$, nous allons vérifier que $V_{\delta_0}(h) < \infty$). Etudions la série $\sum_{n=1}^{\infty} |h(x_n) - h(x_{n-1})|$.

On peut trouver une suite $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ telle que

a) $y_0 = x_0$, $\{y_m\}$ est une sous-suite de la suite $\{x_n\}$.

b) pour tous les entiers n tels que $y_m < x_n \leqslant y_{m+1}$,

$$h(x_n) - h(x_{n-1})$$

sont tous des nombres de même signe.

c) s'il existe un entier m tel que $x_n = y_m$ alors $h(x_{n-1}) - h(x_n)$ et $h(x_{n+1})$ sont deux nombres de signe opposé.

Et dans ce cas

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h(x_n) - h(x_{n-1})| = \sum_{m=1}^{\infty} |h(y_m) - h(y_{m-1})|$$

$$= |h(y_0) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} h(y_m)(-1)^m|$$

Maintenant

$$\sum_{m=1}^{\infty} h(y_m)(-1)^m = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{m=1}^{N} h(y_{3m+i})(-1)^m \right)(-1)^i \right).$$

d'où

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} h(y_m)(-1)^m \right| \leqslant 3\, V_{\delta_0}(h)$$

Et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h(x_n) - h(x_{n-1})| \leqslant M + 6\, V_{\delta_0}(h) .$$

Ainsi on obtient par récurrence que $V_{\delta_0 3^{-n}}(h) < \infty$ pour tout entier n. Ce qui donne le résultat du lemme.

Intéressons-nous à déterminer une condition suffisamment générale sur une fonction f pour qu'une solution principale de l'équation d'Abel soit une fonction injective :

THEOREME 14. – *Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[0, \infty)$ à valeur dans $[0, \infty)$ telle que*

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 1$,

b) *il existe une suite k_n de nombres de l'intervalle $[0,1)$ telle que* $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$ et si $|x - n| \leqslant 1$, $|y - n| \leqslant 1$, $\dfrac{f(x) - x - f(y) + y}{x - y} \geqslant -k_n$ alors toute solution principale à l'équation d'Abel $G(f(x)) = G(x) + 1$ est une fonction injective.

Démonstration. – Par hypothèse, on a que

$$\frac{f(x) - x - f(y) + y}{x - y} > -1$$

si $|x - y| \leqslant 2$, c'est-à-dire $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$. D'où f est une fonction

croissante. Comme il existe une suite μ_n telle que

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \mu_n$$

$G(x)$ est une fonction croissante. Pour démontrer que $G(x)$ est une fonction injective, il suffit de vérifier que si $x < y < f(x)$ alors $G(y) \neq G(x)$.

$$G(y) - G(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) - f_n(x) = (y - x) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x)}{f_n(y) - f_n(x)} .$$

Il existe un entier N et une fonction h définie sur les entiers $\geqslant$ N à valeurs entières tels que $|f_n(x) - h(n)| \leqslant 1$, $|f_n(y) - h(n)| \leqslant 1$. D'où, pour $n \geqslant$ N

$$\frac{f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x)}{f_n(y) - f_n(x)} \geqslant (1 - k_{h(n)}) .$$

Par le fait que $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 1$, la fonction h ne peut pas prendre la même valeur plus de trois fois si N est suffisamment grand. D'où

$$\prod_{n=N}^{N'} \frac{f_{n+1}(y) - f_{n+1}(x)}{f_n(y) - f_n(y)} \geqslant \prod_{n=N}^{\infty} (1 - k_n)^3 > 0'.$$

Ce qui montre que $G(y) - G(x) > 0$.

COROLLAIRE 1. – *Soit* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *une fonction telle que* $f(0) > 0, f(x) - x$ *est une fonction croissante,* $\lim_{x\to\infty} f(x) - x = 1$, *alors la solution principale de l'équation d'Abel existe et est strictement croissante.*

On sait déjà que l'équation d'Abel admet une solution principale. Maintenant si $x < y$, $f(x) - x \leqslant f(x) - y$, c'est-à-dire

$$\frac{f(x) - f(y) - x + y}{x - y} \geqslant 0 .$$

Posant $k_n = 0$ et appliquant le théorème 14, on obtient le corollaire. Ce corollaire est essentiellement dû à Lundberg [21].

COROLLAIRE 2. – *Soit* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *une fonction dérivable telle que*

a) $\lim_{x \to \infty} f(x) - x = 1$.

b) *il existe une suite* k_n *pour laquelle* $0 \leqslant k_n < 1$, *pour tout* x, *si* $|x - n| \leqslant \frac{1}{2}$ *alors* $|f'(x) - 1| \leqslant k_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$.

Alors l'équation d'Abel $G(f(x)) = G(x) + 1$ *admet la solution principale qui est une fonction injective.*

En effet si $\omega(x) = f(x) - x$, pour $\delta = 1$, $V_\delta(\omega) \leqslant 2 \sum_{n=0}^{\infty} k_n$; le théorème 12 et le lemme 13 assure l'existence de la solution principale à l'équation d'Abel.

Si $|x - n| \leqslant 1$, $|y - n| \leqslant 1$, alors par le théorème de la moyenne on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{|f(x) - f(y) - x + y|}{x - y} \leqslant k_{n-1} + k_n + k_{n+1}$$

$$\text{Si } k_n^* = \inf \left\{ \frac{|f(x) - f(y) - x + y|}{x - y} \;\Big|\; |x - n| \leqslant 1, |y - n| \leqslant 1 \right\}$$

alors $0 \leqslant k_n^* < 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^* \leqslant 3 \sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$. Par le théorème 14, la solution principale à l'équation d'Abel sera une fonction injective.

Pour terminer cette exploration de l'équation d'Abel, posons des jalons dans une dernière direction : il s'agira de préciser le comportement asymptotique de $f_n(x)$ lorsqu'un peu plus d'information est donné sur la fonction f ou sur une solution donnée de l'équation d'Abel. Signalons un lemme banal mais qu'il convient de citer :

LEMME 15. – *Soit* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *telle que pour tout* x, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \infty$ *et supposons que* G *soit une solution de l'équation d'Abel* $G(f(x)) = G(x) + 1$ *qui remplisse la condition suivante :* $\lim_{x \to \infty} G(x) - x$ *existe, alors il existe une constante* C *telle que*

$$G(x) = \lim_{n \to \infty} (f_n(x) - n) + C .$$

Démonstration :

$$G(x) = G(f(x)) - 1 = G(f_n(x)) - n$$

$$G(x) - (f_n(x) - n) = G(f_n(x)) - f_n(x)$$

D'où $$G(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - n) + \lim_{x\to\infty} (G(x) - x) .$$

On peut préciser le corollaire 3 du théorème 12.

THEOREME 16. – *Soit* $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *telle que*

a) *pour tout* x, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$

b) *il existe une suite* k_n *de nombres positifs tels que* $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$ *et si* $n \leqslant x \leqslant n + 1$, $|f(x) - x - 1| \leqslant k_n$ *alors*

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - n)$$

existe. C'est une solution de l'équation d'Abel et $\lim_{n\to\infty} G(x) - x = 0$.

Démonstration. – Posons $\omega(x) = f(x) - x - 1$, on obtient que $(f_n(x) - n) - x = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f_i(x))$. A cause des hypothèses, il existe un entier N tel que si $x \geqslant N$, $f(x) \geqslant x + \frac{1}{2}$ ainsi $f_i(x) \geqslant x + \frac{i}{2}$. Et $\sum_{i=0}^{\infty} |\omega(f_i(x))| \leqslant 2 \sum_{n \geqslant x} k_n$ si $x \geqslant N$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) - n$ existe et $\lim_{x\to\infty} G(x) - x = 0$.

Indiquons un lemme d'ordre technique pour faciliter l'usage du théorème 16.

LEMME 17. – *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur* $[0, \infty)$ *telles que*

a) *pour tout* x, $f(x) \geqslant 0$ *et* $g(f(x)) = x$.

b) *il existe une suite de nombres* k_n^* *tels que* $0 \leqslant k_n^* < 1$, $|g(x) - x + 1| \leqslant k_n^*$ *si* $n \leqslant x \leqslant (n + 1)$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^* < \infty$.

Alors il existe une suite de nombres k_n tels que $0 \leqslant k_n < 1$, $|f(x) - x - 1| \leqslant k_n$ si $n \leqslant x \leqslant (n + 1)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$.

Démonstration. – Soit x un nombre de l'intervalle $[n, n+1]$ où n est un entier naturel, par hypothèse

$$x - 1 - k_n^* \leqslant g(x) \leqslant x - 1 + k_n^* .$$

Posons $k^* = \sup\{k_n^*\}$ alors $k^* < 1$ et $x - 1 - k^* \leqslant g(x) \leqslant x - 1 + k^*$. Posant $x = f(y)$ $f(y) - 1 - k^* \leqslant y \leqslant f(y) - 1 + k^*$. Ainsi

$$y + 1 - k^* \leqslant f(y) \leqslant y + 1 + k^* .$$

Si l'on pose $k_n = \sup\{|f(x) - x - 1| \mid n \leqslant x \leqslant n+1\}$, on a que $0 \leqslant k_n < 1$. Si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $n \leqslant f(x) \leqslant n+3$ et

$$|g(f(x)) - f(x) + 1| \leqslant k_n^* + k_{n+1}^* + k_{n+2}^* .$$

D'où $\quad k_n \leqslant k_n^* + k_{n+1}^* + k_{n+2}^* \quad$ et $\quad \sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$.

En quittant ce lemme, j'en indique un autre du même type, mais dont je tais la démonstration.

LEMME 18. – *Soient f et g deux fonctions dérivables définies sur $[0, \infty)$ telles que*

a) *pour tout x, $f(x) \geqslant 0$ et $g(f(x)) = x$.*

b) $\lim_{x \to \infty} g(x) - x = -1$

c) *il existe une suite de nombres k_n tels que $0 \leqslant k_n < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} k_n < \infty$ et pour tout x de $[n, n+1]$, $|g(x) - 1| \leqslant k_n$, alors l'équation d'Abel $G(f(x)) = G(x) + 1$ admet une solution principale qui est une fonction injective.*

Quelques commentaires sur le théorème 16. Soit une fonction $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) - x = 1$ et telle que $f(x) - x - 1$ est une fonction dont les valeurs sont toutes du même signe ($f(x) - x - 1 \geqslant 0$ pour tout x, ou $f(x) - x - 1 \leqslant 0$ pour tout x) ; dans ce cas $f_n(x) - n$ est une suite monotone. Si $f_n(x_0) - n$ est une suite divergente, alors il existe une suite x_n de nombres tels que $\lim_{n \to \infty} x_n - x_{n-1} = 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |f(x_n) - x_n - 1| = \infty$: il suffit de poser $x_n = f_n(x_0)$. Ceci montre par exemple que si $f(x) - x - 1$ est une

fonction monotone qui tend vers zéro à l'infini et que

$$\left| \int_0^\infty (f(x) - x - 1)\, dx \right| = \infty ,$$

alors $f_n(x) - n$ tend vers l'infini pour tout x ou $f_n(x) - n$ tend vers moins l'infini pour tout x suivant que $f(x) - x - 1$ est une fonction positive.

THEOREME 19. – *Soit* $f : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *une fonction telle que*

a) $f(x) - x - 1$ *est une fonction croissante concave.*

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) - x = 1$.

c) $\int_0^\infty (\omega(u))^2\, du < \infty$ *où* $\omega(x) = x + 1 - f(x)$.

Alors $\lim_{n \to \infty} \left(f_n(x) - \int_0^n (f(t) - t)\, dt\right)$ *existe pour tout* x.

Démonstration. – Si $\omega(x) = x + 1 - f(x)$, on a que

$$f(x) = x + 1 - \omega(x)$$

$$f_2(x) = f(x) + 1 - \omega(x + 1) - (\omega(f(x)) - \omega(x + 1))$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + 1 - \omega(x + n) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\omega(f_{i+1}(x) + n - i - 1) - \omega(f_i(x) + n - i))\right) .$$

Vérifions que la suite $\left(f_{n+1}(x) - (n + 1) - \sum_{i=0}^{n} \omega(x + i)\right)$ converge. Il suffit d'établir que (attention aux parenthèses dans les lignes suivantes)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\omega(f_{i+1}(x) + n - i - 1) - \omega(f_i(x) + n - i)| < \infty$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega(f_i(x) + n - \omega(f_i(x))) - \omega(f_i(x) + n)| < \infty$$

Or $\sum_{n=1}^{\infty} |\omega(f_i(x) + n - \omega(f_i(x))) - \omega(f_i(x) + n)| \leqslant$

$$\leqslant \int_0^{\infty} (\omega(f_i(x) - \omega(f_i(x)) + t) - \omega(f_i(x) + t))\, dt$$

En effet, à cause de la convexité de $\omega(x)$, on a que

$$\omega(a - n) - \omega(b - n) \leqslant \omega(a - t) - \omega(b - t),$$

si $a \leqslant b$ et si $t \leqslant n$. Mais

$$\int_0^{\infty} (\omega(f_i(x) - \omega(f_i(x)) + t - \omega(f_i(x) + t))\, dt =$$

$$= \int_{f_i(x) - \omega(f_i(x))}^{f_i(x)} \omega(t)\, dt \leqslant \omega(f_i(x))\, \omega(f_i(x) - \omega(f_i(x))) .$$

Mais si i est suffisamment grand $f_i(x) - \omega(f_i(x) \geqslant f_{i-1}(x)$. D'où, si N est suffisamment grand,

$$\sum_{i \geqslant N} \omega(f_i(x))\, \omega(f_i(x) - \omega(f_i(x))) \leqslant \sum_{i \geqslant N} (\omega(f_{i-1}(x)))^2$$

$$\leqslant 2 \int_{N-1}^{\infty} (\omega(t))^2\, dt .$$

Pour terminer la démonstration, il suffit d'établir la convergence de

$$\sum_{n=0}^{m-1} (f(n + x) - (n + x)) - \int_0^m (f(t) - t)\, dt$$

lorsque x est un nombre positif fixe et que m parcourt les entiers naturels. Soit N l'entier tel que $N \leqslant x < N + 1$, ainsi

$$\omega(n + N + 1) \leqslant \omega(n + x) \leqslant \omega(n + N)$$

et $0 \leqslant \omega(n + N) - \omega(n + x) \leqslant \omega(n + N) - \omega(n + N + 1)$. La série à coefficients positifs $\sum_{n=0}^{\infty} \omega(n + N) - \omega(n + x)$ converge, donc

$$\sum_{n=0}^{m-1} (f(n + x) - n - x) - \sum_{n=N}^{N+m-1} (f(n) - n)$$

est une suite convergente ainsi que la suite

$$\sum_{n=0}^{m} (f(n+x) - n - x) - \sum_{n=0}^{m} f(n) - n .$$

Il est tout aussi classique d'établir que

$$\sum_{n=0}^{m-1} (f(n) - n) - \int_0^m (f(t) - t)\, dt$$

est une suite convergente.

Citons un exemple de fonctions concaves $f(x)$ telles que

$$\omega(x) = f(x) - x - 1$$

est une fonction croissante telle que

$$\int_0^\infty \omega(t)\, dt = \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\infty (\omega(t))^2\, dt < \infty .$$

Si $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant k < 1$, $f(x) = x + 1 - \frac{k}{(x+1)^\alpha}$ donne lieu à une telle fonction.

6. Applications.

Indiquons comment la solution de l'équation d'Abel permet d'étudier les fonctions qui commutent avec f. Soit

$$f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

et soit $G(x)$ une solution principale de l'équation d'Abel et supposons que $c : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ soit telle que $\lim_{x \to \infty} c(x) - x = L$ et $c(f(x)) = f(c(x))$. Observons que :

$$\begin{aligned} G(c(x)) - G(x) &= \lim_{n \to \infty} (f_n(c(x)) - f_n(x)) \\ &= \lim_{n \to \infty} c(f_n(x)) - f_n(x) \\ &= L . \end{aligned}$$

Ainsi $G(c(x))$ est également une solution principale de l'équation d'Abel. Si $c(x)$ et $d(x)$ sont deux fonctions qui commutent avec f et telles que $\lim_{x \to \infty} c(x) - d(x) = 0$, alors on a encore que

$$G(c(x)) = G(d(x))$$

et si G est une fonction injective, on obtient que $c(x) = d(x)$.

Si G est une solution principale de l'équation d'Abel qui établit une bijection entre $[0, \infty)$ et $[a, \infty)$ on peut définir la fonction $f_t(x) = G^{-1}(g(x) + t)$ pour $t \geqslant 0$.

Comme $G(f_t(x)) = G(x) + t$, on obtient que

$$G(f_t(f_s(x))) = G(f_s(x)) + t = G(x) + (s + t) .$$

Ainsi $f_t \circ f_s = f_{t+s}$ et comme $f_1 = f$, f_t est un semi-groupe à un paramètre qui contient f. Vérifions maintenant que si

$$\lim_{\substack{|x-y| \leqslant M \\ x \to \infty,\, y \to \infty}} G(x) - G(y) - x + y = 0 ,$$

si $G(x)$ est une fonction croissante, alors $\lim_{x \to \infty} f_t(x) - x = t$. Remarquons que dans ce cas, $f(x) = G^{-1}(G(x) + 1)$ est nécessairement une fonction croissante et que $f(x) > x$. Si $t \leqslant n$ où n est un entier, on voit que $f_t(x) \leqslant f_n(x)$, ce qui permet de voir que $f_t(x) - x$ est une fonction bornée en x. D'où

$$\lim_{x \to \infty} G(x) - G(f_t(x)) - x + f_t(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} - t - x + f_t(x) = 0 \qquad \text{Q.E.D.}$$

Comme je l'ai indiqué plus haut, la solution de l'équation d'Abel permet de résoudre l'équation fonctionnelle de Schröder. Les divers théorèmes que nous avons démontrés dans la section précédente permettent en particulier de vérifier les théorèmes déjà cités de Kneser, de Szekeres, de Kuczma et de Lündberg. Nous verrons dans la prochaine partie comment ces résultats peuvent être utilisés avec avantage dans les processus en cascade.

PARTIE IV

FONCTION DE SCHRODER ET PROCESSUS EN CASCADE

1. Loi-limite d'un processus en cascade expansif.

Dans cette partie, j'utiliserai la fonction de Schröder (ou de Böttcher au besoin) pour étudier les processus en cascade. J'établis ici le théorème fondamental des processus en cascade expansifs. Celui-ci, qui a plus de vingt ans d'histoire, s'est vu démontré sous des hypothèses de plus en plus faibles (cf. Harris [12], Levinson [19], Stigum [29], Kesten-Stigum [14]). Je rappelle ou j'introduis quelques notations en vue du prochain théorème.

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson, $p(x, y)$ $(x = 0, 1, 2, \ldots, y = 0, 1, 2, \ldots)$ est la matrice telle que $\sum_{y=0}^{\infty} p(x, y) z^y = (f(z))^x$. De même, $p_n(x, y)$ est la matrice telle que $\sum_{y=0}^{\infty} p_n(x, y) z^y = (f_n(z))^x$. Si δ_t est la masse-unité de Dirac disposée au point t de l'axe réel, on notera par μ_n la mesure $\sum_{y=0}^{\infty} p_n(1, y) \delta_y$. Si μ est une mesure sur l'axe réel et si k est un nombre réel, on notera par $\mathrm{H}(\mu ; k)$ la mesure telle que

$$\int \Phi(x)\, d\mathrm{H}(\mu ; k)(x) = \int \Phi(kx)\, d\mu(x) .$$

THEOREME 20. — *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ *la fonction génératrice d'un processus de Galton-Watson* $\left(p(n) \geqslant 0, \sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1\right)$ *dont la moyenne est finie et dépasse* 1 $\left(1 < \sum_{n=0}^{\infty} np(n) = \mathrm{M} < \infty\right)$, *on suppose que* $f(z) \neq z^{\mathrm{M}}$, *alors*

a) *il existe une suite de nombres positifs* k_n *et une mesure* μ *portée par* $[0, \infty)$ *telles que* $\int_0^\infty d\mu(t) = 1, \mu \neq \delta_0$ *et la suite* $\mathrm{H}(\mu_n ; k_n)$ *tend vaguement vers la mesure* μ ; *si* $g(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi t}\, d\mu(t)$, *alors* $g(\mathrm{M}\xi) = f(g(\xi))$;

b) si $\widetilde{g}(\xi)$ est la transformée de Laplace d'une mesure $\widetilde{\mu}$ portée par $[0, \infty)$ et si $\widetilde{g}(\mathrm{M}\xi) = f(g(\xi))$, il existe un nombre $k \geqslant 0$ tel que $\widetilde{\mu} = \mathrm{H}(\mu ; k)$;

c) si $0 < \alpha < 1$, $\int_0^\infty t^\alpha\, d\mu(t) < \infty$.

d) la partie singulière de la mesure μ par rapport à la mesure de Lebesgue est $q\,\delta_0$ où $q = \inf\{x \mid x \in (0,1), f(x) \leqslant x\}$; si $w(t)\,dt$ est la partie absolument continue de $d\mu(t)$, $w(t)$ est continue et non nulle pour $t > 0$.

Démonstration de la partie a). — La transformée de Laplace de la mesure $\mu_n = \sum_{y=0}^{\infty} p_n(1, y)\, \delta_y$ est $f_n(e^{-\xi})$. Pour démontrer la partie a), il suffit de trouver une suite k_n de nombres positifs telle que

a) $f_n(e^{-k_n \xi})$ comme suite de fonctions convergent sur $[0,1]$ vers une fonction $g(\xi)$ non constante ;

b) les fonctions $f_n(e^{-k_n \xi})$ sont équicontinues en $\xi = 0$;

c) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{k_n}{k_{n+1}} = \mathrm{M}$.

En effet, dans ce cas, on sait que la suite $f_n(e^{-k_n \xi})$ convergera vers une fonction $g(\xi)$ uniformément sur tout compact de $[0, \infty)$, que $g(\xi)$ sera la transformée de Laplace d'une mesure μ vers laquelle la suite de mesures $\mathrm{H}(\mu_n ; k_n)$ tendra vaguement et que $\mu \neq \delta_0$. Enfin

$$g(\mathrm{M}\xi) = \lim_{n \to \infty} f_n(e^{-k_n \xi \mathrm{M}}) = \lim_{n \to \infty} f_n\left(e^{-k_{n-1} \xi \frac{\mathrm{M} k_n}{k_{n-1}}}\right)$$

$$= f\left(\lim_{n \to \infty} f_{n-1}\left(e^{-k_{n-1} \xi \frac{\mathrm{M} k_n}{k_{n-1}}}\right)\right) = f(g(\xi)) .$$

Pour $x \in [0,1)$, soit $f^*(x)$ la fonction inverse de

$$\frac{1 - f(1 - x(1 - q))}{1 - q}$$

où $q = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$, $f^*(x)$ est une fonction convexe dont la dérivée à l'origine est $1/\mathrm{M}$ et si $x \in (0,1), f(x) < x$. Par le théorème de Lündberg, si l'on choisit un point $a \in (0,1)$, $\mathrm{F}^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n^*(x)}{f_n^*(a)}$ existe et est une fonction strictement croissante, convexe et continue. Comme nous l'avons démontré (théorème 12), si $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont deux suites de nombres positifs qui convergent vers zéro alors que $\frac{x_n}{y_n}$ et $\frac{y_n}{x_n}$ sont deux suites bornées, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{F}^*(x_n)}{\mathrm{F}^*(y_n)} \frac{y_n}{x_n} = 1$. Posons $k_n = f_n^*(a)$. On a bien que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n^*(a)}{f_{n+1}^*(a)} = \frac{1}{f^{*\prime}(0)} = \mathrm{M} .$$

Soit maintenant $\mathrm{F}_1(x) = \mathrm{F}^*\left(\frac{1-x}{1-q}\right), q < x \leqslant 1, \mathrm{F}_1(f(x)) = \mathrm{M}\,\mathrm{F}_1(x)$. Choisissons un entier N tel que si $n \geqslant \mathrm{N}$, $e^{-k_n} > q$ et considérons la suite de fonctions $\{u_n(s)\}_{n>\mathrm{N}}$ pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ où

$$u_n(s) = \mathrm{F}_1(f_n(e^{-k_n s})) .$$

$u_n(s) = \mathrm{M}^n \mathrm{F}_1(e^{-s\,k_n})$. Si $a' = 1 - (1 - q)\,a$,

$$\mathrm{M}^n = \frac{\mathrm{F}_1(a')}{\mathrm{F}_1(f_{-n}(a'))} = \frac{\mathrm{F}^*\left(\frac{1-a'}{1-q}\right)}{\mathrm{F}^*\left(\frac{1-f-n(a')}{1-q}\right)} = \frac{\mathrm{F}^*(a)}{\mathrm{F}^*(f_n^*(a))}$$

$$\mathrm{M}^n = \frac{\mathrm{F}^*(a)}{\mathrm{F}^*(k_n)} . \quad \text{Ainsi} \quad u_n(s) = \frac{\mathrm{F}^*(a)}{\mathrm{F}^*(k_n)} \mathrm{F}^*\left(\frac{1 - e^{-k_n s}}{1 - q}\right)$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-k_n s}}{(1 - q)\,k_n} = \frac{s}{(1 - q)}$, si $s > 0$ on a que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(s) = \frac{F^*(a)\,s}{1-q}\,.$$

La suite $u_n(s)$ converge donc. Vérifions maintenant que les fonctions $u_n(s)$ sont équicontinues à $s = 0$. Puisque $e^{-x} \leqslant 1 - \frac{x}{2}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $u_n(s) \leqslant M^n F_1\left(1 - \frac{sk_n}{2}\right) = M^n F^*\left(\frac{sk_n}{2(1-q)}\right)$ dès que s est suffisamment petit $\left(0 \leqslant \frac{sa}{2(1-q)} \leqslant 1\right)$.

Soit p un entier positif, il existe alors un δ_p tel que pour tout n, $\frac{\delta_p k_n}{2(1-q)} \leqslant k_{n+p}$ étant donné que $\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+p}}{k_n} = M^{-p}$. Si $s < \delta_p$, $u_n(s) \leqslant M^n F^*(k_{n+p}) = M^{-p}$. Ce qui montre que les fonctions $u_n(s)$ sont équicontinues à $s = 0$. Comme F_1 admet un inverse fonctionnel continu, la suite $f_n(e^{-k_n s})$ converge et ces fonctions sont équicontinues à $s = 0$. La partie a) du théorème est donc démontrée.

Démonstration de la partie b). — Soit maintenant une mesure $\tilde{\mu}$ dont la transformée de Laplace $\tilde{g}(\xi)$ satisfait aux deux conditions suivantes : $\tilde{g}(0) = 1$ et $\tilde{g}(M\xi) = f(\tilde{g}(\xi))$. On peut supposer que $\tilde{g}(\xi) \not\equiv 1$. Considérons la fonction $\tilde{F}^*(x)$ qui est l'inverse fonctionnel de la fonction $\frac{1-\tilde{g}(\xi)}{1-q}$ et utilisons encore la fonction $f^*(x)$ qui est l'inverse fonctionnel de la fonction $\frac{1-f(1-x(1-q))}{1-q}$. L'inverse fonctionnel de la fonction $\tilde{F}^*(f^*(x))$ est $\frac{1-f(\tilde{g}(\xi))}{1-q} = \frac{1-\tilde{g}(M\xi)}{1-q}$.

C'est donc dire que $\tilde{F}^*(f^*(x)) = \frac{1}{M}\tilde{F}^*(x)$. La fonction $\tilde{F}^*(x)$ est une solution convexe à l'équation de Schröder pour f^*. Par le théorème 11, cette solution est principale, c'est-à-dire il existe un nombre $k^* > 0$ tel que $\tilde{F}^*(x) = k^* F^*(x)$. Comme il suit des calculs faits lors de la démonstration de la partie a), on a que $F^*\left(\frac{1-g(\xi)}{1-q}\right) = \frac{\xi}{1-q}$.

D'où il existe un $k > 0$ tel que $\tilde{g}(\xi) = g(k\xi)$ et ainsi $\tilde{\mu} = H(\mu; k)$.

Démonstration de la partie c). — Pour vérifier que pour tout $r \in (0,1)$, $\int_0^\infty t^r \, d\mu(t) < \infty$, il suffit d'établir que pour tout $r \in (0,1)$, $\lim_{\xi \downarrow 0} \frac{1 - g(\xi)}{\xi^r} = 0$. En effet, si pour tout ξ de $(0,1)$, $\frac{1 - g(\xi)}{\xi^r} \leqslant M_r$, alors $\frac{1}{\xi^r} \int_{1/\xi}^\infty d\mu(t) \leqslant 2 \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\xi t}}{\xi^r} \, d\mu(t) \leqslant 2M_r$. Utilisons un nombre $L > 1$, dont les diverses puissances donneront une partition de $[1, \infty)$. Si $0 \leqslant s < r$, alors

$$\int_1^\infty t^s \, d\mu(t) \leqslant \sum_{n=0}^\infty L^{(n+1)s} \int_{L^n}^{L^{n+1}} d\mu(t)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^\infty L^{(n+1)s - nr} \times 2M_r < \infty .$$

Etablir que $\lim_{\xi \downarrow 0} \frac{1 - g(\xi)}{\xi^r} = 0$ revient à établir que $\lim_{x \downarrow 0} \frac{F^*(x)}{x^{1/r}} = \infty$.

Soit (a, b) un intervalle de $(0,1)$ tel que $\bigcup_{n=0}^\infty f_n^*(a, b) = (0, b)$ si $y \in (a, b)$,

$$\frac{F^*(f_n(y))}{(f_n(y))^s} = \frac{F^*(y)}{(f_n(a))^s} \left(\frac{f_n(a)}{f_n(y)}\right)^s$$

$$\lim_{n \to \infty} (f_n(a))^s M^n = 0 ,$$

car
$$\lim_{n \to \infty} \frac{(f_{n+1}(a))^s M^{n+1}}{(f_n(a))^s M^n} = M^{1-s} < 1 ,$$

lorsque $s > 1$.

Ainsi,
$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^s}{F^*(x)} = 0 \quad \text{si} \quad s > 1 .$$
Q.E.D.

Démonstration de la partie d). — Calculons la masse que la mesure accorde à $t = 0$ $\mu\{0\} = \lim_{\xi \to \infty} g(\xi) = a$. Remarquons que

$$a = \lim_{\xi \to \infty} g(M\xi) = \lim_{\xi \to \infty} f(g(\xi)) = f(a) .$$

Ainsi $a = 1$ ou $a = q$. Si $a = 1$, $g(\xi) \equiv 1$, ce qui n'est pas le cas (j'ai repris l'argumentation de Stigum [29]).

Vérifions maintenant que la fonction $\mu(t)$ est continûment dérivable sur $\{t \mid t > 0\}$. Considérons la transformée de Fourier de la mesure μ : $g(i\xi) = \int_0^\infty e^{-i\xi t}\, d\mu(t)$. Formellement, appliquons la formule d'inversion pour la transformée de Fourier de $\mu - q\delta_0$.

$$\text{"} \int_{-\infty}^{\infty} (g(i\xi) - q)\, e^{i\xi t}\, d\xi \text{"} = \int_{-1}^{1} (g(i\xi) - q)\, e^{i\xi t}\, d\xi$$

$$+ \text{"} \sum_{n=0}^{\infty} \text{"} \int_{M^n}^{M^{n+1}} g(i\xi) - q)\, e^{i\xi t}\, d\xi$$

$$+ \text{"} \sum_{n=0}^{\infty} \text{"} \int_{-M^{n+1}}^{-M^n} (g(i\xi) - q)\, e^{i\xi t}\, d\xi \,.$$

Soit $h > 0$, majorons uniformément en t pour $|t| \geqslant h$

$$\int_{M^n}^{M^{n+1}} (g(i\xi) - q)\, e^{i\xi t}\, d\xi = M^n \int_1^M (g(i\xi M^n) - q)\, e^{i\xi M^n t}\, d\xi$$

$$= M^n \int_1^M (f_n(g(i\xi)) - q)\, e^{i\xi M^n t}\, d\xi \,.$$

Utilisons la majoration suivante : si $h(t)$ est une fonction continue sur $[a, b]$, si $B = \sup\{|h(t)| \mid t \in [a, b]\}$ et si

$$w_h(\delta) = \sup\{|h(t_1) - h(t_2)| \mid t_i \in [a, b]\ ,\ |t_1 - t_2| \leqslant \delta\}\ ,$$

alors
$$\left| \int_a^b h(t)\, e^{iyt}\, dt \right| \leqslant \frac{B\pi}{y} + \frac{b-a}{2}\, w_h\left(\frac{\pi}{y}\right) \cdot$$

Posons

$$B_n = \sup\{|f_n(g(i\xi)) - q| \mid 1 \leqslant \xi \leqslant M\}$$
$$\mu'_n = \sup\{|f'_n(g(i\xi))| \mid 1 \leqslant \xi \leqslant M\}\,.$$

Soit k un nombre de $(f'(q), 1)$ alors comme on peut s'en convaincre (cf. Stigum [29]), $\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu'_n}{k^n} = 0$. Et nous avons

$$\left| \int_1^M (f_n(g(i\xi)) - q)\, e^{i\xi M^n t}\, d\xi \right| \leqslant \frac{B_n \pi M^{-n}}{h} + M\mu'_n w_g\left(\frac{\pi M^{-n}}{h}\right) \cdot$$

Puisque pour tout $r \in (0,1)$, $\int_0^1 t^r \, d\mu(t) < \infty$, on a qu'il existe une constante C_r telle que

$$|g(i\xi_1) - g(i\xi_2)| \leqslant C_r \, |\xi_1 - \xi_2|^r \ , \quad \text{si} \quad r \in (0,1) \ .$$

Ainsi

$$\left| \int_1^M (f_n(g(i\xi) - q) \, e^{i\xi M^n t} \, d\xi \right| \leqslant \frac{B_n \pi M^{-n}}{h} + \frac{C_r M \mu'_n M^{-nr} \pi^r}{h^r}$$

Remarquons aussi que si $M^n \leqslant a < M^{n+1}$, $|t| \geqslant h$

$$\left| \int_{M^n}^a (g(i\xi) - q) \, e^{i\xi t} \, d\xi \right| \leqslant \frac{B_n \pi}{h} + \frac{C_r M \mu'_n \pi^r M^{n(1-r)}}{h^r}$$

Choisissons r de telle sorte que $k M^{1-r} < 1$ et $r < 1$, on peut alors trouver une constante D telle que

$$\left| \int_{M^n}^{M^{n+1}} (g(i\xi) - q) \, e^{i\xi t} \, d\xi \right| \leqslant \frac{D(k M^{1-r})^n}{h^r} \quad \text{si} \quad |t| \geqslant h \ .$$

Par le théorème de Weierstrass, puisque $\sum_{n=0}^{\infty} (k M^{1-r})^n < \infty$,

$$\int_{-N}^{N} (g(i\xi) - q) \, e^{i\xi t} \, d\xi$$

donne une suite de fonctions qui converge uniformément sur $\{t \mid |t| \geqslant h\}$. La limite de cette suite existe donc sauf peut-être pour $t = 0$, et donne une fonction $w(t)$ qui est définie et continue sur $\{t \mid t \neq 0\}$. Ainsi $d\mu(t) = q\delta_0(t) + w(t) \, dt$.

Enfin, le fait que $w(t) > 0$ si $t > 0$, vient du théorème 8 de [8]. La démonstration du théorème 20 est complète.

DEFINITION. — *La loi-limite d'un processus en cascade dont la moyenne est finie et dépasse un et dont la fonction génératrice est $f(z)$ est une mesure de probabilité dont la transformée de Laplace $g(\xi)$ n'est pas constante et satisfait l'équation fonctionnelle*

$$g(M\xi) = f(g(\xi)) \ .$$

2. Fonctions qui commutent avec f et fonctions harmoniques.

Revenons à un processus en cascade purement expansif dont la fonction génératrice est $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$.

THEOREME 21. – *Soit* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$ *la fonction génératrice d'un processus en cascade purement expansif indécomposable* (L = 1) *avec* $\Sigma\, np(n) \log^2 n < \infty$, *soit* $h(x)$ *une fonction harmonique à laquelle on associe la fonctionnelle* H *pour les séries de puissances à coefficients positifs et soit* $c(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n z^n$ *alors que* $\sum_{1}^{\infty} n\,|c_n| < \infty$, *que le premier coefficient non nul de la série* $c(z)$ *est positif et que* $c(f(z)) = f(c(z))$ *sur un voisinage de* $z = 0$, *alors* $\mathrm{H}((c(z))^x) \geqslant 0$ *pour* $x = 1, 2, 3, \ldots$

Vu le corollaire du théorème 11 de [8], il suffit de vérifier le théorème 21 lorsque $h(x)$ est de la forme $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c\mathrm{M}^n w_x(c\mathrm{M}^n)$. Soit $c(x, y)$ le coefficient de la puissance z^y dans le développement en série de Taylor de $(c(z))^x$, c'est-à-dire $(c(z))^x = \sum_{y=1}^{\infty} c(x, y) z^y$. Evaluons :

$$\sum_{y=1}^{\infty} c(x,y)\, t w_y(t) = \sum_{y=1}^{\infty} -c(x,y) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(g(i\xi)^{y-1} g'(i\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\Big(\sum_{y=1}^{\infty} c(x,y)\, y(g(i\xi))^{y-1} g'(i\xi)\, e^{i\xi t}\Big)\, d\xi \ .$$

Le changement d'ordre entre l'intégration et la sommation est légitime par le théorème de convergence bornée de Lebesgue :

$$\Big|\sum_{y=1}^{n} c(x, y)\, y(g(i\xi)^{y-1} g'(i\xi)\, e^{i\xi t}\Big| \leqslant \Big|\sum_{y=1}^{\infty} y\,|c(x, y)|\ \ g'(i\xi)\Big|$$

Or $\sum_{y=1}^{\infty} y\,|c(x, y)| \leqslant x \sum_{1}^{\infty} n\,|c_n| < \infty$ et $g'(i\xi)$ est intégrable au sens de Lebesgue par le lemme 6 de [14]

$$\sum_{y=1}^{\infty} c(x\,,y)\,tw_y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(c(g(i\xi)))^{x-1}\,c'(g(i\xi)\,g'(i\xi)\,e^{i\xi t}\,d\xi\ .$$

Comme $f(c(z)) = f(c(z))$ sur un voisinage de l'origine, par analyticité, on a que $f(c(t)) = c(f(t))$ pour $0 \leqslant t < 1$, ce qui oblige la fonction c à valoir 1 à $z = 1$: $\lim_{n\to\infty} c(f_{-n}(t)) = \lim_{n\to\infty} f_n(c(t)) = 1$. Posons

$$\begin{aligned} h(\xi) = c(g(\xi))\ ,\ h(\mathrm{M}\xi) &= c(g(\mathrm{M}\xi)) \\ &= c(f(g(\xi))) \\ &= f(c(g(\xi))) = f(h(\xi))\ . \end{aligned}$$

On sait (cf. Levinson [19] ou cf. le corollaire du théorème 11), qu'une solution dérivable à $\xi = 0$ à l'équation fonctionnelle

$$h(\mathrm{M}\xi) = f(h(\xi))$$

est nécessairement de la forme $g(a\xi)$. Par analyticité, $c(g(z)) = g(az)$ si $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$, $\sum_{y=1}^{\infty} c(x\,,y)\,tw_y(t) = a^{-1}tw_x(a^{-1}t)$. Vu que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t\mathrm{M}^n w_y(t\mathrm{M}^n) \quad \text{est } 0(y), \text{ on a que}$$

$$\sum_{y=1}^{\infty} c(x\,,y)\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} t\mathrm{M}^n w_y(t\mathrm{M}^n)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-1}t\mathrm{M}^n w_y(a^{-1}t\mathrm{M}^n) \geqslant 0$$

Q.E.D.

Remarque. — Le fait que $p(n) \geqslant 0$, $0 < \mu = p(1) < 1$ n'assure aucunement que les coefficients d'une série $c(z)$ qui commute avec $f(z)$ sont positifs. Par exemple, s'il existe un N tel que $p(\mathrm{N}) = 0$, $\mathrm{N} > 1$ et si F est la fonction de Schröder de f, $\mathrm{F}(z) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{f_n(z)}{\mu^n}$, alors la fonction $c(z) = \mathrm{F}^{-1}(\sqrt{\mu}\,\mathrm{F}(z))$ n'a pas tous ses coefficients positifs, car $c(c(z)) = f(z)$.

3. La fonction de Schröder et la fonction caractéristique de la loi-limite.

Considérons toujours la fonction génératrice $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, z^n$ d'un processus en cascade purement expansif de moyenne finie. Soit $g(\xi)$ la transformée de Laplace de la loi-limite du processus. Nous allons préciser le comportement asymptotique de $g(\xi)$ lorsque $\xi \longrightarrow \infty$.

THEOREME 22. — *Soit* $f(z) = \mu z + \sum_{n=2}^{\infty} p(n)\, z^n$ *la fonction génératrice d'un processus en cascade où* $\mu \neq 0$, $\sum_{2}^{\infty} np(n) < \infty$ *et soit* $g(\xi)$ *la transformée de Laplace de la loi-limite du processus, c'est-à-dire* $g(M\xi) = f(g(\xi))$ *alors on peut trouver deux constantes* C_1 *et* C_2 *strictement positives telles que pour tout* $\xi \geqslant 1$, $C_1 \xi^{\alpha} \leqslant g(\xi) \leqslant C_2 \xi^{\alpha}$ *où* $\alpha = \dfrac{\log \mu}{\log M}$.

Démonstration. — *Soit* $F(t) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{f_n(t)}{n}$, posons $H(\xi) = F(g(\xi))$. On a que $H(M\xi) = F(g(M\xi))) = F(f(g(\xi))) = \mu F(g(\xi)) = \mu H(\xi)$. Si α est l'exposant tel que $M^{\alpha} = \mu$, si

$$C_1^* = \inf \left\{ \frac{H(\xi)}{\xi^{\alpha}} \mid 1 \leqslant \xi \leqslant M \right\}$$

$$C_2^* = \sup \left\{ \frac{H(\xi)}{\xi^{\alpha}} \mid 1 \leqslant \xi \leqslant M \right\},$$

alors $C_1^* \xi^{\alpha} \leqslant H(\xi) \leqslant C_2^* \xi^{\alpha}$ pour tout $\xi > 0$. $\overline{\lim_{\xi\to\infty}} \dfrac{g(\xi)}{\xi^{\alpha}} = \overline{\lim_{\xi\to\infty}} \dfrac{H(\xi)}{\xi^{\alpha}} = C_2^*$ et $\underline{\lim_{\xi\to\infty}} \dfrac{g(\xi)}{\xi^{\alpha}} = \underline{\lim_{\xi\to\infty}} \dfrac{H(\xi)}{\xi^{\alpha}} = C_1^*$ étant donné que $F'(0) = 1$.

COROLLAIRE. — *Si* $w(t)$ *est la densité de la loi-limite du processus,* $\int_0^s w(t)\, dt = 0(s^{-\alpha})$ *lorsque* s *tend vers zéro.*

Remarque 1. – Si $g(z)$ est le prolongement analytique de $g(\xi)$ au demi-plan $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, on démontre de la même façon qu'il existe un $R > 0$ et deux constantes C_1', C_2' telles que $0 < C_1'$ et $|z| \geqslant R$, $\operatorname{Re} z > 0 \implies C_1' \leqslant \dfrac{|g(z)|}{|z|^{\alpha}} \leqslant C_2'$.

Remarque 2. – Si $\sum_1^{\infty} np(n) \log n < \infty$, on peut estimer l'ordre de croissance de la fonction de Schröder au voisinage de $t = 1$: on peut trouver deux constantes D_1 et D_2 telles que si $t \in [0,1)$,

$$0 < D_1 \leqslant \frac{F(t)}{(1-t)^{\alpha}} \leqslant D_2 .$$

THEOREME 23. – *Soit* $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} p(n) z^n$ $(m > 1)$ *la fonction génératrice d'un processus en cascade admettant une moyenne finie* $\left(M = \sum_1^{\infty} mp(n) < \infty\right)$ *et soit* $g(\xi)$ *la transformée de Laplace de la loi-limite du processus, alors on peut trouver deux constantes strictement positives telles que si* $\xi \geqslant 1$, $e^{-D_1 \xi^{\beta}} \leqslant g(\xi) \leqslant e^{-D_2 \xi^{\beta}}$ *où* $\beta = \dfrac{\log m}{\log M}$.

Démonstration. – Utilisons la fonction de Böttcher associée à f : $B(t) = \lim_{n \to \infty} (f_n(t))^{m^{-n}}$, on a que $B(f(t)) = (B(t))^m$ et $B'(0) > 0$. Posons $H(\xi) = \log B(g(\xi))$. On vérifie aisément que $H(M\xi) = m^n H(\xi)$. On peut donc trouver deux constantes positives C_1^* et C_2^* pour lesquelles $-C_2^* \xi^{\beta} \leqslant H(\xi) \leqslant -C_1^* \xi^{\beta}$ lorsque $\beta = \dfrac{\log m}{\log M}$. Ainsi

$$0 < \varliminf_{\xi \to \infty} g(\xi) e^{C_1^* \xi^{\beta}} \quad \text{et} \quad \varlimsup_{\xi \to \infty} g(\xi) e^{C_2 \xi^{\beta}} < \infty .$$

Le théorème découle facilement de cela.

Pour un instant, regardons le processus en cascade gouverné par la distribution géométrique $p(n) = p(1-p)^{n-1}$ $n = 1, 2, \ldots$ On

vérifie que la transformée de Laplace de la loi-limite est $g(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi}$ alors que la fonction de Schröder associée à $f(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$ est $\dfrac{z}{1-z}$. Dans ce cas $F(g(\xi)) = \dfrac{1}{\xi}$. Cette identité est remarquable.

Dans le cas général d'un processus en cascade, $f(z) = \mu z + \sum_{n=2}^{\infty} p(n) z^n$ avec $M = \sum_1^{\infty} np(n) < \infty$, on peut se demander quand est-ce que la fonction de Schröder $F(z)$ associée à f et la fonction caractéristique $g(\xi)$ de la loi-limite du processus sont liées par une identité du type $F(g(\xi)) = A\xi^{\alpha}$ où $\alpha = \dfrac{\log \mu}{\log M}$. Ceci aura lieu par exemple lorsque $\lim_{\xi \to \infty} \dfrac{g(\xi)}{\xi^{\alpha}} = A$. Lorsque $\sum_1^{\infty} np(n) \log n < \infty$, ceci se produira lorsque $\lim_{x \uparrow 1} \dfrac{F(x)}{(1-x)^{\alpha}} = A$. Si l'on suppose encore que $\sum_1^{\infty} np(n) \log n < \infty$ une autre situation où l'on aura $F(g(\xi)) = A\xi^{\alpha}$ est lorsque toute fonction $c(x)$ définie sur $[0,1]$ telle que $c(f(x)) = f(c(x))$ et que $c'(0)$ existe est nécessairement dérivable à $x = 1$: en effet, soit $c_t(x)$ la fonction telle que $c_t(f(x)) = f(c_t(x))$, $c_t'(0) = \mu^t$ $(t > 0)$, on a que $F(c_t(x)) = \mu^t f(x)$ et $c_t(g(\xi)) = g(M^t \xi)$. D'où si $M^t = \xi$,

$$F(g(M^t)) = \mu^t F(g(1)) = F(g(1))\, M^{t\alpha} .$$

En se servant du théorème 9, on voit que dans un processus en cascade indéfiniment divisible, on a bien $F(g(\xi)) = F(g(1))\, \xi^{\alpha}$. En effet, si $t > 0$ et si $c_t(z)$ est la série de puissances $F^{-1}(\mu^t F(z))$, alors les coefficients de $c_t(z)$ sont tous positifs et l'on obtient que $c_t(1) = 1$ et $c_t'(1) = M^t$.

Pour illustrer la difficulté d'étudier ce dernier problème, considérons la situation suivante sur $[0,1]$. Considérons une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telle qu'il existe des nombres μ, M, a et b pour lesquels $\mu < 1 < M$, $0 < a < b < 1$ et $f(x) = \mu x$ si $x \leqslant a$,

$$f(x) = 1 + M(x-1)$$

si $x \geqslant b$, $f(b) = a$ et f est croissante. Déterminons la fonction de Schröder $S(x)$ associée à f. Alors

$$S(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant a \\ \dfrac{f(x)}{\mu} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ \dfrac{f(1 + M^n(x-1))}{\mu^{n+1}} & \text{si} \quad a \leqslant 1 + M^n(x-1) \leqslant b \,. \end{cases}$$

Considérons maintenant un ξ tel que $1 - b \leqslant \xi \leqslant 1 - a$, alors $g(\xi) = \lim_{n \to \infty} f_n\left(1 - \dfrac{\xi}{M^n}\right) = 1 - \xi\, S(g(\xi)) = \dfrac{f(1-\xi)}{\mu}$ lorsque

$$1 - b \leqslant \xi \leqslant 1 - a \,.$$

On voit qu'en général, on n'aura pas que $S(g(\xi)) = A\xi^\alpha$ et que les fonctions $c : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telles que $c(0) = 0, c'(0)$ existe et > 0 ne sont pas dérivables à $x = 1$. Dire que $F(g(\xi)) = A\xi^\alpha$ revient à dire que $\dfrac{F(z)}{F'(z)} = \alpha \dfrac{g^{-1}(z)}{\dfrac{d}{dz}(g^{-1}(z))}$. Désignons par $H_0(z)$ et $H_1(z)$ les fonctions définies sur $(0,1)$ telles que

a) $H_i(f(z)) = f'(z)\, H_i(z) \quad i = 0$ et 1

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{H_0(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 1} \dfrac{H_1(x)}{1-x} = 1$

alors $F(g(\xi)) = A\xi^\alpha$ si et seulement si $H_0(x) = \alpha H_1(1-x)$.

Je voudrais faire remarquer une conséquence géométrique de l'identité $F(g(\xi)) = A\xi^\alpha$. Considérons la fonction $F(z)$ pour $|z| < 1$; si $|\theta| \leqslant \pi$, posons $\Gamma_\theta = \{z \mid \exists\, t > 0 \;\; F(z) = te^{i\theta}\}$. On voit que $f(\Gamma_\theta) = \Gamma_\theta$. D'autre part, soit $\gamma_\varphi = \{g(\xi) \mid \arg \xi = \varphi\}$ on a que $f(\gamma_\varphi) = \gamma_\varphi$. Si $F(g(\xi)) = A\xi^\alpha$, $\gamma_\varphi \subseteq \Gamma_{\alpha\varphi}$. Une telle observation invite à poser plusieurs questions de ce type :

1) Si le sous-groupe engendré par $\{n - m \mid p(n) \neq 0,\, p(m) \neq 0\}$ est Z, est-il vrai que :

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(\Delta) = g(H) \cup \{0\} \text{ où } \Delta = \{z \mid |z| \leqslant 1\} \text{ et } H = \{z \mid \operatorname{Re} z \geqslant 0\} \,.$$

2) Est-il vrai que $\lim_{\theta \downarrow 0} \arg F(e^{i\theta}) = \alpha\pi$.

3) Sous quelles conditions, $g(\xi)$ est-elle injective sur H.

Enfin, on peut se demander ce qui se passe lorsque $p(1) = 0$. Je termine en indiquant une solution à l'équation $H(f(z)) = f'(z)\,H(z)$. Si $p(1) = 0$, soit $B(t)$ la fonction de Bottcher associée à f, alors la fonction $\dfrac{B(t)\log B(t)}{B'(t)}$ est une solution de l'équation fonctionnelle.

Addendum.

E. Seneta a publié un article intitulé Functional equations and the Galton-Watson process" (adv. Appl. Prob. 1, 1-42, 1969). Plusieurs des idées qu'il exploite se répètent dans le présent article. En particulier, j'indique que le théorème 4.1 de son article est la partie a) du théorème 20 de cet article-ci. De même, S. Karlin et J. Mc Gregor ont jeté beaucoup de lumière sur la fonction $F(g(\xi))$ dans leur article : "Embeddability of discrete time simple branching processes into continuous time branching processes" (Trans. Amer. Math. Soc., 132, (1968), 115-136).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.N. BAKER, Zusammensetzungen ganzer Functionen Math.Zeitschr. Bd 69, (1958), 121-163.

[2] H. BAUER, Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) 11, (1961), 89-136.

[3] L. BERG, Unstetige, monotone Iterations gruppen reeler Functionen, *Pub. Math. Debrecen* 9, (1962), 47-56.

[4] N. BOURBAKI, Integration Livre VI, Hermann, Paris.

[5] G. CHOQUET et P.A. MEYER, Existence et unicité des repfesentations intégrales dans les convexes compacts quelconques. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (1963), 139-154.

[6] J. DENY, Familles fondamentales. Noyaux associés. *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble 3, (1951), 73-101.

[7] S. DUBUC, Positive Harmonic Functions of a Branching Process, *Proc. Amer. Math. Soc.* 21, (1969), 324-326.

[8] S. DUBUC, La fonction de Green d'un processus de Galton-Watson, *Studia Math.* vol. 34, N° 1, (1969).

[9] M.P. FATOU, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, *J. Math. pures et appl.* 9ème série, t. 2, (1923), 343-384, et t. 3, (1924), 1-49.

[10] W. FELLER, An introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II, John Wiley and Sons, New York.

[11] J. HADAMARD, Two works on iteration and related questions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 50, (1944), 67-75.

[12] T.E. HARRIS, The theory of Branching Process, Springer-Verlag (1963).

[13] G. JULIA, Mémoire sur la permutabilité des fonctions rationnelles, *Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup.* (3) 39 (1922), 131-215.

[14] H. KESTEN et B.P. STIGUM, A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processus. *Ann. Math. Stat.* 37 (1966) 1211-1223.

[15] H. KNESER, Reelle analytische Gösungen der Gleichung

$$\varphi(\varphi(x)) = e^x$$

und verwandte Funktionalgleichungen, *J. Reine angew. Math.* 187 (1950) 56-67.

[16] M.G. KOENIGS, Recherches sur les équations fonctionnelles, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* (1884).

[17] M. KUCZMA, On the Schröder equation Rozprawy Matematyczne XXXIV, (1963), 1-50.

[18] M. KUCZMA, Functional equations in a single variable, *Ars. Polona,* Varsovie.

[19] N. LEVINSON, Limiting theorems for Galton-Watson Branching Process, *Illinois J. Math.* 3, (1959), 554-565.

[20] P. LEVY, Fonctions à croissance régulière et itération d'ordre fonctionnaire, *Ann. Mat. Pura App.* (4) 5 (1928), 269-298.

[21] A. LUNDBERG, On iterated functions with asymptotic conditions at a fixpoint, *Arkiv. för Mat. Bd 5,* (1965), 193-206.

[22] P.A. MEYER, Probabilités et Potentiel, Hermann, Paris.

[23] H. MICHEL, Untersuchungen über stetige, monotone Iterationsgruppen reeller Functionen ohne Differenzierbarkeit voraussetzungen, *Pub. Math. Debrecen* 9, (1962), 13-46.

[24] P. MONTEL, Leçons sur les récurrences et leurs applications, Gauthier-Villars, Paris (1957).

[25] R.R. PHELPS, Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand, Princeton.

[26] E. PICARD, Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Gauthier-Villars, Paris (1950).

[27] J.G. RITT, On the iteration of rational functions, *Trans. Amer. Math.* Soc. 21, (1920), 348-356.

[28] F. SPITZER, Principles of Random Walk, Van Nostrand, Princeton.

[29] B.P. STIGUM, A theorem in the Galton-Watson Process, *Ann. Math. Stat.* 37, (1966), 695-698.

[30] G. SZEKERES, Regular Iteration of Real and Complex Functions, *Acta Math.* 100 (1958), 203-258.

[31] A.G. WALKER, Commutative functions I, *Quart J. Math.* (Oxford) 17, (1945), 66-82.

Manuscrit reçu le 19 mai 1970

Serge DUBUC
Département de Mathématiques
Université de Montréal
Montréal (Canada)